陈文灯 黄先开 主编

聚焦考研 Focus NETM

数学二

临考演习

考研名师网络课堂 www.kaoyan.tv

2004版

每做完一份模拟试卷，
有效总结做题的规律和技巧，
考研只不过多一次演习而已。

15套试卷

随书奉送“考研赠卡”
详见封二、封三
赠

世界图书出版公司

陈文灯 黄先开 主编

聚焦考研
Focus NETM

数学二

临考演习

策划 北京聚骄文化公司

15套试卷

2004版

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

图书在版编目（CIP）数据

2004 版数学临考演习. 2 / 陈文灯著. —2 版. —北京：世界图书出版公司北京公司，2003.8

ISBN 7－5062－6065－4

Ⅰ.2… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 070936 号

数学二·临考演习

主　　编：陈文灯　黄先开
责任编辑：罗杨为
封面设计：滕晓娜

出　　版：世界图书出版公司北京公司
发　　行：世界图书出版公司北京公司
（北京朝内大街 137 号　邮编 100010　电话 010－62198079）
销　　售：各地新华书店
印　　刷：北京才智印刷厂

开　　本：787×1092 毫米　1/16
印　　张：15.5
字　　数：328 千字
版　　次：2003 年 9 月第 1 版　2003 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7－5062－6065－4/G·147　　**定价：18.60 元**

服务热线　010－62198078

前　　言

目前考研数学统考题的特点可以用两句话，十八个字来概括：信息量大，题量大；知识面宽，综合性强，难度大，这个命题的特点在近几年不会有大的变化。面对这种形势如何合理地安排时间，发挥自己的潜能，高效地进行复习，是每个考研学子必须很好解决的问题。解决好了，应试时就能考出自己的水平，或许能超常发挥，考出自己意想不到的好成绩；解决不好就会“事倍功半”。对数学我建议同学们这样复习：

(1)牢记重要的概念、定理和公式。因为这样做可使你应试时节省“追忆”、“推演”的时间，同时可使你少犯错用定理、公式的错误。

(2)掌握一些题型的快速解法，提高解题速度。

(3)掌握重要的变量替换、辅助函数的作法技巧，重要题型的解题思路的方法。这可使你应试时很快找到解题的突破口和切入点。

《数学二·临考演习》就是基于上面的出发点精编了 15 套难度较大、技巧性较强、基本概念较丰富的多种题型的模拟试题。只有通过模拟试题的训练，才能掌握各种题型的解题思路、技巧和方法，理解各基本概念的深刻内涵，才能使考研学子应试时“更上一层楼”，否则将达不到应有的效果。

由于成书仓促，又有新的思路、新的题型，难免有欠缺和不足或错误的地方，请考研学子和数学同仁批评指正。

2003 年 9 月

目录

数学二　临考演习（一）

考生注意：（1）本试卷共 23 大题，满分 150 分.

（2）根据国家标准，试卷中的正切函数，余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

得分	评卷人

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

（1）设函数 $y=y(x)$ 满足 $\Delta y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $y(1)=1$，则 $\int_1^2 y(x)dx=$ ____.

（2）设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有 $f(0)=0, f'(0)=-2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln\cos(x-t)dt}{\sqrt{1-2f^2(x)}-1}=$ ________.

（3）抛物线 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2+y^2=8$ 所截下部分的弧长为____________________.

（4）设 $Z=x^2f(2x,\dfrac{y^2}{x})$，$f$ 具有一阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

（5）已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=0$，则 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$ __________.

（6）已知 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为四阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-1$，则行列式 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}^* & 0\\ 0 & 2\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=$ ____________.

得分	评卷人

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

（7）设 $f(x)$、$g(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(x)$ 具有连续一阶导数，满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$，$f'(x)=-2x^2+\int_0^x g(x-t)dt$，则

(A) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

(B) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.　【　　】

（8）已知 $f'(x_0)<0$，$f''(x_0)<0$ 令 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，$dy=f'(x_0)\Delta x$，则当 $\Delta x>0$ 且充分小时，有

(A) $\Delta y>dy>0$.　　(B) $\Delta y<dy<0$.

(C) $dy>\Delta y>0$.　　(D) $dy<\Delta y<0$.　【　　】

沿线裁下

(9) 曲线 $y = ax^2$ 与 $y = \ln x$,当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时,它们之间

(A) 没有交点.　　(B) 仅有一个交点.

(C) 仅有两个交点.　　(D) 仅有三个交点.　　【　】

(10) $y = e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线条数为

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.　　【　】

(11) 微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的待定特解形式为

(A) $(Ax+B)e^x$.　　(B) Axe^x.

(C) Ax^2e^x.　　(D) $x(Ax+B)e^x$.　　【　】

(12) 若 $f(-x) = -f(x)$, $(-\infty < x < +\infty)$,在 $(-\infty, 0)$ 内 $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$,则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内

(A) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$.　　(B) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.

(C) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$.　　(D) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$.　　【　】

(13) 设函数 $z = f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$,且 $f(x,0) = 1$, $f_y'(x,0) = x$,则 $f(x,y)$ 等于

(A) $1 - xy + y^2$.　　(B) $1 + xy + y^2$.

(C) $1 - x^2y + y^2$.　　(D) $1 + x^2y + y^2$.　　【　】

(14) 已知 **A**、**B** 为三阶矩阵,且有相同的特征值 1,2,2,则下列命题:①**A**,**B** 等价;②**A**,**B** 相似;③ 若 **A**,**B** 为实对称矩阵,则 **A**,**B** 合同;④ 行列式 $|A - 2E| = |2E - A|$,成立的有

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个　　【　】

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

得分	评卷人

(15)(本题满分 10 分)

设 $f''(1)$ 存在,且 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = 0$,记 $\varphi(x) = \int_0^1 f'[1+(x-1)t]dt$,求 $\varphi(x)$ 在 $x = 1$ 某个邻域内的导数,并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x = 1$ 处的连续性.

沿线裁下

得分	评卷人

(16)（本题满分 9 分）

设$f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\sin\frac{x}{t}\cdot\left[g(2x+\frac{1}{t})-g(2x)\right]$，$g(x)$的一个原函数为$\ln(x+1)$，计算定积分$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

沿线裁下

得分	评卷人

(17)（本题满分 12 分）

设函数$u=f(\ln\sqrt{x^2+y^2})$，满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$，且极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^1 f(xt)dt}{x}=-1$，试求函数 f 的表达式.

得分	评卷人

(18)(**本题满分 9 分**)

计算$\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy$.

得分	评卷人

(19)(**本题满分 12 分**)

设微分方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$.

(1) 证明:若$1+P(x)+Q(x)=0$,则方程有一特解$y=e^x$;若$P(x)+xQ(x)=0$,则方程有一特解$y=x$.

(2) 根据上面的结论,求$(x-1)y''-xy'+y=0$的通解和满足初始条件$y(0)=2$,$y'(0)=1$的特解.

(3) 求$(x-1)y''-xy'+y=1$满足初始条件$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[y(x)-1]}{x}=-1$的特解.

沿线裁下

得分	评卷人

（20）（本题满分 12 分）

在第一象限内求一下凸的曲线，使其上任一点的曲率半径等于过这一点的法线介于该点与横轴间线段长的两倍.

沿线裁下

得分	评卷人

（21）（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 内 $f(x)>0$，且 $f'(x)$ 连续，又

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\,dt}{\int_0^x f(x-t)\,dt} & x>0,\\ 0 & x=0,\end{cases}$$

（1）求 $F'_+(0)$；（2）证明在 $[0,+\infty)$ 内 $F'(x)>0$.

得分	评卷人

(22)(本题满分 8 分)

已知三阶方阵 $\mathbf{B} \neq 0$ 的每一个列向量都是以下方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$ 且 $r(\mathbf{B}) = 2$.

(1) 求 λ 的值; (2) 设 $\mathbf{A}$ 为此线性方程组的系数矩阵,求$(\boldsymbol{AB})^n$.

得分	评卷人

(23)(本题满分 10 分)

已知 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 为4阶矩阵,若满足 $\mathbf{AB}+2\mathbf{B}=0$,$r(\mathbf{B})=2$,且行列式 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}|=0$,(1) 求 $\mathbf{A}$ 的特征值; (2) 证明 $\boldsymbol{A}$ 可对角化; (3) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|$.

沿线裁下

沿线裁下

数学二　临考演习（二）

考生注意:(1) 本试卷共23大题,满分150分.

(2) 根据国家标准,试卷中的正切函数,余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\operatorname{arctan} x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

得分	评卷人

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(1) 设 $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^x t\mathrm{d}t$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}[nf(n)+nf(n-2)]^n=$ ________.

(2) 设 $f(x)$ 为连续函数,且满足 $\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t=\sin^3 x$,则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=$ ______.

(3) 微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)}{x}=1$ 的特解为________.

(4) 交换积分次序: $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y}f(x,y)\,\mathrm{d}x=$ ________.

(5) 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶相似矩阵,$\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值,行列式 $|\boldsymbol{B}|=2$,则行列式 $\begin{vmatrix}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} & 0\\ 0 & (2\boldsymbol{B})^*\end{vmatrix}=$ ________.

(6) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ t & 1 & 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}\neq 0$ 为三阶方阵,且 $\boldsymbol{AB}=0$,则 $t=$ ________.

得分	评卷人

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 以下命题正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{|x|}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$.　　(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{|x|}\arctan\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{\pi}{2}$.

(C) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin|x|}{x}\arctan\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{\pi}{2}$.　　(D) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin|x|}{|x|}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$.

【　　】

(8) 函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处

(A) 连续,但偏导数不存在.　　(B) 偏导数存在,但不可微.

(C) 可微.　　(D) 偏导数存在且可微.　【　　】

(9) 设 $f(x)$ 为偶函数,且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1$,令 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$,则

(A) $F(-a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.　　(B) $F(-a)=1-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $F(-a)=F(a)$.　　(D) $F(-a)=2F(a)-1$.　【　】

(10) 设函数$f(x)$在区间$(-\delta,\delta)$内有定义,且恒有$|f(x)|\leqslant x^2$,则$x=0$必是$f(x)$的

(A) 间断点.　　(B) 连续但不可导的点.

(C) 可导的点且$f'(0)=0$.　　(D) 可导的点但$f'(0)\neq 0$.　【　】

(11) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且$x_0\neq 0$是函数$f(x)$的极大值点,则

(A) x_0必为$f(x)$的驻点.

(B) $-x_0$必为$-f(x)$的极小值点.

(C) $-x_0$必为$-f(-x)$的极小值点.

(D) 对任何$x\in(-\infty,+\infty)$都有$f(x)\leqslant f(x_0)$.　【　】

(12) 已知$f'(x)$在点$x=0$处连续,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\ln(1+x)}=-1$,则

(A) $f(0)$是函数$f(x)$的极小值.

(B) $f(0)$是函数$f(x)$的极大值.

(C) $(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(D) $f(0)$不是$f(x)$的极值,$(0,f(0))$也非曲线$y=f(x)$的拐点.　【　】

(13) 记$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$I_2=\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$I_3=\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 3}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则下列关系式成立的是

(A) $I_1>I_2>I_3$.　　(B) $I_2>I_1>I_3$.

(C) $I_1<I_2<I_3$.　　(D) $I_2<I_1<I_3$.　【　】

(14) 已知三阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$0,\pm 1$,则下列结论中不正确的是

(A) 矩阵$\boldsymbol{A}$是不可逆的.　　(B) 矩阵$\boldsymbol{A}$的主对角元素之和为0.

(C) 1和-1所对应的特征向量是正交的.　　(D) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系由一个向量组成.

【　】

三、解答题(本题共9小题,满分94分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

得分	评卷人

(15)(本题满分10分)

设φ具有连续的二阶偏导数,Ψ具有连续的一阶导数,令$z=\dfrac{1}{2}\varphi(y+ax,y-ax)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{y-ax}^{y+ax}\Psi(t)\,dt$,试求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

沿线裁下

得分	评卷人

（16）（本题满分 12 分）

计算$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$,其中$f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt$.

沿线裁下

得分	评卷人

（17）（本题满分 10 分）

在xoy平面的第一象限求一曲线,使由其上任一点P处的切线,x轴与线段OP所围三角形的面积为常数k,且曲线通过点(1,1).

得分	评卷人

(18)(本题满分 12 分)

试证:对于在(1,2)内任一点 x 处均有 $\left|\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}\right|<\frac{1}{4}(x-1)^3$.

得分	评卷人

(19)(本题满分 12 分)

设 $f(x,y)$ 在单位圆上有连续的偏导数,且在边界上取值为零,证明

$$f(0,0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2\pi}\iint_D\frac{x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}dxdy,$$

其中 D 为圆环域:$\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$.

沿线裁下

得分	评卷人

(20)（本题满分 8 分）

设函数$f(x)$满足方程$3f(x)+4x^2f(-\frac{1}{x})+\frac{7}{x}=0$,求函数$f(x)$的极大值和极小值.

沿线裁下

得分	评卷人

(21)（本题满分 12 分）

设函数$f(x)$在$[-2,2]$上二阶可导,且$|f(x)|\leqslant 1$,又$f^2(0)+[f'(0)]^2=4$,试证:在$(-2,2)$内至少存在一点ξ,使$f(\xi)+f''(\xi)=0$.

得分	评卷人

(22)(本题满分9分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 为四维列向量,$\mathbf{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$,已知 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

其中 $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ 为对应齐次方程组的基础解系,k_1,k_2 为任意常数. 令 $\mathbf{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$,试求 $\mathbf{B}\mathbf{y}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

得分	评卷人

(23)(本题满分9分)

设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为 n 阶矩阵,$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})<n$. 证明:

(1) $\lambda=0$ 为 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 相同的特征值;

(2) $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系组成的向量组线性相关;

(3) $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 具有公共的特征向量.

沿线裁下