高等院校数学专业教材

《常微分方程》
配套教学参考书

主编　黄江平

航空工业出版社

高等院校数学专业教材

常微分方程

配套教学参考书

主　编　黄江平
副主编　夏　璇
　　　　麦丽嫦
　　　　张春泳

湛江师院图书馆惠存，

数学系
2002.11.

航空工业出版社

内 容 提 要

本书是中山大学王高雄、周之铭等编写的《常微分方程》一书(由高等教育出版社出版,1998 年 9 月第二版)的配套教学参考书。本教学参考书编有《常微分方程》教材第一章到第六章的学习要点及全部习题的详细解答。有的题目,还采用了多种解法,以启发读者思路,在解题步骤上,叙述尽量详细具体。

图书在版编目(CIP)数据

《常微分方程》配套教学参考书/黄江平主编 .—北京:航空工业出版社,2001.8
ISBN 7-80134-905-9

Ⅰ.常 ... Ⅱ.黄 ...Ⅲ.常微分方程—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O715.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 057248 号

航空工业出版社出版发行
(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)
南昌航空工业院印刷厂印刷 全国各地新华书店经售
2001 年 8 月第 1 版 2001 年 8 月第 1 次印刷
开本:787×1092 1/16 印张:11.25 字数:281 千字
印数:1—1000 定价:28 元

前　言

中山大学王高雄、周之铭等编写的《常微分方程》一书(1998 年 9 月第 2 版)由高等教育出版社出版,很多综合大学和师范院校数学专业都采用其作为教材,也有不少高等院校在招收研究生时,把它作为考生的一门指定参考书。

为了在校本科生更好地学习这门课程,方便报考相关专业研究生的同学深入学习,方便教师备课;同时考虑到广大函授生、夜大生在既缺乏老师指导,又没有同学可以磋商情况下,要独立完成学习任务,确有一定困难,我们编写了这本与教材配套的教学参考书。

本教学参考书编有教材第一章到第六章的学习要点及全部习题的详细解答。有的题目,还采用了多种解法,以启发读者思路,在解题步骤上,叙述尽量详细具体。编者由衷地期望读者能深入钻研教材,掌握基本理论,通过独立思考作出习题的解答,在此基础上,再同书上的解答进行比较对照,提高解题能力。

由于编者水平有限,本书对一些问题的解答可能不是最佳的,错误之处也在所难免,我们衷心希望使用本书的读者提出宝贵的批评和意见。

在本书的出版过程中,始终得到湛江师范学院数学系领导的热情关怀与指导。同时也得到南昌航空工业学院印刷厂领导的大力支持和帮助,在此一并表示衷心的感谢。

编　者

2001 年元月

目　　录

第一章　绪　论

1. 指出下面微分方程的阶数,并回答是否为线性的:

(1) $\frac{dy}{dx}=4x^2-y$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}-(\frac{dy}{dx})^2+12xy=0$

(3) $(\frac{dy}{dx})^2+x\frac{dy}{dx}-3y^2=0$

(4) $x\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+3xy=\sin x$

(5) $\frac{dy}{dx}+\cos y+2x=0$

(6) $\sin(\frac{d^2y}{dx^2})+e^y=x$

解:(1) 一阶线性;

(2) 二阶非线性;

(3) 一阶非线性;

(4) 二阶线性;

(5) 一阶非线性;

(6) 二阶非线性。

2. 试验证下面函数均为方程$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$的解,这里 $\omega>0$ 是常数。

(1) $y=\cos\omega x$

(2) $y=C_1\cos\omega x$ (C_1 是任意常数)

(3) $y=\sin\omega x$

(4) $y=C_2\sin\omega x$ (C_2 是任意常数)

(5) $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$ (C_1,C_2 是任意常数)

(6) $y=A\sin(\omega x+B)$ (A,B 是任意常数)

解:(1)

$$y'=-\omega\sin\omega x$$

$$y''=-\omega^2\cos\omega x$$

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=-\omega^2\cos\omega x+\omega^2\cos\omega x=0$$

$\therefore$ $y=\cos\omega x$ 是方程$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$的解

(2)

$$y'=-C_1\omega\sin\omega x$$

$$y''=-C_1\omega^2\cos\omega x$$

$$\therefore\quad y''+\omega^2y=-C_1\omega^2\cos\omega x+\omega^2C_1\cos\omega x=0$$

$\therefore\quad y = C_1\cos\omega x$ 是方程的解。

(3)、(4)、(5)略

(6)
$$y' = A\omega\cos(\omega x + B)$$
$$y'' = -A\omega^2\sin(\omega x + B)$$

$$\therefore\quad y'' + \omega^2 y = -A\omega^2\sin(\omega x + B) + \omega^2 A\sin(\omega x + B) = 0$$

$\therefore\quad y = A\sin(\omega x + B)$ 是方程的解。

3. 验证下列各函数是相应微分方程的解

(1) $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $xy' + y = \cos x$

(2) $y = 2 + C\sqrt{1-x^2}$, $(1-x^2)y' + xy = 2x$ (C 是任意常数)

(3) $y = ce^x$, $y'' - 2y' + y = 0$ (C 是任意常数)

(4) $y = e^x$, $y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}$

(5) $y = \sin x$, $y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x - \cos x = 0$

(6) $y = -\dfrac{1}{x}$, $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$

(7) $y = x^2 + 1$, $y' = y^2 - (x^2+1)y + 2x$

(8) $y = -\dfrac{g(x)}{f(x)}$, $y' = \dfrac{f'(x)}{g(x)}y^2 - \dfrac{g'(x)}{f(x)}$

解:(1) $\because$
$$y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

$$xy' + y = \frac{x\cos x - \sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} = \cos x$$

$\therefore\quad y = \dfrac{\sin x}{x}$ 是 $xy' + y = \cos x$ 的解

(2) $\because$
$$y' = -\frac{cx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(1-x^2)y' + xy = (1-x^2)\left(-\frac{cx}{\sqrt{1-x^2}}\right) + 2x + cx\sqrt{1-x^2} = 2x$$

$\therefore\quad y = 2 + c\sqrt{1-x^2}$ 是 $(1-x^2)y' + xy = 2x$ 的解

(3) $\because$
$$y' = ce^x,\ y'' = ce^x$$
$$y'' - 2y' + y = ce^x - 2ce^x + ce^x = 0$$

$\therefore\quad y = ce^x$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解

(4) $\because$
$$y' = e^x$$
$$y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x - 2e^{2x} = e^xe^{-x} + e^{2x} = 1 - e^{2x}$$

$\therefore\quad y = e^x$ 是 $y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}$ 的解。

(5) $\because$
$$y' = \cos x$$
$$y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x - \cos x = \cos x + \mathrm{six}^2 x - 2\sin^2 x + \sin^2 x - \cos x = 0$$

(6) $\because$
$$y' = \frac{1}{x^2}$$

$$左 = x^2y' = x^2\cdot\frac{1}{x^2} = 1$$

$$右 = x^2y^2 + xy + 1 = x^2\cdot(-\frac{1}{x})^2 + x(-\frac{1}{x}) + 1 = 1$$

$$左 = 右$$

∴ $y = -\frac{1}{x}$是$x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$的解

(7) ∵

$$y' = 2x$$

$$y^2 - (x^2+1)y + 2x = x^4 + 2x^2 + 1 - (x^2+1)(x^2+1) + 2x$$

$$= 2x = y'$$

∴ $y = x^2 + 1$是$y' = y^2 - (x^2+1)y + 2x$的解。

(8)

$$y' = -\frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)}$$

$$\frac{f'(x)}{g(x)}y^2 - \frac{g'(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{g(x)}\cdot(-\frac{g(x)}{f(x)})^2 - \frac{g'(x)}{f(x)}$$

∴

$$y = -\frac{g(x)}{f(x)}是y' = \frac{f'(x)}{g(x)}y^2 - \frac{g'(x)}{f(x)}的解$$

4. 给定一阶微分方程$\frac{dy}{dx} = 2x$

(1) 求出它的通解；

(2) 求通过点(1,4)的特解；

(3) 求出与直线$y = 2x + 3$相切的解；

(4) 求出满足条件$\int_0^1 y\mathrm{d}x = 2$的解；

(5) 绘出(2),(3),(4)中的解的图形。

解:(1) 分离变量得

$$\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$$

两边积分得通解

$$y = x^2 + c \ (c为任意常数)$$

(2) 由题意可得$x = 1$时$y = 4$

∴

$$4 = 1^2 + c$$

∴

$$c = 3$$

故所求的特解为

$$y = x^2 + 3$$

(3) 由$y' = 2$代入$y' = 2x$

∴

$$x = 1$$

∴

$$y = 5$$

即切点为(1,5)

再代入$y = x^2 + c$,即

$$5 = 1^2 + c$$

∴

$$c = 4$$

故所求的解为

$$y = x^2 + 4$$

(4) 由$\int_0^1 (x^2 + c)\mathrm{d}x = 2$

得

$$\frac{1}{3} + c = 2$$

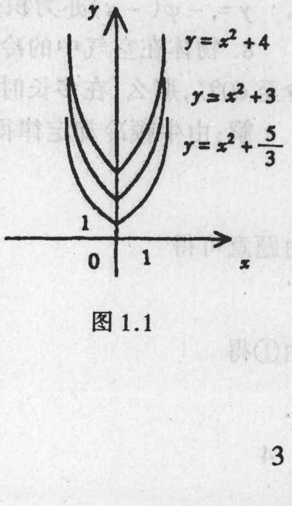

图 1.1

$$\therefore \qquad c=\frac{5}{3}$$

故所求的解为
$$y=x^2+\frac{5}{3}$$

(5) 见图 1.1

5. 求下列两个微分方程的公共解：

(1) $y'=y^2+2x-x^4$

(2) $y'=2x+x^2+x^4-y-y^2$

解：
$$y^2+2x-x^4=2x+x^2+x^4-y-y^2$$

即
$$(y-x^2)(2y+2x^2+1)=0$$

得
$$y-x^2=0 \text{ 或 } 2y+2x^2+1=0$$

经验证 $2y+2x^2+1=0$ 不是解 $y-x^2=0$ 为公共解。

6. 求微分方程 $y'+xy'^2-y=0$ 的直线积分曲线。

解：设 $y=kx+b$ 为其直线积分曲线

代入方程得
$$k+k^2x-kx-b=0$$

即
$$(k^2-k)x+k-b=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-k=0 \\ k-b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ b=0 \end{cases},\quad \begin{cases} k=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$\therefore$ 所求直线积分曲线为 $y=0$ 或 $y=x+b$

7. 微分方程 $4x^2y'^2-y^2=xy^3$，证明其积分曲线关于坐标原点(0,0)成中心对称的曲线，也是此微分方程的积分曲线。

证：设 $y=\varphi(x)$ 为积分曲线，它关于坐标原点(0,0)成中心对称的曲线为：
$$-y=\varphi(-x)$$

即
$$y=-\varphi(-x)$$

即有
$$\varphi(-x)=-\varphi(x)$$

将 $y=-\varphi(-x)$ 代入方程
$$4x^2\varphi^2(-x)-\varphi^2(-x)=x\varphi^3(-x)$$

即
$$4x^2\varphi^2(x)-\varphi^2(x)=x\varphi^2(x) \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$\because$ $y=\varphi(x)$ 为积分曲线，$\therefore$ ①为恒等式。

$\therefore$ $y=-\varphi(-x)$ 亦为积分曲线。

8. 物体在空气中的冷却速度与物体和空气的温差成比例，如果物体在 20 分钟内由 100℃ 冷至 60℃，那么，在多长时间内，这个物体的温度达到 30℃？假设空气的温度为 20℃。

解：由牛顿冷却定律得
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-k(u-20) \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

由题意可得
$$u|_{t=0}=100 \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$
$$u|_{t=20}=60 \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

由①得
$$\frac{\mathrm{d}(u-20)}{(u-20)}=-k\mathrm{d}t$$

$\therefore$
$$\ln(u-20)=-kt-c_1$$

$\therefore$ $$u-20=e^{-kt+c_1}=ce^{-kt}\quad(c=e^{c_1})$$

由②得 $$80=ce^0$$

$\therefore$ $$c=80$$

$\therefore$ $$u-20=80e^{-kt}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ④$$

由③得 $$60-20=80e^{-k\cdot 20}$$

即 $$2^{-1}=e^{-k\cdot 20}$$

两边取对数得 $$-\ln 2=-20k$$

$\therefore$ $$k=\frac{\ln 2}{20}$$

则④变为 $$u-20=80e^{-\frac{\ln 2}{20}t}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ⑤$$

求多长时间物体温度达到30℃得方程

$$30=20+80e^{-\frac{\ln 2}{20}t}$$

$$2^{-3}=e^{-\frac{\ln 2}{20}t}$$

取对数得 $$-3\ln 2=-\frac{\ln 2}{20}t$$

$\therefore$ $$t=60(\text{分})$$

9. 试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程：

(1) 曲线上任一点的切线与该点的向径夹角为零；

(2) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴之间的部分等于定长 l；

(3) 曲线上任一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积都等于常数 a^2；

(4) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴间的部分被切点等分；

(5) 曲线上任一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方；

(6) 曲线上任一点的切线的纵截距是切点的横坐标的等差中项；

(7) 曲线上任一点的切线的斜率与切点的横坐标成正比。

解:(1) 由题意知 $$y'=\frac{y}{x}$$

(2) $\because$ 过点(x,y)的切线的横截距分别为 $x-\dfrac{y}{y'}$和$y-xy'$

$\therefore$ 微分方程为 $$(y-xy')^2+\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2=l^2$$

(3) $$\frac{1}{2}\left|(y-xy')\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=a^2$$

(4) $$\left|(y-xy')\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=2a^2$$

由题意得 $$\frac{y}{x}=-y'$$

即 $$xy'+y=0$$

(5) 由题意即得

$$y-xy'=x^2$$

(6) 由题意即得

$$y - xy' = \frac{x+y}{2}$$

(7) 由题意即得

$$y' = kx\ (k > 0, \text{常数})$$

第二章　一阶微分方程的初等解法

学习要点

在这一章里,我们将讨论一阶方程

$$F(x,y,y')=0$$

的初等解法的若干类型,归纳起来就是:

1. 若方程能由 y' 解出,方程取形式为

$$y'=f(x,y) \quad \text{或} \quad M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

可按第 2.1 ~ 2.3 介绍的方法去求解。

2. 若方程能由 y(或 x)解出

$$y=f(x,y')(\text{或 } x=f(y,y'))$$

则令 $y'=p$ 后,把问题化为求解关于 p 与 x(或 y)之间的一阶方程

$$p=f_x'(x,p)+f_p'(x,p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{2·65}$$

$$(\text{或}\frac{1}{p}=f_y'(y,p)+f_p'(y,p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}) \tag{2.72}$$

若按第 2.1 ~ 2.3 的办法求得方程(2.65)(或(2.72))的通解为

$$\Phi(x,p,c)=0 \quad (\text{或 } \Phi(y,p,c)=0)$$

则它与 $y=f(x,p)$(或 $x=f(y,p)$)一起构成原方程的通解的参数形式(见 2.4.1)。

3. 若方程不能由 y', x 或 y 解出,对于形如

$$F(x,y')=0 \text{ 或 } f(y,y')=0$$

的方程,可按 2.4.2 介绍的方法处理:引入参数 t,将方程表示为参数形式,再注意到关系式 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$,就将问题转化为求解关于 y(或 x)关于 t 的一阶方程,且其导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$(或 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$)已表示为 t 的已知函数,最后的工作就是求积分的问题。

所有上列情形都归结到形如

$$y'=f(x,y) \quad \text{或} \quad M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

的方程的求解问题,在 § 2·1 ~ § 2·3 里,我们主要介绍五种类型的方程(变量分离方程,齐次方程,线性方程,伯努利方程及恰当方程)的初等解法。实际上作为基础的不外是变量分离方程和恰当方程,其他类型的方程均可借助变量变换或积分因子化为这两种类型,这可简略地表示如图 2.1。

历史上,数学家莱布尼兹(Leibnitz)曾经专门从事于利用变量变换的办法解决一阶微分方程的求解问题,而欧拉(Euler)则试图利用积分因子的办法统一处理这一问题。但实践证明,单纯采用一种方法各有其不便和困难。因此,我们必须对具体问题作具体的分析,分别不同情况采用不同的方法。

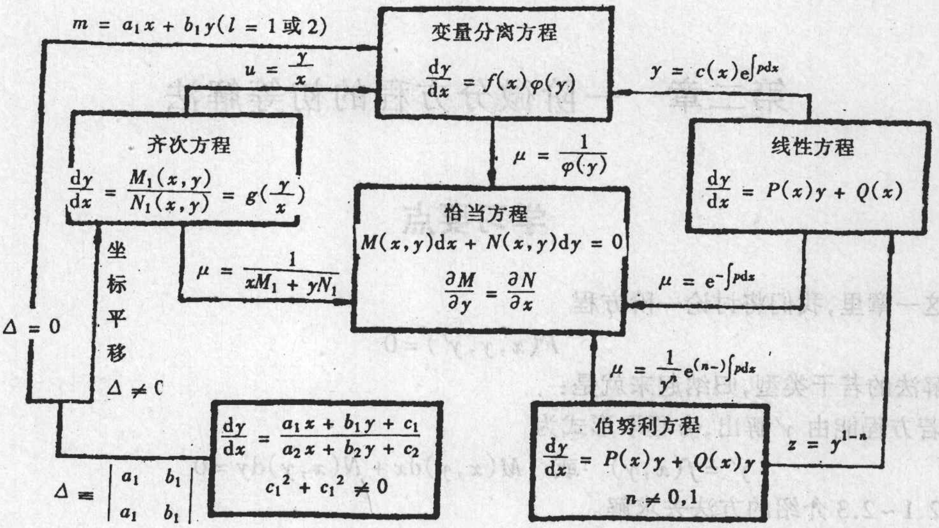

图 2.1

熟悉各种类型方程的解法,正确而又敏捷地判断一个给定的方程属于何种类型,从而按照所介绍的方法进行求解,这自然是最基本的要求。但仅仅能做到这一点还不够,因为我们所遇到的方程未必都恰好是本章所介绍过的方程类型,因此还要求注意学习解题的技巧,从中总结经验,培养自己的机智灵活性;还有一点也很重要,就是要善于根据方程的特点,引进适宜的变换,将方程化为能求解的新类型,从而求解。

最后,我们要强调指出:能用初等解法的微分方程是很有限的,例如形式上很简单的黎卡提(Riccati)方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

一般就没有初等解法(当然,若我们有办法找到方程的一个特解 $\tilde{y}(x)$,则经变换 $y = z + \tilde{y}$后,方程就变为伯努利方程,因而可解)。这一事实为法国数学家刘维尔(Liouville)在 1841 年所证明,这就促使人们寻求别的方法来研究微分方程的问题。

2.1 变量分离方程与变量变换

习 题 2.1

求下列方程的解:

1. $\frac{dy}{dx} = 2xy$,求满足初始条件:$x = 0, y = 1$ 的特解。

解:分离变量 $$\frac{dy}{y} = 2x dx$$

两边积分

$$\ln|y| = x^2 + c_1$$

$$|y| = e^{x^2 + c_1} = e^{c_1} \cdot e^{x^2}$$

$\therefore$ $$y = e^{c_1} \cdot e^{x^2}$$

令 $c = e^{c_1}$ 则 $y = ce^{x^2}$

显然 $y = 0$ 也是解,这正相当于取 $c = 0$ 的情况。

$\therefore$ $y = ce^{x^2}$ 是方程的解。(c 为任意常数)

由初始条件得 $1 = ce^0$ $\therefore$ $c = 1$

故所求的特解为 $$y = e^{x^2}$$

2. $y^2 dx + (x+1)dy = 0$,求满足初始条件:$x = 0, y = 1$ 的特解。

解:将变量分离得 $$-\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x+1}$$

两边积分得 $$\frac{1}{y} = \ln|x+1| + c$$

$\therefore$ 通解为 $$y = \frac{1}{\ln|x+1| + c} \quad (c\text{ 为任意常数})$$

显然 $y = 0$ 也是方程的解。

把 $x = 0, y = 1$ 代入通解得:$c = 1$

故所求的特解为 $$y = \frac{1}{1 + \ln|1 + x|}$$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + y^2}{xy + x^3 y}$

解:方程即为 $$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{y(x + x^3)}$$

分离变量得 $$\frac{y\,dy}{1 + y^2} = \frac{dx}{x(1 + x^2)}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{d(y^2 + 1)}{1 + y^2} = \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2}\right)dx$$

两边积分得 $$\frac{1}{2}\ln|1 + y^2| = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1 + x^2| + c_1$$

$$\ln|1 + y^2| + \ln|1 + x^2| = \ln x^2 + 2c_1$$

$$(1 + y^2)(1 + x^2) = e^{2c_1} x^2 = cx^2 \quad (c = e^{2c_1})$$

故通解为 $$(1 + x^2)(1 + y^2) = cx^2 \quad (c\text{ 为任意常数})$$

4. $(1 + x)y\,dx + (1 - y)x\,dy = 0$

解:分离变量得 $$\frac{1 + x}{x}dx = \frac{y - 1}{y}dy$$

即 $$\left(\frac{1}{x} + 1\right)dx = \left(1 - \frac{1}{y}\right)dy$$

两边积分 $$\ln|x| + x = y - \ln|y| + c$$

$\therefore$ $x - y + \ln|xy| = c$ 显然 $y = 0$ 也是解。

5. $(y + x)dy + (x - y)dx = 0$

解法 1: $$x\,dy - y\,dx + y\,dy + x\,dx = 0$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} + \frac{y\,dy + x\,dx}{x^2 + y^2} = 0$$

即 $$d(\mathrm{arctg}\frac{y}{x})+d(\ln\sqrt{x^2+y^2})=0$$

∴ 通解为 $$\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}=c \quad (c\text{ 为任意常数})$$

解法 2: $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}$为齐次方程

令 $u=\frac{y}{x}$化为 $$x\frac{du}{dx}=\frac{u-1}{u+1}-u=-\frac{u^2+1}{u+1}$$

分离变量 $$\frac{u+1}{u^2+1}du=-\frac{dx}{x}$$

积分 $$\frac{1}{2}\ln(u^2+1)+\mathrm{arctg}u=-\ln|x|+c$$

通解为 $$\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}=c$$

6. $x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2-y^2}$

解: $$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x}=\frac{y}{x}+\sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}$$

令 $u=\frac{y}{x}$ 则 $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$

∴ $$x\frac{du}{dx}+u=u+\sqrt{1-u^2}$$

$$x\frac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x} \quad (1-u^2\neq 0)$$

$$\arcsin u=\ln|x|+c$$

即 $$\arcsin\frac{y}{x}=\ln|x|+c$$

当 $1-u^2=0$ 时,即 $y^2=x^2$ 也是方程的解

∴ 方程的解为 $$\arcsin\frac{y}{x}=\ln|x|+c,\quad y^2=x^2$$

7. $\mathrm{tg}y\,dx-\mathrm{ctg}x\,dy=0$

解: $$\frac{dy}{dx}=\frac{\mathrm{tg}y}{\mathrm{ctg}x} \qquad \frac{dy}{\mathrm{tg}y}=\frac{dx}{\mathrm{ctg}x} \quad (\mathrm{tg}y\neq 0)$$

$$\ln|\sin y|=-\ln|\cos x|+c_1$$

$$\ln|\sin y\cdot\cos x|=c_1$$

∴ $$\sin y\cdot\cos x=e^{c_1}=c$$

当 $\mathrm{tg}y=0$ 时,$y=k\pi, k=0,\pm1,\cdots$

∴ 方程的解为 $$\sin y\cdot\cos x=c \quad (y=k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

8. $\frac{dy}{dx}+\frac{e^{y^2+3x}}{y}=0$

解:方程即为
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^{y^2}\cdot e^{3x}}{y}$$

∴
$$ye^{-y^2}dy=-e^{3x}dx$$
$$\frac{1}{3}d(e^{3x})-\frac{1}{2}d(e^{-y^2})=0$$

9. $x(\ln x-\ln y)dy-ydx=0$

解:
$$x\cdot\ln\frac{x}{y}dy=ydx$$
$$\ln\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

令 $u=\frac{y}{x}$,则
$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

即有
$$-\ln u(u+x\frac{du}{dx})=u$$

分离变量得
$$\frac{\ln u du}{(1+\ln u)u}=-\frac{dx}{x}$$
$$(1-\frac{1}{1+\ln u})d\ln u=-d\ln x$$

两边积分
$$\ln u-\ln(\ln u+1)=-\ln x+c_1$$
$$\ln\frac{ux}{\ln u+1}=c_1$$

∴
$$\frac{ux}{1+\ln u}=e^{c_1}$$

令 $e^{c_1}=\frac{1}{c}$

∴
$$\frac{y}{\ln\frac{y}{x}+1}=\frac{1}{c}$$

∴ 通解
$$\ln\frac{y}{x}+1=cy\qquad(c\text{ 为任意常数})$$

10. $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$

解:
$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{e^y}\qquad\therefore\quad e^y dy=e^x dx$$

两边积分得
$$e^y=e^x+c\quad(c\text{ 为任意常数})$$

作适当的变量变换求解下列方程(11—17):

11. $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$

解:令 $u=x+y$

∴ $\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$ 代入原方程得
$$\frac{du}{dx}-1=u^2$$

分离变量得 $$\frac{du}{1+u^2}=dx$$

两边积分得 $$\operatorname{arctg}u=x+c$$

∴ $$u=\operatorname{tg}(x+c)$$

即 $$x+y=\operatorname{tg}(x+c)$$

∴ 通解为 $$y=\operatorname{tg}(x+c)-x \quad (c\text{ 为任意常数})$$

$$c+x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\text{ 为整数}$$

12. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+y)^2}$

解: $$\frac{dx}{dy}=(x+y)^2$$

由 11 题可得 $$x=\operatorname{tg}(y+c_1)-y$$

∴ $$y+c_1=\operatorname{arctg}(x+y)$$

∴ $$y=\operatorname{arctg}(x+y)+c \quad (c=-c_1)$$

13. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$

解法 1:解方程组 $\begin{cases}2x-y+1=0\\x-2y+1=0\end{cases}$

得 $$x=-\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{3}$$

令 $$\begin{cases}x=X-\frac{1}{3}\\y=Y+\frac{1}{3}\end{cases}\text{ 代入原方程,则有}$$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{2X-Y}{X-2Y}$$

再令 $$u=\frac{Y}{X}\quad\text{即}\quad Y=uX$$

则上式化为 $$\frac{1-2u}{2(u^2-u+1)}du=\frac{dX}{X}$$

两边积分得 $$-\frac{1}{2}\ln|u^2-u+1|=\ln|X|+c_1$$

因此 $$\ln X^2|(u^2-u+1)|=-2c_1$$

即 $$X^2(u^2-u+1)=\pm e^{-2c_1}\xlongequal{\text{记}}c_2$$

代回原变量得

$$Y^2-XY+X^2=c_2$$

$$(y-\frac{1}{3})^2-(x+\frac{1}{3})(y-\frac{1}{3}+(x+\frac{1}{3})^2=c_2$$

由此得原方程的通解

$$y^2-xy+x^2-y+x=c\quad(c\text{ 为任意常数})$$