



普通高等教育“十一五”国家级规划教材



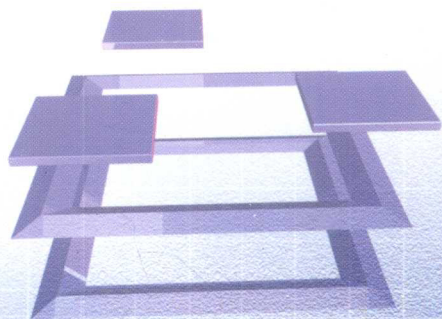
复旦卓越·数学系列

高等职业技术学院教材

# 实用数学

(下册)  
工程类

主 编 张圣勤 叶迎春



 复旦大学出版社



普通高等教育“十一五”国家级规划教材



复旦卓越·数学系列  
高等职业技术学院教材

# 实用数学 (下册)

工程类

编委会主任 刘子馨

编委会成员 (按姓氏笔画排列)

王 星 叶迎春 孙卫平 孙福兴 许燕频 应惠芬

张圣勤 沈剑华 金建光 姚光文 诸建平 焦光利

 复旦大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

实用数学·下册(工程类) / 张圣勤, 叶迎春主编.

—上海: 复旦大学出版社, 2010. 3

(复旦卓越·数学系列)

ISBN 978-7-309-07058-3

I. ①实… II. ①张…②叶… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 016496 号

**实用数学·下册(工程类)**

张圣勤 叶迎春 主编

---

出版发行

复旦大学出版社

上海市国权路 579 号 邮编: 200433

86-21-65642857(门市零售)

86-21-65100562(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)

fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>

---

责任编辑 梁 玲

出品人 贺圣遂

---

|   |   |                    |
|---|---|--------------------|
| 印 | 刷 | 句容市排印厂             |
| 开 | 本 | 787×960 1/16       |
| 印 | 张 | 15.75              |
| 字 | 数 | 285 千              |
| 版 | 次 | 2010 年 3 月第一版第一次印刷 |

---

|   |   |                                          |
|---|---|------------------------------------------|
| 书 | 号 | ISBN 978 - 7 - 309 - 07058 - 3 / O · 439 |
| 定 | 价 | 28.00 元                                  |

---

如有印装质量问题, 请向复旦大学出版社发行部调换。

版权所有 侵权必究

# 前 言

欢迎使用这套《实用数学》教材。本套教材根据教育部现行高等职业教育数学教学大纲、教学基本要求,组织上海市部分高等职业技术学院和普通高校长期从事高职数学教学的资深教师编写,主要适用于高职高专工科学生或普通高校工科学生,也可作为高职成人教育教材和自学考试学生的课外教材,同时也可作为一般工程技术人员参考书。

随着当今计算工具和计算技术的飞速发展,数学这门既传统又古老的基础课程也正在发生着深刻的变化。放眼当今世界的科学技术界,手工设计和计算正在或即将成为历史,代之而起的是计算机设计和计算。高等数学课程的计算功能正在与计算机技术密切结合形成众多的计算技术和计算软件,而这些计算技术和计算软件正在科学领域、工程领域、经济管理等领域发挥着不可替代的作用。作为高等教育重要基础课程的高等数学应该教什么、怎么教的问题比任何时候都要突出。在这样一个大背景下,在本书的编写过程中,作者们本着顺应时代潮流,对国家和民族负责、对学生负责的态度,以构建适合于我国国情的高职教育的公共课程体系为己任,以符合大纲要求、优化结构体系、加强实际应用、增加知识容量为原则,以新世纪社会主义市场经济形势下制造业对人才素质的要求为前提,以高职数学在高职教育中的功能定位和作用为基础,努力编写一套思想内涵丰富、实际应用广泛、反映最新计算思想和技术、简单易学的高等数学教材。因此,在内容上删去了一些繁琐的推理和证明,比传统数学教材增加了一些实际应用的内容,力求把数学内容讲得简单易懂,重点让学生接受高等数学的思想方法和思维习惯;在习题的编排上加入了大量的例题和习题,并照顾到高职多专业的特点,力求做到习题难易搭配适当、知识与应用结合紧密、掌握理论与培养能力相得益彰;在结构的处理上,注意与现行高中及中职教学内容的衔接,同时注意吸收国内外高职教材的优点,照顾到高职各专业的特点和需要,适当精简结构,使之更趋合理。为跟上当今计算机应用的发展步伐和大学生参加数学建模的需要,特意增加了一些数学软件的实验和数学建模的练习。书中带有\*号的内容为选学内容。

《实用数学》共分上、下两册(下册分为经济类与工程类两种)。本书为下册工程类,内容包括二阶微分方程、拉普拉斯变换、多元函数微积分初步、无穷级数、图与网络基础、概率统计基础,以及相关的数学实验和数学建模、数学文化等。本书所附光盘内含本书数学实验和数学建模的教学辅助软件。同时,本书还配有配套练习册可供选用。使用本教材的学校可另外向复旦大学出版社索要教师用教学辅

助光盘或到复旦大学出版社的网站下载,在光盘中我们为各使用学校和教师们准备了本书全套的标准化教案、教学用 PPT 课件等教学辅助资料.此外,教学辅助网站也正在建设中.

本书由张圣勤、叶迎春担任主编,并最后统稿.参与具体编写的有孙卫平(第 7 章)、叶迎春(第 8 章、第 10 章)、张圣勤(第 9 章及第 12 章的 § 12.4 节)、王星(第 11 章及全书的数学实验部分)、孙福兴(第 12 章的 § 12.1、§ 12.2、§ 12.3 和 § 12.6 节).

在本书的编写过程中,各位作者得到了各参编院校各级领导的关心和支持,同时也得到了复旦大学出版社领导和各位编辑的支持,编写中也参阅了有关的文献和教材,在此一并表示衷心的感谢.

由于时间仓促,加之水平有限,书中疏漏错误之处在所难免,恳切期望使用本书的师生多提意见和建议,以便于再版时更正.

编 者

2010 年 1 月

# 目 录

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| 第 7 章 二阶微分方程 .....                                            | 1  |
| § 7.1 二阶可降阶微分方程 .....                                         | 1  |
| 7.1.1 型如 $y''=f(x)$ 、 $y''=f(x,y')$ 、 $y''=f(y,y')$ 的方程 ..... | 1  |
| 7.1.2 应用举例 .....                                              | 3  |
| 练习与思考 7-1 .....                                               | 6  |
| § 7.2 二阶常系数线性微分方程 .....                                       | 6  |
| 7.2.1 二阶线性微分方程解的结构 .....                                      | 6  |
| 7.2.2 二阶常系数齐次线性微分方程 .....                                     | 8  |
| 7.2.3 二阶常系数非齐次线性微分方程 .....                                    | 10 |
| 7.2.4 二阶常系数线性微分方程应用举例 .....                                   | 12 |
| 练习与思考 7-2 .....                                               | 14 |
| § 7.3 数学建模(五)——微分方程模型 .....                                   | 14 |
| 7.3.1 微分方程模型的基本概念 .....                                       | 14 |
| 7.3.2 放射性废料处理模型 .....                                         | 18 |
| 7.3.3 船舶渡河路线模型 .....                                          | 23 |
| 练习与思考 7-3 .....                                               | 27 |
| 本章小结 .....                                                    | 28 |
| 本章复习题 .....                                                   | 29 |
| 第 8 章 拉普拉斯变换 .....                                            | 31 |
| § 8.1 拉普拉斯变换的概念 .....                                         | 31 |
| 8.1.1 拉普拉斯变换的概念与性质 .....                                      | 31 |
| 8.1.2 常见函数的拉普拉斯变换 .....                                       | 36 |
| 练习与思考 8-1 .....                                               | 38 |
| § 8.2 拉普拉斯逆变换及其求法 .....                                       | 39 |
| 练习与思考 8-2 .....                                               | 43 |

|                                    |           |
|------------------------------------|-----------|
| § 8.3 拉普拉斯变换的应用 .....              | 43        |
| 8.3.1 求解微分方程 .....                 | 43        |
| 8.3.2 线性系统问题 .....                 | 45        |
| 练习与思考 8-3 .....                    | 46        |
| § 8.4 数学实验(六)——二阶微分方程与拉普拉斯变换 ..... | 46        |
| 练习与思考 8-4 .....                    | 48        |
| 本章小结 .....                         | 48        |
| 本章复习题 .....                        | 51        |
| <b>第9章 多元函数微积分初步</b> .....         | <b>52</b> |
| § 9.1 多元函数的基本概念 .....              | 53        |
| 9.1.1 空间直角坐标系 .....                | 53        |
| 9.1.2 二元函数及其极限与连续性 .....           | 55        |
| 练习与思考 9-1 .....                    | 59        |
| § 9.2 偏导数与全微分 .....                | 59        |
| 9.2.1 二元函数的偏导数 .....               | 59        |
| 9.2.2 高阶偏导数 .....                  | 63        |
| 9.2.3 全微分的概念 .....                 | 64        |
| 练习与思考 9-2 .....                    | 67        |
| § 9.3 复合函数、隐函数的偏导数 .....           | 67        |
| 9.3.1 二元复合函数 .....                 | 67        |
| 9.3.2 二元复合函数求导 .....               | 67        |
| 9.3.3 隐函数求导法 .....                 | 70        |
| 练习与思考 9-3 .....                    | 72        |
| § 9.4 多元函数的极值 .....                | 72        |
| 9.4.1 二元函数的极值 .....                | 72        |
| 9.4.2 最大值和最小值 .....                | 74        |
| 9.4.3 条件极值与拉格朗日乘数法 .....           | 75        |
| 练习与思考 9-4 .....                    | 77        |
| § 9.5 二重积分 .....                   | 78        |

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| 9.5.1 二重积分的概念和性质 .....             | 78  |
| 9.5.2 二重积分的计算 .....                | 81  |
| 9.5.3 二重积分的应用 .....                | 89  |
| 练习与思考 9-5 .....                    | 91  |
| 本章小结 .....                         | 92  |
| 本章复习题 .....                        | 94  |
| <br>                               |     |
| <b>第 10 章 无穷级数</b> .....           | 96  |
| § 10.1 无穷级数的概念 .....               | 97  |
| 10.1.1 无穷级数及其收敛与发散的概念 .....        | 97  |
| 10.1.2 无穷级数的性质 .....               | 99  |
| 10.1.3 常数项级数 .....                 | 100 |
| 练习与思考 10-1 .....                   | 104 |
| § 10.2 幂级数与多项式逼近 .....             | 105 |
| 10.2.1 幂级数及其收敛区间 .....             | 105 |
| 10.2.2 幂级数的性质 .....                | 108 |
| 10.2.3 函数展成泰勒级数 .....              | 109 |
| 10.2.4 多项式逼近及其应用 .....             | 114 |
| 练习与思考 10-2 .....                   | 117 |
| * § 10.3 傅立叶级数 .....               | 118 |
| 10.3.1 三角级数、三角函数的正交性 .....         | 118 |
| 10.3.2 函数展开成傅立叶级数 .....            | 119 |
| 10.3.3 正弦级数与余弦级数 .....             | 124 |
| 练习与思考 10-3 .....                   | 127 |
| § 10.4 数学实验(七)——二元函数微积分与无穷级数 ..... | 127 |
| 练习与思考 10-4 .....                   | 129 |
| 本章小结 .....                         | 129 |
| 本章复习题 .....                        | 132 |



|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| <b>第 11 章 图与网络基础</b> .....        | 135 |
| § 11.1 最短路与中国邮路问题 .....           | 135 |
| 11.1.1 图的基本概念 .....               | 135 |
| 11.1.2 最短路问题 .....                | 137 |
| 11.1.3 欧拉回路与中国邮路问题 .....          | 141 |
| 练习与思考 11-1 .....                  | 143 |
| § 11.2 网络流 .....                  | 144 |
| 11.2.1 容量网络的基本概念 .....            | 144 |
| 11.2.2 容量网络的最大流问题 .....           | 146 |
| 11.2.3 网络最小费用最大流 .....            | 150 |
| 练习与思考 11-2 .....                  | 151 |
| § 11.3 数学建模(六)——网络模型 .....        | 152 |
| 11.3.1 最短路模型 .....                | 152 |
| 11.3.2 网络流模型 .....                | 155 |
| 练习与思考 11-3 .....                  | 157 |
| § 11.4 数学实验(八)——图与网络 .....        | 158 |
| 练习与思考 11-4 .....                  | 159 |
| 本章小结 .....                        | 159 |
| 本章复习题 .....                       | 160 |
| <br><b>第 12 章 概率统计基础</b> .....    | 165 |
| § 12.1 随机事件及其概率 .....             | 165 |
| 12.1.1 随机现象与随机事件 .....            | 165 |
| 12.1.2 随机事件的概率与古典概型 .....         | 169 |
| 练习与思考 12-1A .....                 | 173 |
| 12.1.3 随机事件的条件概率及其有关的三个概率公式 ..... | 173 |
| 12.1.4 事件的独立性 .....               | 177 |
| 练习与思考 12-1B .....                 | 179 |
| § 12.2 随机变量及其概率分布 .....           | 180 |

|                                |         |
|--------------------------------|---------|
| 12.2.1 随机变量及其概率分布函数 .....      | 180     |
| 12.2.2 离散型随机变量及其概率分布律 .....    | 181     |
| 练习与思考 12-2A .....              | 185     |
| 12.2.3 连续型随机变量及其概率分布密度 .....   | 185     |
| 练习与思考 12-2B .....              | 191     |
| § 12.3 随机变量的数字特征 .....         | 192     |
| 12.3.1 离散型随机变量的数字特征 .....      | 192     |
| 12.3.2 连续型随机变量的数字特征 .....      | 194     |
| 12.3.3 几个常见分布的数字特征 .....       | 195     |
| * 12.3.4 大数定律与中心极限定理简介 .....   | 196     |
| 练习与思考 12-3 .....               | 198     |
| § 12.4 一元线性回归分析 .....          | 198     |
| 12.4.1 一元线性回归分析中的参数估计 .....    | 199     |
| 12.4.2 一元线性回归分析中的假设检验与预测 ..... | 207     |
| 12.4.3 可线性化的一元非线性回归 .....      | 213     |
| 练习与思考 12-4 .....               | 215     |
| § 12.5 数学实验(九) .....           | 216     |
| 练习与思考 12-5 .....               | 217     |
| § 12.6 数学建模(七)——概率模型 .....     | 218     |
| 12.6.1 外贸销售组织问题 .....          | 218     |
| 12.6.2 报童卖报问题 .....            | 219     |
| 练习与思考 12-6 .....               | 222     |
| 本章小结 .....                     | 222     |
| 本章复习题 .....                    | 225     |
| <br>附录一 有关概率统计用表 .....         | <br>228 |
| 附录二 参考答案 .....                 | 230     |

## 第 7 章

# 二阶微分方程

常微分方程伴随着微积分一起发展起来. 从 17 世纪末开始, 摆的运动、弹性理论以及天体力学等实际问题的研究引出了一系列常微分方程, 这些问题在当时以挑战的形式被提出而在数学家之间引起激烈的争论. 牛顿、莱布尼兹和伯努利兄弟等都曾讨论过低阶常微分方程.

18 世纪, 随着欧拉、拉格朗日、柯西等人对二阶常微分方程的解法和解的存在性问题的研究, 使得常微分方程已成为有自己的目标和方向的新数学分支.

19 世纪后半叶, 常微分方程的研究在两个大的方向上开拓了新局面. 第一个方向是由柯西开创的常微分方程解析理论; 另一个崭新的方向是庞加莱的独创定性理论.

在 20 世纪之前, 微分方程问题主要来源于几何学、力学和物理学, 而现在则几乎在自然科学和工程技术的每一个领域都有或多或少的微分方程问题, 微分方程甚至和生物、农业以及经济学也密切地挂上了钩.

### § 7.1 二阶可降阶微分方程

#### 7.1.1 型如 $y'' = f(x)$ 、 $y'' = f(x, y')$ 、 $y'' = f(y, y')$ 的方程

##### 1. $y'' = f(x)$ 型微分方程

该微分方程的特点是方程右端仅含有自变量  $x$ , 通过两次积分即可求出通解.

**例 1** 求微分方程  $y'' = xe^x$  的通解.

$$\text{解: } y' = \int xe^x dx = \int xde^x = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C_1,$$

$$\begin{aligned} y &= \int [(x-1)e^x + C_1] dx = \int (x-1)e^x dx + C_1x + C_2 \\ &= \int (x-1)de^x + C_1x + C_2 = (x-1)e^x - \int e^x dx + C_1x + C_2 \end{aligned}$$



$$= (x-1)e^x - e^x + C_1x + C_2$$

$$= (x-2)e^x + C_1x + C_2.$$

## 2. $y'' = f(x, y')$ 型微分方程

该微分方程的特点是方程右端不显含未知函数  $y$ . 求解方法如下:

(1) 设  $z = y'$ , 原方程化为:  $z' = f(x, z)$ .

(2) 利用一阶微分方程求解方法求出通解

$$z = y' = \varphi(x, C_1).$$

(3) 对  $y'$  再积一次分, 得到  $y$  的通解为

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

**例 2** 求微分方程  $y'' - 3(y')^2 = 0$  的通解.

**解**  $z = y'$ , 原方程化为

$$z' - 3z^2 = 0.$$

这是一个可分离变量型的微分方程

$$\frac{dz}{z^2} = 3dx,$$

解得  $-\frac{1}{z} = 3x + C_1$ , 即  $y' = -\frac{1}{3x + C_1}$ . 故

$$y = \int \left( -\frac{1}{3x + C_1} \right) dx + C_2 = -\frac{1}{3} \ln |3x + C_1| + C_2.$$

**例 3** 求微分方程  $y'' - \frac{1}{x}y' - x\cos x = 0$  满足初始条件  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

的特解.

**解**  $z = y'$ , 原方程化为

$$z' - \frac{1}{x}z = x\cos x.$$

这是关于  $z$  的一阶线性微分方程, 由公式得:

$$z = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left( \int x \cos x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C_1 \right) = x \left( \int \cos x dx + C_1 \right) = x(\sin x + C_1).$$

将初始条件  $z\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ , 代入得:  $C_1 = 0$ .

所以

$$z = y' = x \sin x.$$

$$y = \int x \sin x dx = -\int x d\cos x = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C_2.$$

由初始条件  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , 代入得:  $C_2 = -1$ ,

从而满足初始条件的解为

$$y = -x \cos x + \sin x - 1.$$

### 3. $y'' = f(y, y')$ 型微分方程

该微分方程的特点是:方程右端不显含自变量  $x$ . 求解方法如下:

(1) 设  $z = y'$ ,  $y'' = z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$ , 原方程化为

$$z \frac{dz}{dy} = f(y, z).$$

(2) 求出以  $y$  作为自变量的一阶微分方程的通解

$$z = y' = \varphi(y, C_1).$$

(3) 分离变量后求积分, 得  $y$  的通解为:

$$\int \frac{1}{\varphi(y, C_1)} dy = x + C_2.$$

例4 求微分方程  $yy'' = 2(y'^2 - y')$  满足  $y(0) = 1, y'(0) = 2$  的解.

解 设  $z = y'$ , 则  $y'' = z \frac{dz}{dy}$ , 原方程化为

$$y \frac{dz}{dy} = 2(z - 1).$$

利用变量分离法  $\int \frac{1}{z-1} dz = \int \frac{2}{y} dy$ , 得

$$z - 1 = C_1 y^2.$$

由初始条件  $y(0) = 1, y'(0) = 2$ , 得

$$C_1 = 1,$$

即得

$$y' = 1 + y^2.$$

再次利用变量分离法得

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = x + C_2,$$

$$\arctan y = x + C_2,$$

故

$$y = \tan(x + C_2).$$

由初始条件  $y(0) = 1$ , 代入得  $C_2 = \frac{\pi}{4}$ .

从而满足初始条件的解为

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

## 7.1.2 应用举例

例5 设有一密度为  $\rho$  的绳, 两端固定, 绳索受重力作用而下垂, 试问该绳索



在平衡状态时是怎样的曲线?

**解** 设绳索的最低点为  $A$ , 以连接地球中心与  $A$  点的连线为  $y$  轴, 不过  $A$  点且与  $y$  轴垂直的直线为  $x$  轴, 建立平面直角坐标系, 如图 7-1-1 所示. 设绳索的曲线方程为  $y = f(x)$ ,  $|OA|$  为定长.

考察绳索上的点  $A$  到另一点  $M(x, y)$  间的一段弧长为  $s$ , 则该段弧所受的重力为  $\rho g s$ , 设  $M$  点的切线倾角为  $\theta$ , 且沿切线方向的张力为  $T$ , 点  $A$  处的水平张力为  $H$ , 由于外力的平衡, 可得:

$$T \sin \theta = \rho g s, \quad T \cos \theta = H.$$

两式相除得

$$\tan \theta = \frac{1}{a} s \quad (\text{其中 } a = \frac{H}{\rho g}).$$

由于  $y' = \tan \theta, s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx$ , 代入即得:

$$y' = \frac{1}{a} \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

两边求导, 得  $y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2}$ .

该题为求微分方程

$$y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2}$$

在初始条件下为  $y(0) = |OA|, y'(0) = 0$  下的特解.

设  $z = y'$ , 则微分方程化为  $z' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + z^2}$ , 解得

$$\ln(z + \sqrt{1 + z^2}) = \frac{x}{a} + C_1.$$

将初始条件  $z(0) = y'(0) = 0$ , 代入得  $C_1 = 0$ .

于是

$$z + \sqrt{1 + z^2} = e^{\frac{x}{a}},$$

又

$$z - \sqrt{1 + z^2} = e^{-\frac{x}{a}},$$

两式相加得

$$z = y' = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

两边积分得

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) + C_2.$$

不妨设  $|OA| = a$ , 将初始条件  $y(0) = a$  代入, 即得  $C_2 = 0$ .

于是该绳索的形状为曲线

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \quad (\text{悬链线}).$$

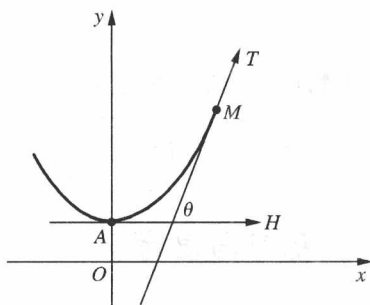


图 7-1-1

**例 6** 一个离地面很高的物体,受地球引力作用,由静止开始落向地面,求该物体落到地面时的速度(不计空气阻力).

**解** 取地球中心为原点  $O$ ,以连接该物体的直线为  $y$  轴,过原点且与  $y$  轴垂直的直线为  $x$  轴,建立平面直角坐标系.

设该物体开始下落时的位置与  $O$  的距离为  $L$ ,物体的质量为  $m$ ,地球的半径为  $R$ ,地球的质量为  $M$ ,引力常数为  $k$ ,运动方程为  $s = s(t)$ . 根据万有引力定律得微分方程

$$ms'' = -\frac{kmM}{s^2},$$

即

$$s'' = -\frac{kM}{s^2}.$$

又因为当  $L = R$  时,  $g = \frac{kM}{R^2}$ , 于是微分方程成为

$$s'' = -\frac{gR^2}{s^2}.$$

由题意知,该题为求微分方程

$$s'' = -\frac{gR^2}{s^2}$$

在初始条件  $s(0) = l, s'(0) = 0$  下的特解.

令  $s' = z$ , 则

$$z \frac{dz}{ds} = -\frac{gR^2}{s^2}.$$

由分离变量法,得

$$z^2 = \frac{2gR^2}{s} + C_1.$$

由初始条件得  $C_1 = -\frac{2gR^2}{l}$ , 则



$$z = s' = v = -R\sqrt{2g\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{l}\right)}.$$

上式中令  $s = R$ , 即为该物体落到地面的速度

$$v = -R\sqrt{2g\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{l}\right)}.$$



## 练习与思考 7-1

1. 求下列微分方程的通解.

(1)  $(1+x^2)y'' = 1;$

(2)  $y'' = xe^{-x};$

(3)  $y'' + y' = x^2;$

(4)  $y'' = 1 + y'^2;$

(5)  $xy'' + y' = 2x;$

(6)  $y'' = y'^3 + y'.$

2. 求下列微分方程满足初始条件的特解.

(1)  $xy'' - y'\ln y' + y' = 0, y(1) = 2, y'(-1) = e^2;$

(2)  $yy'' = 2(y'^2 - y'), y(0) = 1, y'(0) = 2.$

3. 设子弹以 300m/s 的速度射入厚度为 0.2m 的木板, 阻力的大小与子弹速度的平方成正比. 如果子弹穿出木板时的速度为 50m/s, 求子弹穿过木板所需的时间.

## § 7.2 二阶常系数线性微分方程

在实际中应用得比较多的高阶微分方程是二阶常系数线性微分方程, 它的一般形式是

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

其中  $p, q$  为实常数,  $f(x)$  为已知函数, 称为自由项. 当方程右端  $f(x) \equiv 0$  时, 方程叫做齐次的; 当  $f(x)$  不恒为零时, 方程叫做非齐次的.

### 7.2.1 二阶线性微分方程解的结构

先讨论二阶常系数齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0,$$

其中  $p, q$  为实常数.

如果函数  $y_1$  与  $y_2$  是上述方程的两个解, 容易验证, 对于任意常数  $c_1, c_2$ ,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

也是方程的解.

此解从其形式看含有两个任意常数, 但它不一定是方程的通解. 因为若  $y_1$  是

方程的一个解,则  $y_2 = 2y_1$  也是方程的解,此时

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 y_1 + 2C_2 y_1 = (C_1 + 2C_2) y_1,$$

可以把它写成

$$y = C y_1, \text{ 其中 } C = C_1 + 2C_2.$$

这显然不是二阶常系数齐次线性微分方程的通解.

那么,何时  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$  才是二阶常系数齐次线性微分方程的通解呢?

显然,若  $y_1, y_2$  有一个是另一个的常数倍,比如  $y_2 = k y_1$ , 则  $C_1, C_2$  必可并为一个任意常数,  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = (C_1 + C_2 k) y_1$  就不是通解;否则,  $C_1, C_2$  一定不能合并为一个任意常数,  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$  就是方程的通解. 我们有如下定理.

**定理 1** 如果  $y_1$  与  $y_2$  是二阶常系数线性微分方程  $y'' + p y' + q y = 0$  的两个解,且  $\frac{y_1}{y_2}$  不为常数,则  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$  是该方程的通解,其中  $C_1, C_2$  为任意常数.

**例 1** 验证:函数  $y_1 = \sin 2x$  与  $y_2 = \cos 2x$  是二阶线性齐次方程

$$y'' + 4y = 0$$

的两个解,求该方程的通解.

$$\text{解 } y_1'' + 4y_1 = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0,$$

$$y_2'' + 4y_2 = -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0,$$

故  $y_1 = \sin 2x$  与  $y_2 = \cos 2x$  均为方程的解.

$$\text{又 } \frac{y_2}{y_1} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cot x \neq \text{常数},$$

故  $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$  是方程的通解.

二阶非齐次线性方程  $y'' + p y' + q y = f(x)$  的通解也有与一阶齐次线性方程的通解类似的结构.

**定理 2** 设  $Y$  是二阶常系数线性齐次方程

$$y'' + p y' + q y = 0$$

的通解,而  $y^*$  是二阶常系数线性非齐次线性方程

$$y'' + p y' + q y = f(x)$$

的一个特解,那么

$$y = Y + y^*$$

是二阶线性非齐次微分方程的通解.

**证明** 将  $y = Y + y^*$  代入非齐次方程,有

$$y'' + p y' + q y$$

$$= (Y'' + y^{*''}) + p(Y' + y^{*'}) + q(Y + y^*)$$

$$= [Y'' + pY + qY] + [y^{*''} + p y^{*'} + q y^*]$$