

化工设备设计参考资料

内压作用下斜接管弯头强度计算

~上海石化总厂设计院 薛大年译~

化学工业部设备设计技术中心站

前 言

本文为西德 GÜNTER ARMBRUSTER 在 1971 年所著，在引进装置中作为“内压作用下斜接管弯头强度计标”的依据而提供的。

文中介绍了 EßLINGER ; Van der Neut; Murthy ; Green 和 Emerson 计标方法，并作了比较。在一系列不同尺寸转折角内压力作用的斜接管弯头试件上进行了应变测试，并和上述方法进行了对比和详细讨论，作出了图表。

文中提出了自己的观点及在局部塑性变形条件下的使用情况；并探讨了交变载荷作用下斜接管弯头的强度性能。

本文承上海石油化工总厂设计院薛大年翻译，纺织部设计院张亚丹校对。在印刷时删除了一些照片和不影响计标使用的段落。因水平所限，难免翻译错误和对作者原意了解不透的误介，请读者给予指正。

化工部设备设计技术中心站

一九七九年五月

目 录

常用缩写符号	1
1.0 任务的提出	4
2.0 应力状态的定性研究	4
3.0 文献中介绍的计标方法	5
3.10 起始薄膜应力	6
3.11 椭圆焊缝上的剪切力分量	6
3.20 按 EßLINGER 方法焊缝区应力计标	7
3.21 计标过程介绍	7
3.22 按 EßLINGER 方法计标结果的应用	8
3.30 按 Van der Neut 方法焊缝区应力计标	9
3.31 计标过程介绍	9
3.32 按 Van der Neut 方法计标结果在斜接管弯头上的应用	10
3.33 应力状态的综合	13
3.40 按 Green 和 Emmerson 方法焊缝区应力计标	15
3.41 计标过程介绍	15
3.42 应力状态的综合	16
3.50 按 Murthy 方法焊缝区应力计标	17
3.51 计标过程介绍	17
3.52 应力状态的综合	19

3.60	各种计标方法所得结果的比较	21
4.0	对弯头试件作应变和变形测定	25
4.10	试件的尺寸	25
4.20	测定点的安排	25
4.21	用 Heiß Lack 方法确定主应力方向	25
4.22	应变片的位置	26
4.23	变形的测定	26
4.30	测量结果及评价	26
4.31	弹性范围内的应变测量	26
4.32	变形的测量	28
4.33	变形和应力的综合作用	28
5.0	弹性区应力集中系数和弹塑性区削弱系数的 实验求取	29
5.10	引言	29
5.20	试验和进行计标	32
5.30	结果和讨论	33
6.0	交变载荷下的性能	34
7.0	总结	38
	数据表和图	41
	参考资料, 文献	9.0

常用缩写符号

缩写符号	简 要 说 明	在 本 文 中 的 公 式 或 图 序 号
a	管子中心平面半径	
E	弹性模数, 计标时取 $2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$	
h	壁厚	
i	$\sqrt{-1}$	
K	$\frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2}$	(3.21)
$K_\varphi, K_z,$ $K_{\varphi z}$	γ, φ, z 坐标上单位长度薄膜应力	(3.5)
$K_\eta, K_\xi,$ $K_{\eta\xi}$	γ, η, ξ 坐标上单位长度薄膜应力	(3.6)
K_H	主应力集中系数	(3.47)
K_V	比较应力集中系数	(3.46)
K_{Vmax}	最大的比较应力集中系数	
L	焊缝单位长度上的法向力	
m	单位长度上边缘弯矩	图 3
n	载荷循环数	
n_{PL}	塑性变形的增加系数	(5.6)
N	断裂时载荷循环数	
P	内压力	
P_{FB}	开始屈服时的内压力测定值	
P_{NF}	开始屈服时的名义压力	
q	单位长度上的边缘横向力	图 3
γ	圆柱坐标	
$R_1, R_2,$ R_3, R_4	弯头试件的编号	
SF	以屈服限计标的安全系数	

续上表

S_B	以强度限计标的安全系数	
S_r, S_φ, S_Z	对应力 $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ 的无量纲表达式	(3.31)
$S_\xi, S_{\xi\eta}$	焊缝的拉脱力	(3.8)
T	单位长度上的切向力	
u	在 γ 方向上的位移	图3
U	位移 u 的无量纲表达式	(3.30)
V	在 φ 方向上的位移	图3
$\bar{V}$	在 η 方向上的位移	图3
V	位移 V 的无量纲表达式	(3.30)
V_{PL}	塑性变形时的削弱系数	(5.8)
W	在 Z 方向上的位移	图3
$\bar{W}$	在 $\bar{Z}$ 方向上的位移	图3
W	位移 W 的无量纲表达式	(3.30)
Z	圆柱坐标	图3
$\bar{Z}$	垂直于焊缝的坐标	图3
$\bar{Z}_1, \bar{Z}_2$	焊缝母线的终点(实际端部)	
α	$(\frac{1-\nu^2}{4K}) \cos \beta$	
α	形状系数	
β	展开图上焊缝的倾斜角	
ε	应变	
ε_{PL}	塑性应变分量	
ε_v	比较应变	(5.10)
ε_{vFth}	在屈服点处, 理论上的比较应变	
ε_{vFgBm}	在屈服点处, 测定的比较应变	
$\varepsilon_\eta, \varepsilon_\xi$	测定的应变	(5.10)
ξ	焊缝区的无量纲坐标	图3
η	焊缝区的无量纲坐标	图3

续上表

θ	断面和任意点径向位置之间夹角	(3.7)
λ	$\frac{l}{2} \cdot \frac{h}{a}$	(3.32)
ν	泊桑系数, 计标时取 0.3	
σ_B	抗拉强度	(5.2)
σ_F	屈服强度	(5.1)
σ_{NV}	名义比较应力	(3.45)
σ_{N-Sch}	热膨胀试验时, 名义比较应力	图 5.2
σ_{Nzul}	许用名义应力	(5.3)
σ_v	比较应力	(3.44)
σ_{zul}	许用应力	(5.1)
σ_φ, σ_z	γ, φ, z 坐标的应力	
σ_η, σ_ξ	γ, η, ξ 坐标的应力	
φ	圆柱坐标	图 3
Φ	转折角	图 1

1.0 任务的提出：

由于生产技术上的原因，管道上的弯曲部分往往不是光滑过渡的弯头，而是多边形（虾米腰形）和斜接管式弯头。前者是由一些薄壁管段组成的，而后者则仅由二段斜管段按要求的角度组成。这两种弯头多数是焊接结构。最简单的结构是用管子按一定角度斜切一刀得到椭圆断面，再将其对接起来，沿该椭圆断面线焊接而成。下面将这种断面交线称为焊缝区。

在设计这类弯头而作的计标中，必须把重点放在焊缝区的应力计标上。从许多事故〔1〕中可知，椭圆焊缝区的两个峰顶（即弯曲半径较小的那二端）随着转折角的变大使应力集中也随之增加。所以对于较大的转折角，要在椭圆焊缝上设置加强圈。

目前，还没有一种计标方法能可靠地求出各种转折角弯头的封闭的椭圆焊缝上的应力大小及变形情况。所能采用的计标方法均是近似介法，多少都有一些粗糙的忽略，而这些忽略的影响往往未用实验来作充分的验证。

本文研讨在内压作用下，未设加强圈的，可自由变形的斜接管弯头的情况，并以封闭系统（既没有轴向应力平衡）为前提。

首先，介绍一下迄今在实践中使用的计标方法。然后，将计标结果与一些弯头试件通过应变测量获得的结果进行比较，并讨论其间的差异。将试件扩大至局部塑变范围，应能求出削弱系数，它适用于绝大多数工程上有可能的弯头尺寸。本文最后叙述斜接管弯头在多变载荷下的性能试验。

斜接管弯头在内压作用下焊缝区的性能，已由文献〔2〕作了理论分析，文献〔3〕作了理论探讨和实验研究。

2.0 应力状态的定性研究

内压下的多边形弯头和斜接管弯头的管段中，除了作用着起始薄膜应力外，在焊缝区还迭加有与椭圆形焊缝的距离成反比的应力。这种应力是由横向力和横向力矩引起的，它们沿焊缝线起作用（如果把斜接管弯头沿母线切开，就可想象出这一情况）。下面把这两种作用力称为局部载荷。

图1为 $\Phi = 30^\circ$ 的斜接管弯头的一侧。在内压作用下，管子直段中产生起始薄膜力 K_φ 和 K_z ，在内压作用下，通过管子的斜接切面上，将在焊缝处产生拉脱力 S_ξ ，和 $S_{\xi\eta}$ 。

这两个力将使焊缝区变形，同时由于焊缝线上形成的棱角是刚性的，这就可以假定：管子壳体中性面的两连接母线间有交角，在靠近焊缝线处亦无应力存在，在内压作用于斜接管弯头后仍保持不变。这样就在 ξ 方向上产生一个局部力矩。此外，为了满足中性切面始终保持平面的要求，出现有相应产生的力和力矩。

计标的目的在于确定焊缝线上局部载荷（力和力矩），求出在它们作用下的应力分布情况。

文献〔4〕把焊缝看作椭圆形梁，其上作用着两连接管段的剪力，把它按单位长度分布，把单段管子这样连起来处理，并加上焊缝区的力就产生了图2，它示出了焊缝区的定性受力情况。

3.0 文献中介绍的计标方法

如前所述，内压作用下斜接管弯头的焊缝区的应力由两部分组成。

1. 直管段的起始薄膜应力。

2. 由相应产生的力和力矩在焊缝线上造成的局部应力。

进一步研究之前，有必要对管段相交部分（即焊缝区）的几何结构作一些说明。直管段中性面各点位置用 φ ， Z 坐标表示，如图3所示。

按图3所示， η 是相交的椭圆线上无因次弧长， ξ 是管子展开成平面后，标在其上的各点与相交的椭圆线之间的无因次距离。与任意斜接管弯头的转折角 Φ 和P点方位 φ 有关的焊缝倾角用 β 表示。

对于展开成平面的管段上的焊缝来说，有下列公式可用：

$$Z = a \cdot \operatorname{tg} \Phi \cdot \cos \varphi$$

由此得到：

$$\frac{dz}{a \cdot d\varphi} \cong -\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \Phi \cdot \sin \varphi \quad (3.1)$$

从而得：

$$\sin \beta = \frac{t_g \Phi \cdot \sin \varphi}{\sqrt{1 + t_g^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (3.2)$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + t_g^2 \Phi \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (3.3)$$

3.10 起始薄膜应力

斜接管弯头由二段斜接段组成，在管段上，离开焊缝足够远处，由内压力产生的起始薄膜应力如下：

$$\sigma_{\varphi} = \frac{P \cdot a}{h} \quad \sigma_z = \frac{P \cdot a}{2 \cdot h} \quad (3.4)$$

由此得到，对于 φ ，Z 坐标系统单位长度上薄膜应力为：

$$K_{\varphi} = P \cdot a \quad K_z = \frac{P \cdot a}{Z} \quad K_{\varphi z} = 0 \quad (3.5)$$

而对于 η ， ξ 坐标系统为：

$$\left. \begin{aligned} K_{\eta} &= K_z \cdot \sin^2 \beta + K_{\varphi} \cdot \cos^2 \beta \\ K_{\xi} &= K_z \cdot \cos^2 \beta + K_{\varphi} \cdot \sin^2 \beta \\ K_{\xi \eta} &= (K_{\varphi} - K_z) \sin \beta \cdot \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

3.11 椭圆焊缝上的剪切力分量

相交面上法线 n 和点 P 方位的径线间夹角若为 θ ：

$$\sin \theta = \frac{\cos \Phi}{\cos \beta} \quad \cos \theta = \sin \Phi \cdot \cos \varphi \quad (3.7)$$

从应力 $\gamma = (\text{diag } K_{\varphi}, K_z)$ 中得到单位长度上剪力矢量的分量 $\vec{\sigma} (S_L, S_q, S_{\eta})$ ，与相交面垂直的 $S_L = K_{\xi} \cdot \sin \theta$ 在相交面内，与 η 方向垂直的 $S_q = K_{\xi} \cdot \cos \theta$ 在 τ 方向上的 $S_{\eta} = K_{\xi \eta}$

由(3.6)和(3.7)式,得:

$$\left. \begin{aligned} S_L &= (K_z \cos^2 \beta + K_\varphi \sin^2 \beta) \frac{\cos \Phi}{\cos \beta} \\ S_q &= (K_z \cos^2 \beta + K_\varphi \sin^2 \beta) \cdot \sin \Phi \cdot \cos \varphi \\ S_\eta &= (K_\varphi - K_z) \sin \beta \cdot \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

(3.8)式中的 S_L, S_q, S_η 都已用倾斜截面处的厚度 $\frac{h}{\sin \theta}$ 简化。

3.20 按EßLINGER方法焊缝区应力计标

据文献〔4〕的定性研究, EßLINGER方法为某管道制造公司推行的一种计标方法(与文献〔5〕〔6〕相似), 详见文献〔7〕。

3.21 计标过程介绍

多边形弯头的转折角通常为 $\Phi \leq 12^\circ$ 。按照EßLINGER的观点: 在这种情况下, 焊缝的椭圆曲线可按圆形曲线来考虑。

图2所示的, 在焊缝平面上的合成剪力 $K_R\varphi$, 和 K_{Rz} , 对于按环形梁考虑的椭圆形焊缝来说, 其作用犹如外力, 应当被考虑进去, 并可分介为与 $\varphi = 90^\circ$ 轴垂直分力 H 和水平分为 V 。EßLinger发现, 对 $\varphi = 0^\circ$ 的轴线来说, 这一负荷是对称的, 而对于 $\varphi = 90^\circ$ 的轴线来说, 这一负荷是交变的。即环形梁是一个简单的静不定问题, 为了计标其内力和弯矩, 只需取出 $\pm$ 弧长就可以了, 它是有固定的对称轴。在 H 和 V 负荷外, 在交点 K 还受到不定的横向力 Q 的作用。 Q 当外载荷对称时, 在 K 点可视为定值, 可由最初的静不定环形梁变成静定载荷条件了。沿圆弧各点的外力进行积分, 可得到圆弧上任意点 P 处的内力 R_H 和 R_V , 其合力平行于焊缝线。

同样的, 可得到由外力合成的弯矩 M_0 , 在此弯矩作用下, 环形梁趋于椭圆。

此外, EßLINGER还考虑到内压会抵销上述的这种环形梁的变形, 因而实际的弯矩 M_0 缩小为 M 法向力 R 和弯矩 M 将由焊缝两侧宽为 b 的条带来承受。

还应指出，在采用机械的计标方法时，本方法可用于 $\Phi > 12^\circ$ 的场合；此时，同时首先确定外力，然后确定环形梁中由此合成的内力和弯矩。

3.22 按 EßLINGER 方法计标结果的应用 ($\Phi \leq 12^\circ$)

按环形梁处理的焊缝区，除了(3.6)中的薄膜应力外，还要加上由周向薄膜力

$$R = P \cdot a^2 \cdot \sin \Phi \cdot \cos \varphi \quad (3.9)$$

引起的周向弯矩。

$$M = \frac{h^3}{h^3 + \frac{3P}{2E} \cdot a^3} \cdot \frac{1}{12} P \cdot a^3 \cdot \sin^3 \Phi$$

$$(4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi) \quad (3.10)$$

承受薄膜力的面积，按 EßLINGER 用宽度

$$b = \frac{\sqrt{h \cdot a}}{0.7} \quad (3.11)$$

$$\text{计标得: } F = h \cdot b = \frac{\sqrt{h^3 \cdot a}}{0.7} \quad (3.12)$$

$$\text{截面模数: } W = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{a \cdot h^2}{2.49} \quad (3.13)$$

从而， $\Phi \leq 12^\circ$ 的斜接管弯头在焊缝区受到的周向总应力为：

$$\sigma_T = \frac{K_T}{h} + \frac{R}{F} + \frac{M}{W}$$

代入得到：

$$\sigma_{\eta} = \frac{P \cdot a}{h} \left(\frac{1 + \frac{1}{2} \tan^2 \Phi \sin^2 \varphi}{1 + \tan^2 \Phi \sin^2 \varphi} + 0.245 \frac{a}{h} \sin^3 \Phi \right. \\ \left. \frac{4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi}{1 + \frac{3P}{2E} \left(\frac{a}{h} \right)^3} + 0.7 \left(\frac{a}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \Phi \cdot \cos \varphi \right) \quad (3.14)$$

母线上最高周向应力在 $\varphi = 0^\circ$ 处：

$$\sigma_{\eta a} = \frac{Pa}{h} \left(1 + 0.245 \frac{a}{h} \sin^3 \Phi \frac{1}{1 + \frac{3P}{2E} \left(\frac{a}{h} \right)^3} \right. \\ \left. + 0.7 \left(\frac{a}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \Phi \right) \quad (3.15)$$

3.30 按按 Van der Neut 方法焊缝区应力计标

A. Van der Neut 提出了一个计标方法，它以薄壳理论为出发点，并考虑了对轴向应力的作用。

3.31 计标过程介绍

a. 根据圆柱壳体理论 [9]，已知圆柱体在旋转对称载荷 q 和 m 作用下的变形情况和应力分布的精确介法。此时，所有的对 φ 的导数均为零，只有对 Z 的导数才存在。点 $Q(\varphi, Z)$ （见图 3a）的位移只与 q ， m 和 Z 有关。

因为 q ， m 随 φ 变化很小，因此，其近似介可以认为是：

在 P 点 $(\varphi_P, 0)$ 处的局部载荷 q_P, m_P 的作用下， Q 点 (φ_P, Z) 的位移与在旋转对称载荷 q_P 和 m_P 作用下的位移相同，其误差很小。

b. 壳体上各点相对于焊缝的位置，用坐标 η, ξ 表示，焊缝的各点的倾斜角用 β 表示（图 3b）。 β ， q 和 m 随 φ 有很小的变化，因此也可把下述情况作为近似介： Q 点 (η_Q, ξ_Q) 的位移只与局部载荷 q_P, m_P 和 β_P 有关。

c. 按 Van der Neut 方法，首先把 q_P, m_P 和 β_P 看作常

量。这就是说：沿展开线为螺旋线的圆柱形管子断面上，作用有沿断面线的横向力 q_P 和弯矩 m_P 。对于这种载荷下的应力状态和变形情况可借助于圆柱壳体理论的微分方程来计标。

d. 相对于给出的数据，可以忽略不计 q ， m 和 β 随 φ 的很小变化。

在进一步简化中，Van der Neut把图3b椭圆焊缝线上的各点看作是另一螺旋形焊缝上的各点，此时可假定这两种断面情况下，Q点 (φ, Z) 的位移 u ， $\bar{v}$ ， $\bar{w}$ 在P点 (ρ_P) 的局部载荷 m_P 和 q_P 作用下，其大小是一样的。对属于螺旋形断面上位移参数 u ， $\bar{v}$ ， $\bar{w}$ 的薄膜应力进行计标，并加到圆柱壳体的所取的单元上。

从椭圆焊缝线附近取出的单元，只考虑起始薄膜应力作用是不能平衡的。还必然要有内力和内弯矩存在才行。

为了确定内力和内弯矩，Van der Neut 首先给这个单元以一外力和外弯矩系统，使之保持平衡。这一假设的外加系统由另一大小相等方向相反的系统来抵销，即通过适当的力 $L(\eta)$ ， $T(\eta)$ 在焊缝线上形成平衡系统。

根据Van der Neut 的简设和简化，在与轴线成倾斜地切割的壳体（其焊缝受到 $q(\varphi)$ ， $m(\varphi)$ ， $L(\varphi)$ ， $T(\varphi)$ 的作用）的焊缝区中，应力和变形状态相等于沿螺旋线断面受到 q ， m 作用的壳体

上的应力和变形状态，其误差在 $(\frac{h}{a})^{\frac{1}{2}}$ 数量级内。

3.32 按Van der Neut 方法计标结果在斜接管弯头上应用。

在螺旋线断面的壳体上，由局部载荷 q ， m 产生的附加薄膜应力：

$$\sigma_{\eta z} = \frac{E}{R} u(\varphi, \xi) \quad R_1 = \frac{a}{\cos^2 \beta} \quad (3.16)$$

弯矩：

$$m_{\xi\tau} = \frac{1}{12} E(1-\nu^2)^{-1} h^3 \cdot a^2 \frac{d^2 u}{d\xi^2}$$

$$m_{\tau\xi} = -\nu m_{\xi\tau} \quad (3.17)$$

由弯矩引起：

$$\sigma_{\xi i a z} = \mp \frac{m_{\xi\eta}}{h^2} \cdot 6 \quad (3.18)$$

其中：

a —— 外壁

i —— 内壁

考虑到受阻的横向应变，还要加上：

$$\sigma_{\eta i a 3} = \mp \nu \cdot \frac{m_{\xi\eta}}{h^2} \cdot 6 \quad (3.19)$$

径向位移 u 为：

$$u = \frac{1}{E \cdot h} \left(\frac{1-\nu^2}{K} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos^{-2} \beta \cdot e^{-\alpha \xi} [m(\cos \alpha \xi - \sin \alpha \xi) - \left(\frac{4K}{1-\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos^{-4} \beta \cdot a \cdot q \cdot \cos \alpha \xi] \quad (3.20)$$

其中：

$$K = \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} ; \quad \alpha = \left(\frac{1-\nu^2}{4K} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos \beta \quad (3.21)$$

边界条件如下：

1. 椭圆断面必须保持平整。
2. 由于是对称的，椭圆断面上没有剪切应力。
3. 母线在椭圆焊缝线上的切线保持为水平（对于 $\xi=0$

$$\frac{d u}{d \xi} = 0 \}$$

第一个边界条件，按 Van der Neut 要求有一 Z 方向的附加力 $F(\varphi)$ ，从而与式 (3.5) 所表示的一般情况不同，要表示为：

$$\left. \begin{aligned} K_{\varphi} &= P \cdot a \\ K_z &= \frac{P a}{Z} + F(\varphi) \\ K_{\varphi z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

其中：

$$F(\varphi) = \frac{1}{2} P a \operatorname{tg}^2 \Phi \cdot \cos Z \varphi \quad (3.23)$$

式 (3.22) 的应力情况，会在断面上产生剪力，这些剪力可看作外力，因为按第二个边界条件，断面上应是没有剪应力的。

这里，Van der Neut 不按式 (3.8) 采用倾斜断面上出现的剪力分量，而采用螺旋形断面上的剪力分量，因为此时径向方位始终垂直于剪力法线，从而可用 $S_{\tau} = K \cdot K_{\xi \tau}$ 和 $S_{\xi} = K_{\xi}$ 代入。边缘局部横向力 q 则可用式 (3.22) 和式 (3.6) 求出：

$$\begin{aligned} q &= -K_{\xi} \sin \theta \cdot \cos \theta \\ &= -\frac{1}{2} P \cdot a \cdot \operatorname{tg} \Phi \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.24)$$

根据第三个边界条件可得到边缘局部弯矩：

$$m = -\frac{1}{4} P \cdot a^2 \cdot \operatorname{tg} \Phi \left(\frac{4K}{1-\nu^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \cos \varphi \quad (3.25)$$

将式 (3.24) 和式 (3.25) 代入式 (3.20)，则得：

$$\begin{aligned} u(\varphi, \xi) &= 0.354 \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{P \cdot a}{h} \cdot a \cdot \operatorname{tg} \Phi \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \beta} \left(\frac{1-\nu^2}{K} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\quad e^{-\alpha \xi} \cdot (\cos \alpha \xi + \sin \alpha \xi) \end{aligned} \quad (3.26)$$

再结合式 (3.17) 得：

$$m_{\xi} \eta = 0.029 \frac{P \cdot h^2}{1 - \nu^2} \cdot \operatorname{tg} \Phi \cdot \cos \varphi \left(\frac{1 - \nu^2}{K} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-\alpha \xi} \\ (\sin \alpha \xi - \cos \alpha \xi) \quad (3.27)$$

3.33 应力状态的综合

向：

起始薄膜应力和附加横向力的影响：

$$\sigma_{\eta_1} = \frac{P \cdot a}{h} \left\{ \frac{1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \Phi \cdot \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \Phi \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \Phi \cdot \sin^2 \varphi} \right\} \quad (3.28a)$$

位移 $u(\rho, \xi)$ 造成的薄膜应力的影响：

介式 (3.26) 和式 (3.16) 组成方程式：

$$\sigma_{\eta_2} = 0.643 \frac{P \cdot a}{h} \left(\frac{a}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{tg} \Phi \cdot \cos \varphi \cdot e^{-\alpha \xi} \\ (\sin \alpha \xi + \cos \alpha \xi) \quad (3.28b)$$

由弯矩 $m_{\xi \tau}(\varphi, \xi)$ 引起的受阻横向应变的影响：

介式 (3.27) 和式 (3.19) 组成方程式：

$$\sigma_{\eta_3, a} = \pm 0.35 \frac{P \cdot a}{h} \left(\frac{a}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{tg} \Phi \cdot \cos \varphi \cdot e^{-\alpha \xi} \\ (\sin \alpha \xi - \cos \alpha \xi) \quad (3.28c)$$

ξ 向：

起始薄膜应力和附和横向力影响：

介式 (3.22) 和式 (3.6) 组成方程式：

$$\sigma_{\xi_1} = \frac{P \cdot a}{h} \left\{ \frac{\frac{1}{2} + \operatorname{tg} \Phi \cdot \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \Phi \cdot \cos^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \Phi \cdot \sin^2 \varphi} \right\} \quad (3.28d)$$