普通高等院校"十一五"规划教材

概率论与数理统计

GAILULUN YU SHULI TONGJI

康　健　主编
董晓梅　毕秀国　副主编

国防工業出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校"十一五"规划教材

概率论与数理统计

康健 主编

董晓梅 毕秀国 副主编

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书是普通高等院校“十一五”规划教材，根据工科类各专业概率论与数理统计课程的基本要求以及教育部最新颁布的研究生入学考试的考试大纲编写而成。本书共分九章，第一章概率论的基本概念；第二章随机变量及其分布；第三章多维随机变量及其分布；第四章随机变量的数字特征；第五章大数定律及中心极限定理；第六章样本及抽样分布；第七章参数估计；第八章假设检验；第九章线性回归分析。全书内容循序渐进，深入浅出，结合工科实际，力求使用较少的数学知识，强调概率统计概念的阐释，注重应用。

本书是一本本科院校公共基础课教材，可作为高等学校工科、农医、经济、管理等专业的概率统计课程的教材，也可作为实际工作者的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 康健主编. —北京：国防工业出版社，2010.7

普通高等院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-118-06907-5

Ⅰ. ①概... Ⅱ. ①康... Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 112841 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 10½ **字数** 265 千字

2010 年 7 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—4000 册 **定价** 22.00 元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　　言

“概率论与数理统计”是高等院校各专业普遍开设的一门重要的基础课程，也是学生首次接触的用数学方法以研究随机现象的统计规律为主的一门数学分支，其理论严谨，应用广泛，发展迅速. 也正是因为它具有自己独特的概念和逻辑思维方法，使得初学者常常感到困惑和茫然. 其原因诸多：一是从过去研究“确定性现象”转到研究“随机现象”需要有一个适应的过程；二是本课程所涉及的应用领域极其广泛，又与其他数学分支有着密切的联系，而所涉及的数学工具，如排列、组合、集合及其运算、分段函数、广义积分等又是初学者容易忽视或不被重视的内容：三是本内容概念较多，甚至有些概念彼此相近，容易混淆，加之目前大多数院校面临着教学内容多、学时少以及教学要求不断提高的状况，使得很多学生难以掌握其基本理论，更谈不上应用了. 所以本书对教材内容及结构方面做了必要的调整，使内容更紧凑、系统性更强，在编写过程中力求做到由浅入深，语言简练，通俗易懂，便于教师教学和学生自学. 但也不失对基本理论的要求，这样可为学生进一步学习概率统计更高一级的课程打下必要而扎实的基础. 另外，本书还大量引用了应用于各个领域的随机现象的实际例题，特别是有典型应用价值的例题，以体现本书的实用性特点.

本书参考学时为 48 学时，其中带“ * ”号部分内容可根据专业的不同需求酌情删减. 本书每章都配有适量习题，便于学生复习巩固，提高学习质量.

全书共分九章，第一章 概率论的基本概念，第二章 随机变量及其分布，第三章 二维随机变量及其分布，第四章 随机变量的数字特征，第五章 大数定律及中心极限定理，第六章 样本及抽样分布，第七章 参数估计，第八章 假设检验，第九章 线性回归分析.

本书由大连工业大学数学系组织编写，参加编写的有康健（第一章～第二章）、董晓梅（第七章、第八章）、毕秀国（第六章、第九章、附表）. 全书由康健统稿且最后定稿.

本书的编写过程中参阅了大量书籍，引用了一些典型例子等，恕不一一指明出处及相关作者，在此一并向他们表示衷心的感谢！

鉴于编者水平有限，疏漏与不当之处在所难免，恳切希望同行及学生给予批评指正.

编　者

2010.5

目　　录

第一章　概率的基本概念

自然现象和社会现象是多种多样的，有一类现象，在一定条件下必然发生，称为确定性现象，例如，一石子向上抛后必然下落；在一个大气压下，水在 100℃时一定沸腾等. 另一类现象，称为不确定性现象，其特点是在一定的条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而且在试验和观察之前，不能预知确切的结果. 例如，在相同的条件下，向上抛掷一硬币，其落地后可能正面向上，也可能反面向上，并且在每次抛掷之前无法知道抛掷的结果；下周的股市可能会上涨，也可能会下跌等. 这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性，就是统计规律性. 在大量重复试验中，其结果具有统计规律性的现象，称为随机现象. 概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律性的一门数学分支学科.

古典概型是概率论最早研究的一类实际问题，也是概率论入门时必须学习的主要内容.

正是因为有了条件概率和事件的独立性这两个非常重要的概念，概率论才能够成为一门独立的数学学科.

本章主要介绍概率论的基本概念和基本知识，以及一些简单应用. 这些基本概念和基本知识对于学习概率论与数理统计是至关重要的.

第一节　随 机 试 验

在研究自然现象和社会现象时，常常需要做各种试验，在这里，把各种科学试验以及对某一事物的某一特征的观察都认为是一种试验，下面是一些试验的例子：

E_1：抛掷一硬币，观察正面、反面出现的情况；

E_2：将一硬币抛掷 3 次，观察正面、反面出现的情况；

E_3：将一硬币抛掷 3 次，观察出现正面的次数；

E_4：抛一颗骰子，观察出现的点数；

E_5：在一批灯泡中任意抽取 1 只，测试它的寿命；

E_6：记录某地区一昼夜最高温度和最低温度.

上面的 6 个例子有以下特点：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的结果不止一个，且事先明确知道试验的所有可能结果；

(3) 在一次试验之前不能确定哪一个结果一定出现.

在概率论中，将具有以上 3 个特点的试验称为随机试验，记为 E. 本书以后提到的试验都是指随机试验.

第二节 样本空间 随机事件

一、样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果是已知的，将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 Ω；样本空间的元素，即 E 的每一个结果，称为样本点，记为 ω_i.

例 1—1 写出第一节中试验 $E_k(k=1,2,\cdots,6)$ 的样本空间 Ω_k.

解：设 E 面为 H，反面为 T. Ω_1：{H，T}；

Ω_2：{HHH，HHT，HTH，THH，HTT，THT，TTH，TTT}；

Ω_3：$\{0,1,2,3\}$；

Ω_4：$\{1,2,3,4,5,6\}$；

Ω_5：$\{t \mid t\geqslant 0\}$；

Ω_6：$\{(x,y)\mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度(℃)，y 表示最高温度(℃)，并设这一地区的温度不会小于 T_0，也不会大于 T_1.

二、随机事件

把样本空间的任意一个子集称为一个随机事件，简称事件，用 A、B、C 等表示. 因此，随机事件就是试验的若干个结果组成的集合. 特别地，如果一个随机事件只含一个试验结果，则称此事件为基本事件.

由于样本空间 Ω 包含了所有的样本点，且是 Ω 自身的一个子集；在每次试验中它必然发生，所以称 Ω 为必然事件. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也是 Ω 的一个子集，且在每次试验中总不发生，所以称 $\varnothing$ 为不可能事件.

必然事件和不可能事件都是确定的，只是为了需要，把它归结为随机事件的两种特例.

例 1—2 在编号为 1，2，3，4，5 的 5 张卡片中，任意取 2 张，记录编号的和，试写出随机试验所有可能的不同结果的全体 Ω.

解：容易看到，最小编号和为 $1+2=3$，最大编号和为 $4+5=9$，编号和还能取 3～9 中的每个整数，记 ω_i 表示“编号和为 i”，$i=3,4,\cdots,9$.

故 $\Omega=\{\omega_3,\omega_4,\cdots,\omega_9\}$.

三、事件之间的关系与运算

既然事件是一个集合，因此有关事件间的关系、运算及运算规律也就按照集合间的关系、运算及运算规律来处理.

设 Ω 是试验 E 的样本空间，A、B 和 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是样本空间 Ω 中的事件.

1. 包含关系

如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，则称 B 包含 A，或 A 包含于 B（图 1.1），记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

2. 两事件相等

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

3. 事件的和

若两事件 A、B 至少有一个发生,则称事件 A 与 B 的和(图 1.2),记为 $A \cup B$ 或 $A+B$.

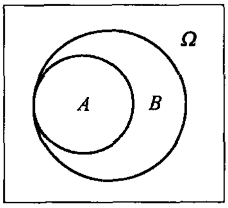

图 1.1 $A \subset B$

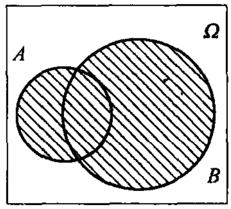

图 1.2 $A \cup B$

4. 事件的积

若事件 A 与 B 同时发生,则称 A 与 B 的积(图 1.3),记为 $A \cap B$ 或 AB.

5. 事件的差

若事件 A 发生,但事件 B 不发生,称为事件 A 与 B 的差(图 1.4),记为 $A-B$ 或 $A\overline{B}$.

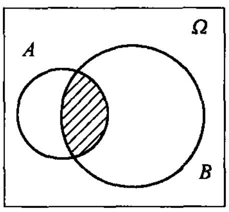

图 1.3 AB

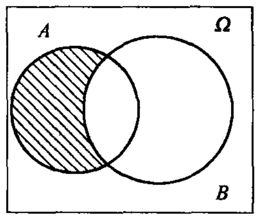

图 1.4 $A-B$

6. 互不相容(互斥)

若事件 A 与 B 满足 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 互斥,又称 A 与 B 互不相容(图 1.5).

由 A 与 B 互不相容的定义可以看出,A 与 B 互不相容,即 A 与 B 不可能同时发生,也就是说如果 A 发生了,B 就不会发生;反之,如果 B 发生了,A 就不会发生.

7. 逆事件(对立事件)

如果事件 A 与 B 满足条件 $A \cup B=\Omega$, $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 互为逆事件,又称 A 与 B 互为对立事件(图 1.6),记为 $B=\overline{A}$或 $A=\overline{B}$,其中 B 称为 A 的逆事件.

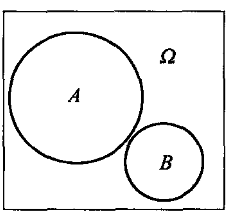

图 1.5 A 与 B 互斥

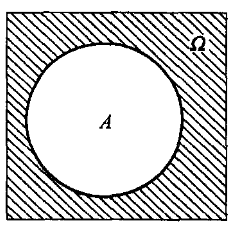

图 1.6 $\overline{A}$

易知$\overline{A}$发生当且仅当A不发生. 显然有

$\overline{\Omega}=\varnothing$, $\overline{\varnothing}=\Omega$, $\overline{\overline{A}}=A$

图 1.1～图 1.6 直观地表示以上事件中间的关系和运算.

说明:事件的和与积都可推广到有限个或可列个的情形.

如: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$为事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的和; $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$为事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的积.

事件的运算规律:

设A、B、C为事件,则有:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

(3) 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(4) 德摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

说明:事件的运算规律可推广到任意多个的情形.

例 1—3 在计算机系学生中任意选一名学生,令事件$A=$“选到的是男生”, $B=$“选到的是三年级学生”, $C=$“选到的是运动员”. 试问:

(1) 事件$AB\overline{C}$的含义是什么?

(2) 在什么条件下, $ABC=C$成立?

解: (1) 事件$AB\overline{C}$表示选到的是三年级的男生,但不是运动员.

(2) $ABC=C$等价于$ABC\subset C$且$C\subset ABC$, 则有$C\subset AB$,

即全系的运动员都是三年级的男生.

例 1—4 试用Ω中的三个事件A、B、C表示如下事件:

(1) A与B都发生而C不发生;

(2) A、B、C中至少发生一个.

解:(1) 事件A与B都发生而C不发生可以表示为

$AB\overline{C}$或$AB-C$或 $AB-ABC$

(2) 事件A、B、C至少发生一个可以表示为

$$A\cup B\cup C \text{ 或 } \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} \text{ 或}$$

$$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup ABC$$

这里最后一个表达式中包含了A、B、C 3 个事件“恰好发生 1 个”、“恰好发生 2 个”、“3 个都发生”这 3 种情况.

第三节 事件的概率

除必然事件和不可能事件外,任一事件在一次试验中可能发生,也可能不发生. 我们希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性的大小,例如,为了确定水坝的高度,就要知道河流在造水坝地段每年最大洪水达到某一高度这一事件发生的可能性大小. 我们希

望找到一个合适的数来表征事件在一次试验中发生的可能性大小.为此,首先引入频率,它描述了事件发生的频繁程度,进而引出事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

一、频率

若在 n 次试验中,事件 A 发生了 μ 次,则称

$$F_n(A)=\frac{\mu}{n} \tag{1.1}$$

为事件 A 在 n 次试验中出现的频率.

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验的次数之比,其大小表示事件 A 发生的频繁程度.频率越大,事件 A 发生就频繁.这就意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就大,反之亦然.例如,抛掷一硬币,观察事件 A =“正面 H”的情况.历史上曾有许多人做过了大量的试验,结果见表 1.1.

表 1.1

试验者	次数 n	频数 μ	频率 $F_n(A)=\frac{\mu}{n}$
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K.皮尔逊	12000	6019	0.5016
	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

从表 1.1 可以看出,抛掷一硬币的次数 n 较大时,频率 $F_n(A)$ 在 0.5 附近波动,频率呈现出稳定性,即当 n 逐渐增大时,频率 $F_n(A)$ 总是在 0.5 附近摆动,而逐渐稳定于 0.5.

大量试验证实,当重复试验的次数 n 逐渐增大时,频率 $F_n(A)$ 呈现出稳定性,逐渐稳定于一个常数.这种“频率稳定性”即通常所说的统计规律性.大量重复试验,计算频率 $F_n(A)$,以它来表征事件 A 发生可能性大小是合适的.

但是,在实际中,我们不可能对每一个事件都做大量的试验,然后求得事件频率,用以表征事件发生可能性大小.同时,为了理论研究的需要,从频率的稳定性和频率的性质得到启发,给出如下表征事件发生可能性大小——概率的定义.

二、事件的概率

1. 概率的定义

概率的统计定义:设在 n 次试验的事件中,事件 A 发生 μ 次,当 n 很大时,如果其频率 $\frac{\mu}{n}$ 稳定地在某一数值 p 附近摆动,且随着 n 的增加,摆动幅度越来越小,则称 p 为事件 A 的概率,记为 $P(A)=p$.

事件 A 的概率,通俗地讲就是刻画事件 A 发生的可能性大小的度量.

定义 1.1 （概率的定义[①]） 设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，如果对于任意事件 $A\subset\Omega$，都有一个实数 $p(A)$ 与之对应，并且满足如下条件：

(1) 非负性 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性 $P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容，则有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $p(A)$ 为事件 A 的概率．

在上述定义中的 3 个条件中，第 3 个条件尤为重要，使用次数最多. 例如：$\Omega\cap\varnothing=\varnothing$，并且 $\Omega\cup\varnothing=\Omega$，所以

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$$

由于 $P(\Omega)=1$，于是 $P(\varnothing)=0$.

即不可能事件发生的概率等于 0.

2. 概率的基本性质

性质 1.1 $P(\varnothing)=0$ (1.2)

证明：令 $A_1=A_2=\cdots A_n\cdots=\varnothing$，则有

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$，且 $A_iA_j = \varnothing\,(i\neq j)$，$i,j=1,2,\cdots$

所以

$$P(\varnothing) = P\big(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(\varnothing)$$

由概率的非负性知：$P(\varnothing)\geqslant 0$，故由上式得 $P(\varnothing)=0$.

性质 1.2（有限可加性） 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足 $A_iA_j=\varnothing\,(i\neq j)$，则

$$P\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1.3}$$

证明：令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing\,(i\neq j)$，$i,j=1,2,\cdots,n,\cdots$

由可列可加性，则有

$$P\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) = P\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

性质 1.3（逆事件的概率） 对任何事件 A，有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{1.4}$$

证明：由于 $A\overline{A}=\varnothing$ 且 $A\cup\overline{A}=\Omega$，所以

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

---

① Kolmogorov 于 20 世纪 30 年代给出的，在此之前许多人将概率论视为伪科学而拒不接受，在 Kolmogorov 给出概率定义之后，概率论才迅速发展成为一门科学，并日益应用且渗透到各个领域.

则

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

性质 1.4(减法公式) 对任意事件 A 与 B 有

$$P(A-B) = P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) \tag{1.5}$$

证明:因为 $A=AB\cup A\overline{B}$,且 AB 与 $A\overline{B}$互不相容,所以

$$P(A) = P(AB\cup A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B})$$

即

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$$

特殊地,若 $B\subset A$ 则有

$$P(A-B) = P(A) - P(B)$$

性质 1.5(加法公式) 对任意事件 A 与 B,则有

$$P(A\cup B) = P(B\cup A\overline{B}) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1.6}$$

证明:因为 $A\cup B=B\cup A\overline{B}$,且 B 与 $A\overline{B}$互不相容,所以

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(B\cup A\overline{B}) \\ &= P(B) + P(A\overline{B}) = P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

加法公式可以推广到多个事件的情形,例如,设 A、B、C 为事件,则有

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

证明留给读者.

例 1－5 已知 $P(A)=p, P(B)=q, P(A\cup B)=\gamma$,求 $P(AB), P(A\overline{B})$, $P(\overline{A}B), P(\overline{A}\overline{B})$.

解:由加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,故

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = p + q - \gamma$$

由 $A\overline{B}=A(\Omega-B)=A-AB$,而 $AB\subset A$,根据减法公式,可得

$$P(A\overline{B}) = P(A-AB) = P(A) - P(AB) = \gamma - q$$

同理:

$$P(\overline{A}B) = P(B-AB) = P(B) - P(AB) = \gamma - p$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\overline{A}B) = 1 - p - (r - p) = 1 - r$$

$$(\text{或 } P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - r)$$

例 1－6 已知 $P(A)=\dfrac{1}{2}$, $P(B)=\dfrac{1}{3}$,求下列 3 种情况下 $P(A-B)$的值:

(1) $AB=\varnothing$;

(2) $B\subset A$;

(3) $P(AB)=\dfrac{1}{4}$.

解:(1) 由 $P(AB)=0$,由减法公式得

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}$$

(2) 由 $P(AB)=P(B)=\frac{1}{3}$,由减法公式得

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

(3) 由 $P(AB)=\frac{1}{4}$,由减法公式得

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

例 1—7 已知 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.4$, $P(A-B)=0.3$,求:

(1) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$;

(2) $P(A\cup\overline{B})$.

解:(1) 由减法公式得

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3,\ P(A)=0.5$$

则得

$$P(AB)=0.2$$

所以

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.2=0.8$$

(2) $P(A\cup\overline{B})=1-P(\overline{A}B)=1-P(B)+P(AB)=1-0.4+0.2=0.8$

例 1—8 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$, $P(AB)=P(BC)=\frac{1}{8}$, $P(AC)=0$,求 A、B、C 都不发生的概率.

解:A、B、C 都不发生表示为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$,则

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\overline{C})&=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-(P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC))\\&=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-0-\frac{1}{8}+0\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

第四节 等可能概型(古典概型)

本节主要介绍概率论中最早研究的一类实际问题——古典概型,它是概率论最简单的应用之一.

定义 1.2 若随机试验 E 具有以下两个特点:

(1) 样本空间中的样本点总数为有限;

(2) 每个样本点出现的可能性相同(等概率).

则称此模型为古典概型.

古典概率是非常常见的随机现象,例如,掷硬币、抽扑克牌、抽签等都是古典概率.

古典概型的基本特征:一是有限性;二是等可能性. 即试验 E 的样本空间是有限的,

记为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，事件 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 的发生是等可能的，即

$$P\{\omega_1\}=P\{\omega_2\}=\cdots=P\{\omega_n\}=\frac{1}{n}$$

在古典概型中，假设样本空间中的样本点总数为 n，而事件 A 包含了 m 个样本点，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.7}$$

设样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，$A\subset\Omega$，即 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}$，事件 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 的发生是等可能的，即

$$P\{\omega_1\}=P\{\omega_2\}=\cdots=P\{\omega_n\}=\frac{1}{n}$$

则

$$P(A)=P\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}=\sum_{k=1}^{m}P(\{\omega_{i_k}\})=\frac{m}{n}$$

例 1－9 从一副除去两张王牌的 52 张扑克牌中任意抽 5 张，求“没有 K 字牌”的概率.

解：设事件 A =“没有 K 字牌”，由古典概型样本点总数为 C_{52}^5，事件 A 包含的样本点个数为 C_{48}^5，则

$$P(A)=C_{48}^5/C_{52}^5$$

例 1－10 某城市的电话号码由 7 位数字组成，每位数可以是从 0～9 这 10 个数字中的任意 1 个，求电话号码最后 4 位数全不相同的概率.

解：设事件 A =“电话号码最后 4 位数全不相同”，由古典概型样本点总数为 10^7，事件 A 包含的样本点个数为 $10^3\cdot A_{10}^4$，则

$$P(A)=A_{10}^4/10^4$$

在古典概型的计算中，排列数与组合数不应混淆，一个简单的方法是，交换次序后看是否是同一个事件. 如果交换次序后事件改变这是排列问题，否则是组合问题.

例 1－11 箱中有 10 件产品，其中有 1 件次品，在 9 件合格品中有 6 件一等品、3 件二等品，现从箱子中任取 3 件，试求：

(1) 取得的 3 件都是合格品，但是仅有 1 件是一等品的概率；

(2) 取得 3 件产品中至少有 2 件是一等品的概率.

解：设 A =“取得的 3 件都是合格品，但是仅有 1 件是一等品”

B =“取得 3 件产品中至少有 2 件是一等品”

(1) 10 件产品中任取 3 件，所有可能组合数为 C_{10}^3，而取得 3 件都是合格品，但是仅有 1 件是一等品(此时显然二等品为 2 件)的数目为 $C_6^1\cdot C_3^2\cdot C_1^0=C_6^1\cdot C_3^2$. 故所求概率为

$$P(A)=\frac{C_6^1C_3^2}{C_{10}^3}=0.15$$

(2) 同第(1)小题，基本事件总数为 C_{10}^3，有利于事件 B 的基本事件数为 $C_6^2C_4^1+C_6^3$(第

一项为恰好有 2 件一等品，第二项为 3 件一等品）：故所求概率为

$$P(B)=\frac{C_6^2C_4^1+C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{2}{3}$$

例 1－12 从 1,2,3,…,9 这 9 个数中任取 3 个数，求：

(1) 3 个数之和为 10 的概率 P_1；

(2) 3 个数之积为 21 的倍数概率 P_2.

解：此题可以作为组合问题来处理，因为取出的 3 个数交换次序后不影响它们的和或积.

(1) 基本事件总数为 C_9^3，有利于 3 个数之和为 10 的基本事件只可能有 4 个，即取出的结果为{1,2,7)}，{1,3,6}，{1,4,5}，{2,3,5}，则所求概率为

$$P_1=\frac{4}{C_9^3}=\frac{1}{21}$$

(2) 基本事件总数为 C_9^3，取出 3 个数之积为 21 的倍数，必须有 1 个数为 7，另外 2 个数中至少有 1 个数为 3 的倍数，故有利于 3 个数之积为 21 的倍数的基本事件数为 $C_1^1(C_3^1C_5^1+C_3^2)$，则所求的概率为

$$P_2=\frac{C_1^1(C_3^1C_5^1+C_3^2)}{C_9^3}=\frac{3}{14}$$

例 1－13 将 3 个球随机地向标号为 1、2、3、4 的 4 个盒子中投放，试求以下事件的概率：

(1) 第 2 号盒子中恰好被投放 1 个球的概率 P_1；

(2) 第 1、2 号盒子中被投放 1 个球的概率 P_2.

解：每个球都可能投放标号为 1、2、3、4 的 4 个盒子中的任意一个，且是等可能性的，试验的所有基本事件数为 $4^3=64$.

(1) 第 2 号盒子中恰好有 1 个球，可以为 3 个球中任一个球，故有 3 种可能性，其余 2 个球可投放另外 3 个盒子中，有 3^2 种可能性. 由乘法原理，有利于的基本事件数为 $3\times 3^2=27$，则所求概率为

$$P_1=\frac{27}{64}$$

(2)
$$P_2=\frac{3\times2\times3}{64}=\frac{9}{32}$$

注：在(1)中不能认为有利的基本事件为数 3，得 $P_1=\frac{3}{64}$，请读者考虑为什么？

例 1－14 有 10 件产品，其中 3 件次品，从中任意取出 3 件，求至少有 1 件是次品的概率.

解法一：设 $B=\{3$ 件中至少有 1 件是次品$\}$，$A_i=\{3$ 件中恰好有 i 件产品$\}$，$i=1,2,3$.

从 10 件产品任取 3 件有 C_{10}^3 种可能的结果，3 件中恰好有 i 件次品 $(i=1,2,3)$ 的取法有 $C_3^iC_7^{3-i}$ 种，因而

$$P(A_i)=\frac{C_3^iC_7^{3-i}}{C_{10}^3}\quad(i=1,2,3)$$

显然 A_1、A_2、A_3 是两两互不相容的，且 $B=\bigcup_{i=1}^{3}A_i$，故所求概率为

$$P(B)=P(\bigcup_{i=1}^{3}A_i)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)=\sum_{i=1}^{3}\frac{C_3^iC_7^{3-i}}{C_{10}^3}=\frac{17}{24}$$

解法二：如解法一，所设 $\bar{B}$={3 件全是正品 }，有

$$P(\bar{B})=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{17}$$

故所求概率为

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$$

可见，有时利用对立事件间的关系求概率将更加方便.

第五节　条件概率　独立性

一、条件概率

条件概率是概率论中的一个重要而实用的概念，所研究的是在事件 A 已发生的条件下事件 B 发生的概率. 下面举一个例子.

例 1－15　将一硬币抛掷两次，观察其正面 H、反面 T 出现的情况. 设事件 A 为“至少有一次为 H”，事件 B 为“两次掷出同一面”. 求在已知事件 A 已发生的条件下事件 B 发生的概率.

解：样本空间 $\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}$，$A=\{HH,HT,TH\}$，$B=\{HH,TT\}$. 易知，此属于古典概型问题，已知事件 A 已发生，即 TT 不可能发生. 也就是说，试验所有的可能结果所组成的集合就是 A. A 中共有 3 个元素，其中 $HH\in B$. 于是，已知事件 A 已发生的条件下事件 B 发生的概率为

$$P(B\mid A)=\frac{1}{3}$$

另外，易知

$$P(A)=\frac{3}{4},\ P(AB)=\frac{1}{4}$$

则

$$P(B\mid A)=\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

所以

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$