

M

mathematics

数学教学论导引

SHUXUE JIAOXUELUN DAOYIN

● 刘耀斌 编著



南京大学出版社

数学教学论导引



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学教学论导引 / 刘耀斌编著. —南京: 南京大学出版社, 2010. 12

ISBN 978 - 7 - 305 - 07883 - 5

I. ①数… II. ①刘… III. ①数学教学—教学研究
IV. ①01 - 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 235653 号

出 版 者 南京大学出版社

社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

网 址 <http://www.NjupCo.com>

出 版 人 左 健

书 名 数学教学论导引

编 著 刘耀斌

责任编辑 陈济平 编辑热线 025 - 83686531

照 排 南京紫藤制版印务中心

印 刷 盐城市华光印刷厂

开 本 880×1230 1/32 印张 9 字数 251 千

版 次 2010 年 12 月第 1 版 2010 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 305 - 07883 - 5

定 价 28.00 元

发行热线 025 - 83594756

电子邮箱 Press@NjupCo.com

Sales@NjupCo.com(市场部)

* 版权所有, 侵权必究

* 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购
图书销售部门联系调换

前 言

数学教学论是高等师范院校数学教师教育专业的主干课程之一,是体现师范特色的重要课程,也是数学教育领域中一门正处于发展中的新兴学科。作为建设中的数学教学论课程,尚有很多问题需要研究与解决,数学教学论教材建设就是亟待解决的问题之一,迫切需要形成宜教、宜学、实用性强的数学教学论教材。在新一轮基础教育课程改革的背景下,数学教学论教材建设应重视以下几个方面。

首先,必须处理好一般教育理论和数学教学原理的关系。当前,数学教学论教材主要是由宏观的基本原理(教育学、心理学、教学论)和微观的数学教学法两部分构成,但随着数学教师专业化的要求和数学教学论课程自身的发展,宏观的一般性研究和微观的教学方法探讨就显得脱节、无力,急需形成有数学特色的“数学教学原理”,以便更有针对性的进行及时和有效的研究。数学教学论突出的是数学的教与学,必须区别于一般的教育学、心理学。要发现并揭示数学教育特有的内部矛盾和数学教学运作的内在规律,要解决好引进、吸收与自我生长的关系,重在自我生长。因此,既要把握好数学教学论研究的逻辑起点,又要把握数学教学的内在规律。

数学教学论研究的逻辑起点可分为如下几种情形:①以教育学、心理学的理论成果作为数学教育研究的逻辑起点,用教育学、心理学的一般原理去考察数学教育,主要形式是“教育学、心理学的原理加数学例子”;②仅仅考虑数学的一面,认为数学教育有其特殊性,不应该把数学教育纳入教育学、心理学的范围;③借助教育学、心理学理论演绎地解决数学教育中的问题,同时又仅仅抓住“数学”来研究数学教育,使之区别于一般教育理论的“双逻辑起点论”。笔者比较赞成“双逻辑起

点论”，但特别需要强调的是“数学”特色要明显。

数学的价值决定了数学教学的价值，数学的本质和特征决定了数学教学的任务和目标，数学发生、发展的历史过程决定了数学教学的规律和方法。因而，数学教学论大厦的根基是数学。譬如，在研究数学教学原则与方法时，依据数学探索规律和严谨性的特点提出了“循序渐进”的原则和“摆脱严谨性束缚”的原则。这是因为数学是由简单明了的基本概念、公理、命题与逻辑推理相结合演绎而成的，在理论展开中是层层深入、步步为营，整个理论系统是严格有序的。另一方面，数学概念的建立、定理的发展、新知识的创立等等，大多是由归纳类比、直觉猜想、合情推理而得到的，那些严格的逻辑证明和演绎体系往往是后来补上的。这就要求在数学教学中既要向学生展示数学严谨性的一面，又要向学生展示严格化背后生动活泼的一面，要再现数学知识的发生、发展过程，要使学生像科学家发现真理一样学习数学。因此，在数学教学中，过分强调严谨是不妥的。于是，在数学教学理论中，又提出了“摆脱严谨性束缚”的原则。当然“摆脱严谨性束缚”的原则，是针对过分追求数学严谨所带来的弊端而言的，其真正的意义是：重视数学严谨性，又不被数学严谨性所束缚。这个例子充分说明了数学教学原理的数学特征。

其次，必须突出三个重点。第一个重点是数学教学的价值问题。确定教学的价值问题，目的就是为了帮助受教育者获得职业视角。拥有职业视角将帮助你意识到成为教师是一个旅程——而不是一个目的。价值意识，可以唤醒潜伏于个体内心深处的自主意识和观念，成为其动力及源泉，这对于师范生以后的专业发展是至关重要的。数学教学论必须首先解决数学教学的价值问题，要明确回答为什么要教（学）数学的问题。引导师范生跳出数学，从而进一步感受数学的文化价值和应用价值，了解数学对人类文明的巨大影响，了解数学的根在何处，了解数学的终极目标是什么。在正确认识数学的基础上，就能从数学的认识价值、智力价值、精神价值、美学价值、应用价值等方面，全面把握数学的教学价值。

第二个重点是数学教学的理论问题。数学教学论是关于教学理论的科学,其理论意义是毋庸置疑的,最为重要的是防止经验主义和简单的移植。经验虽是熟知,但未必熟知就是真知。经验的东西可能只是可以描摹的外部形态,而不是本质的规律性的联系。当前各种教育理论的论述较为全面,如数学学习理论包括联结主义学习理论、行为主义学习理论、信息学习理论、有意义学习理论、建构主义学习理论等内容。如果将这些现成的理论拿来就用则缺乏针对性。数学教学论是探索数学教学最一般的规律,充分利用相关学科的成果,根据数学自身的思维特点,通过归纳和演绎的方法,对数学教学活动和教学关系逐步形成概念、范畴,进而形成数学教学理论体系,为解决具体的数学教学问题提供一般规律性知识或原理。

第三个重点是数学教学的实践问题。数学教学论区别于数学教师教育专业其他课程的标志之一,是它具有很强的实践性,只有充分发挥该课程的实践性,才能有效地实现教学目标。这里有三层意思:一是重视对实践问题的理论探讨,即不仅仅讨论实践操作问题,还应该在总结实践经验的基础上形成科学的理论;二是教材的陈述方式体现实践性,既注意在陈述理论时用案例来说明,也注意在案例分析中抽象出原理和方法;三是教材要立足于实践,即教材必须安排充分的实践活动环节。数学教学论关于数学教学实践活动的理论,是一般理论与数学教学实际相结合的产物,它不但来自于哲学、教育科学、心理科学、学习科学和数学科学等,还来自于实践,特别是数学教学的实践。从根本上说,数学教学论关于学科教学实践活动的理论,主要决定于社会的需要、数学的特点和学生的特征等方面。有关数学教学的理论必须经过数学教学论的整合,才能在数学教学实践中应用。

最后,教材结构要进一步完善。综观国际课程改革,一个重要趋势是,传统的以百科全书为范式的“囊括式”课程内容选择模式逐渐被“精选式”课程内容选择模式所取代,强调学习者自身进行建构式学习以及创造新知识框架的能力。为适应我国教师教育形势及基础

教育课程改革的需要,数学教学论应该对传统的课程体系及内容进行反思、改造,抛弃陈旧过时的知识与内容,重新构建一套新型的课程体系。数学教学论课程的教学任务十分明确,既要加强对学生进行数学教学理论的教学,又要重视对学生进行教学实践能力的培养。但在实际教学中,很难处理好这两者的关系。先进行理论教学时,由于学生缺乏数学教学的感性认识,不能领会精神实质,有时在学习初就产生了抵触情绪,认为枯燥、空洞,影响教学质量;先进行实践教学时,又由于没有一定的教学理论基础,对所接触到的教学实例,很难进行概括和提炼,不能在一定理论层面上讨论问题,教学效果也不显著。数学教学论教材在处理“理论”与“实践”的关系上,既要主次分明,又要紧密联系,要始终让读者感到理论不空,实践不易。

《数学教学论导引》是笔者的尝试,也是笔者教学、科研经验的积累,力求使她既具有教育性,又具有数学特色;既重视理论的凝炼,又重视实践的应用。努力处理好上面提到的几个问题。另外,从内容的组织看尽量考虑到与数学教育专业所开设的其他教育类课程的整合,如“中学数学教材分析”“初等数学研究”“中学数学现代基础”“数学方法论”“数学史”等课程。因为同类各门课程各有重点,课程目标各不相同。但由于都与中学数学教学有关,尽可能避免内容重复现象。

书中引用了许多研究者的研究成果,其中能确切指出材料和观点的,均以适当方式说明。另有一些材料系辗转引用,受条件所限,一时无法深入考证与查实。在此,对书中所引用材料的作者致以最深深的谢意。

另外,在成书过程中,戴风明老师给予了很多宝贵的建议,对全书的一些章节的结构提出了许多很好的修改意见。在此,谨向支持和关心这本书的朋友致谢。

编者
2010年11月

目 录

认识“数学教学论”	1
第一章 数学教学的价值	15
第一节 数学的价值	15
一、数学的研究对象	15
二、数学的特征	19
三、数学的地位及贡献	26
四、数学的价值	42
第二节 数学教育的功能	43
第二章 数学课程概述	47
第一节 课程和数学课程的含义	47
第二节 影响中学数学课程设置的因素分析	49
一、社会因素	50
二、数学因素	52
三、学生因素	54
四、教师因素	55
五、教育理论因素	56
六、课程的历史因素	56
第三节 数学课程内容的选择和体系的编排	56
一、中学数学课程的基本内容	56
二、中学数学课程内容的选择原则	58

三、数学课程体系的编排原则	60
第三章 国内外数学课程改革概述	70
第一节 国外数学课程改革回顾	70
一、克萊茵-貝利运动	70
二、新数学运动	71
三、“回到基础”和“大众数学”	75
第二节 我国数学新课程介绍	78
一、新课程标准的背景	78
二、《全日制九年义务教育数学课程标准 (实验稿)》解读	80
三、《高中数学课程标准(实验)》解读	84
第四章 数学教学基本知识	96
第一节 数学教学过程	96
一、数学教学过程中的基本要素	96
二、数学教学过程的动态结构	98
第二节 数学教学及其本质	99
第三节 数学教学模式	105
一、数学教学模式的含义	105
二、常见的数学教学模式	106
第四节 数学教学方法	113
一、教学方法的启发式原则	113
二、常用的数学教学方法	114
第五章 数学学习的基本知识	121
第一节 数学教育与数学学习	121
第二节 数学学习的特点和类型	123
一、学生的学习活动	123

二、数学学习的特点	124
三、数学学习的类型	124
第二节 数学学习的四个阶段	128
第三节 数学学习的“建构学说”	130
第六章 数学教学原则	132
第一节 教学原则的一般概念	132
第二节 数学教学原则及其选择	133
一、数学教学的基本原则	133
二、数学教学的特殊原则	139
三、数学教学原则的选择	165
第七章 数学教学的基本工作	167
第一节 备课与说课	167
一、教材分析	167
二、了解学生	170
三、编写教案	172
四、说课	187
第二节 数学教学艺术的追求	191
一、教学内容美	192
二、教学结构美	192
三、教学方法美	193
四、教学情感美	194
五、板书艺术美	194
六、课堂气氛美	195
七、教学语言美	196
八、教学节奏美	197
第八章 数学教学质量的测量与评价	199
第一节 数学教学测量与评价概述	199

一、教学测评的功能	200
二、教学评价的分类	202
三、教学测评的特征	205
第二节 数学学习质量的测评	206
一、数学试题的题型和编制	206
二、数学试卷的编制	207
三、学生学习评价的改革趋势	209
第三节 数学课堂教学质量评价	211
一、数学课堂教学质量评价的教师因素分析	211
二、数学课堂教学质量评价方案	212
三、听课和评课	214
第九章 数学教师的进修与科研	220
第一节 中学数学教师的基本素质	220
一、道德素质	220
二、文化素质	222
三、能力素质	224
四、身心素质	225
五、教师的风度仪表	225
第二节 数学教师的进修	225
一、数学教师进修与提高的必要性	226
二、数学教师进修与提高的途径	227
三、数学教师进修的内容	227
第三节 数学教师的科研	228
一、选题	228
二、写作	232
阅读材料 A 中学数学中的逻辑问题	236
第一节 逻辑规律	236

一、同一律	237
二、矛盾律	238
三、排中律	238
四、充足理由律	239
第二节 概念	241
一、概念的概述	241
二、概念的分类	242
三、概念的定义	244
四、概念的系统	247
第三节 判断	248
一、数学命题	248
二、命题的结构	248
三、命题的变化	249
四、等价命题	250
五、命题的复杂性	252
第四节 推理和论证	253
阅读材料 B 逻辑思维与非逻辑思维	261
第一节 形象思维	261
一、形象思维的涵义和特征	261
二、形象思维在科学认识中的作用	264
第二节 灵感思维	266
一、直觉的涵义和特征	266
二、灵感思维的涵义	268
三、灵感发生的基本原理	269
第三节 逻辑思维与非逻辑思维之间的关系	271
参考文献	274

认识“数学教学论”

数学是一门给人以智慧的科学,数学教学是一种充满魅力的艺术。伟大的德国数学家希尔伯特的学生外尔曾经这样评价希尔伯特,“希尔伯特这位吹笛人所吹的甜蜜的芦笛声,诱惑着许多老鼠投入数学的深河”。希尔伯特讲课的内容“不仅是数学,还有希尔伯特对科学的信念以及对理性和科学的热爱”。这样的境界多么令人憧憬!

随着人类教育现象的出现,逐步就有了学校教育,自然就会出现教学方法的问题。开始时,教学方法并没有形成独立的科学体系,人们只是摸索、积累自己的经验和零散地学习别人的有关经验。如孔子的教育思想就属此类。师范教育出现后,为了有效地提高教学水平,逐步出现了“教授法”、“教学法”、“教材教法”。以我国来说,1904年清政府在《奏定优级师范学堂章程》中明确规定了师范生在校学期间必须学习“教育学”,其中包括各科“教授法”,1917年以后,将“教授法”改称为“教学法”。1939年国民政府教育部颁布的《师范学院分系必修及选修科目表施行要点》又把这个学科的名称定为“分科教材及教法研究”。这期间,我国高等师范院校里就出现了“数学教材教法”的课程。新中国成立后,中央人民政府教育部在1950年颁布的《北京师范大学暂行规程》中明确规定了中学教材教法为公共必修课程。1957年,教育部在修订教材教法课的内容时,规定这门课程的内容为:了解中小学教材内容和编写原则,熟悉基本的教学方法,对使用教材过程的经验和问题进行研究。此后,我国各地师范院校大专科的数学专业就设立了“中学数学教法”或“中学数学教材教法”等课程。

“文革”期间,学科教材教法受到了冲击。文革后,特别是进入20世纪80年代以来,我国在学科教学的改革上取得了显著的成绩,积累了许多有益的经验,还十分注意吸收外国的先进经验。国家教育领导部门也十分重视学科教育学的发展,原国家教委副主任柳斌同志在1988年就说过,“我们不但要建立自己的教育学,还要建立自己的学科教育学,这方面的工作是大量的,有广阔的天地,大有可为。如果要讲学术性,我们师范教育的学术性的特色就在这里……”

随着社会的进步,科学技术的发展,特别是出现了社会数学化的趋势,从幼儿教育到高等教育,从学校教育到社会教育,数学教育都占有相当重要的地位,并已经成为整个教育的一个重要组成部分。过去的数学教学法或教材教法已经不能充分地承担数学教育的重担,因而提出了创建数学教育学的问题。这是社会发展和科学进步的必然。

自1982年我国数学教育界提出创建具有中国特色的数学教育学以来,广大数学教育工作者在数学教学理论和实践等方面进行了深入细致的研究,并取得了丰硕的成果。目前,我国对数学教育学的研究日臻成熟,已进入了理论建构的新阶段,呈现出一派欣欣向荣的景象。

随着现代教学论和数学学科的发展,以及数学教育学理论的建立,师范院校曾经开设的数学教材教法课程,已逐步演变为数学教育学。传统的教材教法课注重教学经验的总结与归纳,注重教学技能的传授与获取,而数学教育学则是一门研究数学教育现象。揭示数学教育规律的学科,是建立在数学和教育学的基础上,并综合运用心理学、认知科学、逻辑学等成果于数学教育实践而形成的一门文理渗透型的交叉学科,是教育科学的重要组成部分。数学教学论又是数学教育学的一个分支,它旨在研究传授数学知识的一般规律,并为指导和改进数学教学实践提供科学的理论依据。

数学科学、教育科学、认知科学、心理科学所取得的重大成就和进展,为数学教学论的教学提供了新的理论基础和新的方法论,广大

数学教师多年积累的教学经验为数学教学论研究提供了丰富的素材。因此,在教学中,要力求做到精益求精、求新务实,尽量反映我国数学教学多年来的成功经验,反映现代教学理论研究的新成果,以及国际数学教育中涌现的新思想、新观点和新方法。

那么,师范生为什么要学习和研究“数学教学论”?根据以往数学教学法课程教学的经验,师范生往往不够重视,存在“一听就懂,一看就会,一做就难”的现象。这里有必要首先和同学们说一说学习必要性的问题。一个合格的师范生乃至将来成为优秀的中学数学教师,必须至少具备三个条件:① 具有坚实的数学理论基础,能在高观点下研究和处理中学数学问题。② 掌握基本的数学教育理论,能在正确的数学教育理论指导下,进行数学教学研究与实践。③ 形成娴熟的数学教学技能,能将板书、语言、多媒体、教具等有机结合起来,提高课堂教学效率。

师范生在校期间必须掌握必备的数学专业知识、基本的数学教育理论和规律,学会备课、上课、辅导和批改作业等教学基本功,了解中学数学教改形势,把握最新数学教改动态等等。有人说中学数学内容我了如指掌,又学了那么多的高等数学,教初中、高中数学还不是易如反掌,学不学教学法无所谓;甚至还能列举一些没有经过师范教育培训而成为优秀教师的例子。这种想法是否正确,一个合格的师范生乃至将来成为优秀的中学数学教师,必须至少具备哪些条件,探讨以下几个实际问题后,大家可以自己去寻找答案。

问题1 算术与代数的区别与联系。

众所周知,用字母表示数是代数学的基本思想。算术与代数是数学中最基础、最古老的两个分支学科,算术是代数的基础,代数则是由算术演进而来的,正是由于字母代数这种数学思想的产生,促进了算术向代数的演进。由字母代替数字,或由“数字符号化”而产生了“代数”这个数学分支学科,但人类从“算术”走向“代数”却历经千年(现在中学却在几年的时间就学习了初等代数的全部内容),代数

的产生是“数学中真正的进展”，“代数”的确是“更有力的工具和更简单的方法”。因此，我们所面对的“代数”课本，不是简单的知识罗列，它是千年来一代又一代数学家辛勤探索的知识结晶，它是活泼、生动、不断发展的数学思想的辉煌展示。

曾经在中学数学教师培训班上和中学教师讨论这个问题：小学里的方程与初中里的方程有什么区别与联系？几乎所有老师都不能作出全面而准确地回答。这个问题看似简单，其实很重要，不能理解这个问题，就不能处理好小学数学与中学数学衔接的问题，就不能很好地完成各自的教学目标，小学里容易造成“拔苗助长”，中学里容易造成“囫囵吞枣”。这个问题其实就是问算术与代数的区别与联系。事实上就是要回答：

① 算术与代数的根本区别在哪里？

② 字母代数思想有什么优越性？

这个问题的根本区别就在于算术把未知数排斥在运算之外，而代数则允许未知数作为运算对象参与运算。如果说算术也论及未知数的话，那么这个未知数只能单独地处在等式的左边，所有已知数在等式右边进行运算，未知数没有参与运算的权利。因此，算术方法有很大的局限性，对于那些大量的具有复杂数量关系的实际问题，运用算术方法往往需要很强的技巧，列算式也不那么容易。而对于那些含有多个未知数的实际问题，要利用算术方法解决实际问题常常是不可行的。

而在代数中，方程作为由已知数与未知数构成的条件等式，本身就意味着未知数与已知数有着同等的地位，未知数不仅成为运算的对象，而且可以依照法则从等式一边移到另一边。解方程的过程，实际上是通过已知数与未知数的重新组合，把未知数转化为已知数的过程，即把未知数置于等式的一边，把已知数置于等式的另一边，从这种意义上看，算术运算是代数运算的特殊情况，代数运算是算术运算的发展和推广。

由于引入了字母代数思想，代数运算较之算术运算有了更大的

普遍性和灵活性,极大地扩展了数学的应用范围。许多用算术无法解决的问题,用代数方法却能轻而易举地解决。

不仅如此,字母代数的思想的出现对整个数学的发展也产生了巨大而深远的影响,数学中的许多重大发现都与字母代数思想有关。如解一元二次方程的根的问题导致了虚数的发现,对五次以上方程的求解导致了群论的诞生。正因为如此,人们把字母代数思想的诞生作为数学思想方法发生重大转折的重要标志。

一般说来,字母代数思想有巨大的优越性:

① 用字母表示数能够简明地表示事物的本质特征和规律。

② 用字母表示数具有辩证性。字母表示数既具有任意性,可代表任一个数;同时字母表示数又具有确定性,可表示一个确定的具体的数。

就数学教学而言,“由算术到代数的过渡”是中学数学教学的重大难关之一,教学中不仅要教课本上列举出来的知识,更要教渗透在其中的数学思想方法,使学生深刻领会字母代数思想,灵活运用字母代数的方法。否则,学生始终会对 $|a| = \pm a$ 模糊不清,也不能接受 $S = ab$ 是运算结果。

以上问题的讨论充分说明,我们只有基础扎实,才能深刻理解与吃透教材,才能居高临下,把握数学的本质。

问题2 关于逆运算。

关于有理数的四则运算之间的关系,有一学习资料中是这样表述的,“加法与减法互为逆运算,乘法与除法互为逆运算。”^①而另一教材中是这样表述的,“小学学过的方法是根据加减法互为逆运算、乘除法互为逆运算的关系来解的。”^②但普及义务教育以前的初中课本《代数》第一册中只写了“有理数减法是有理数加法的逆运算,有理数除法是有理数乘法的逆运算”。

① 《初中代数疑难分析》(河南人民出版社1982年6月第1版)第17页。

② 九年制义务教育教材《代数·第一册》(上)第26页。