非线性不适定问题的求解方法及其应用

韩 波 李 莉/著

科学出版社

非线性不适定问题的求解方法及其应用

韩 波 李 莉 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书系统地介绍了非线性不适定问题的正则化求解方法，及其在数学物理研究中的应用. 主要包括非线性不适定问题的基本概念，求解非线性不适定算子方程的正则化方法、迭代法、动力系统方法、优化方法、同伦方法以及水平集方法，并在最后一部分介绍了反问题的研究方法在应用中的最新进展 书中内容包含了作者及其学生近几年来的相关工作

本书适合数学物理专业的科研人员、大学教师使用 亦可供从事科学和工程领域中反问题计算方法研究的科研人员，高等院校的教师、研究生和高年级的本科生参考

图书在版编目(CIP)数据

非线性不适定问题的求解方法及其应用/韩波，李莉著 —北京 科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-030061-4

I ①非· II ①韩··· ②李··· III ①非线性-数学物理方程 IV ①O175 24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 010676 号

责任编辑. 张中兴 / 责任校对：朱兰光

责任印制 张克忠 / 封面设计 耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码 100717

http //www sciencep com

北京市安泰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 1 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)

2011 年 1 月第一次印刷 印张：17 3/4

印数：1—2 500 字数：350 000

定价：39.00 元

前　言

数学物理反问题的提出由来已久, 但一直都没有引起人们的重视. 尽管开始对其展开深入研究仅有二三十年的时间, 但是它已成为应用数学中发展和成长最快的领域之一. 近年来, 受其他学科和众多工程技术领域应用需要的驱动, 该问题引起了国内外学者的极大兴趣和高度重视. 迄今, 它已发展成为横跨计算数学、应用数学和系统科学的一个热门学科. 数学物理反问题是相对于数学物理方程 (正问题) 提出的, 在医学成像、模式识别、信号 (图像) 处理、经济决策、工业控制、地球物理等众多领域都有非常广泛的应用. 正问题是由已知方程的定解条件求定解问题的解, 即由输入求输出; 而反问题则是"逆向思维", 由部分已知信息求定解问题中的某些未知量, 如参数、方程系数等, 即由输出求输入. 正问题和反问题是相对的. 与正问题相比, 反问题的发展历程较短, 原因就是大多数反问题都具有不适定性, 而人们也一直认为研究不适定问题是没有意义的.

数学物理反问题引起数学工作者和工程技术人员的关注源于近年来该类问题在实际应用中的普遍存在和不适定问题求解理论的发展. 1923 年, 著名数学家 Hadamard 给出了"适定性"的概念: 一个问题的解如果存在、唯一且稳定, 那么这个数学问题是适定的. 三个条件缺一不可. 若三个条件中至少有一个不满足, 则破坏了问题的"相容性", 因而称为不适定的. 因此, 亟需寻找有效的方法解决实际问题的不适定性. 20 世纪 60 年代中期, 苏联科学院院士吉洪诺夫 (A.N.Tikhonov) 最先提出了求解不适定问题的正则化方法. 从而将对反问题和不适定问题的研究工作带入了一个新时代. 所谓正则化方法是用一族与原问题相邻近的适定问题去逼近原问题的解. 在数学上, 许多线性和非线性不适定问题, 可以归结为第一类算子方程的求解问题. 如何正则化、选取恰当的正则化参数、快速地获取稳定的解是正则化理论所关注的焦点问题.

目前, 线性不适定问题的理论研究已基本完善, 研究的重点集中在非线性反问题的求解、局部正则化方法、有界变分正则化方法、全变分正则化、稀疏约束正则化、混合正则化方法、非线性不适定问题的快速算法、大规模反问题计算、工程实际中的反问题模型研究与实际资料处理等问题上. 由于受到非线性和不适定性的双重困扰, 再加之数据不完全和噪声的存在, 反问题很难求解, 必须发展具有"综合治理"能力的联合反演方法. 哈尔滨工业大学是国内最早开展反问题研究的单位之一, 在数值反演的广义脉冲谱方法 (GPST)、同伦方法、小波方法、多重网格方法等方面都有重要的成果, 并在石油勘探和工程物探的研究工作方面为国家作出过重

大贡献. 此外, 在相关数学问题研究方面, 中国科学院、复旦大学、吉林大学、上海大学、东南大学、兰州大学以及中山大学等单位也都从不同的层面在这方面展开研究, 并取得了很好的研究成果.

基于现有的研究成果, 本书将以综述的形式介绍求解数学物理反问题的一些基本理论和方法. 鉴于线性不适定问题的研究已较完善, 本书将重点放在非线性不适定问题的正则化方法的研究上面. 为了书中知识体系的完备性, 我们将尽可能地涵盖正则化方法中所需的泛函分析的相关理论, 使本书的结构自成体系.

本书结构安排如下：第 1 章简要介绍反问题的研究背景及国内外的研究现状, 使读者对数学物理反问题的发展状况有一个大致的了解; 第 2 章将所需泛函分析中的相关理论作为后续章节正则化方法研究的预备知识, 在重温泛函知识的同时, 也为后面掌握正则化方法奠定了基础; 第 3 章和第 4 章分别介绍线性和非线性不适定问题及其相应的正则化技巧; 从第 5 章到第 11 章, 介绍了我们近几年的研究工作, 部分内容已在国内外重要期刊发表, 特别是第 11 章, 是反演方法在实际工程中的应用. 希望通过这几章的介绍, 能够使读者对数学物理反问题的发展现状有一个大概的了解, 同时也希望本书能够抛砖引玉, 使读者提出更有效的正则化方法解决更多领域的实际问题.

我的博士研究生傅红笋、陈勇、李莉、丁亮、窦以鑫、王薇、曹莉等对本书的组织及内容提供了有益的补充, 在此表示感谢!

由于本人学识有限, 涉猎的范围不是很全面, 恳请有关学者不吝赐教.

韩　波

2010 年 10 月于哈尔滨工业大学

目　录

第 1 章　反问题的研究背景

1.1　不适定问题

微分方程是描述与刻画物理过程、系统状态、社会与生物现象的有力工具. “探求自然界的奥秘在于解微分方程” (牛顿). 在不同领域中, 人们经常会遇到量之间的转化以及问题的对称. 最常见的量的转化是已知量与未知量的转化, 如原问题的已知量变成新问题的未知量, 我们把这样的一对问题称为正、反问题. 一般而言, 微分方程的中心任务是寻求满足初、边值条件的微分方程的解, 这就是所谓的微分方程正问题. 通常, 正问题是更为经典的问题. 微分方程反问题是指由“果”反推“因”, 即已知或部分已知微分方程的解反求方程中的未知量. 正问题与反问题是相互依存、相互决定的. 近年来, 反问题已经成为应用数学领域迅速发展的一门理论, 在医疗、物理、信号探测等方面都有重要的应用. 例如, 在计算机 X 射线断层扫描技术 (CT) 中, 当 X 射线穿过人体时, 通过测量 X 射线的数据, 我们希望能够较准确地描绘体内的结构; 地球物理勘探中的反问题就是借助在地球表面接收到的主动场或被动场的数据, 经过处理判断地层结构; 工程中的最优与定向设计是按设计的要求确定设计参数; 遥测与遥感技术是通过接收 (反射) 回波信息去判断人们感兴趣的物体的形状和参数. 工程中的控制、识别也都属于自果推因的范畴. 如果一个问题的阐述涉及另一个问题的解, 则这两个问题互为反问题. 通常将反问题分为如下两大类:

(1) 如果要寻求观测结果的起源, 称为**识别问题或重构问题**;

(2) 如果寻求待求结果的可能起因, 则称为**控制问题**.

数学中的所有领域几乎都可以提出反问题. 而反问题提法的正确性、其求解方法, 以及它的稳定性问题都是微分方程反问题研究的主要方向. 数学家阿达马 (Hadamard) 在 1923 年针对数学物理方程 (偏微分方程) 中的定解问题提出了适定性的概念, 称满足如下三个条件的数学问题 (可以将其考虑为方程或优化问题) 是**适定的**:

存在性　对所有 (适当的) 数据, 问题的解存在.

唯一性　对所有 (适当的) 数据, 解都唯一.

稳定性　问题的解连续依赖于给定数据.

定义 1.1.1 [1]　*X 和 Y 是赋范线性空间, $K: X \to Y$ 是 (线性或非线性) 映射. 方程 $Kx = y$ 叫做**适定的**, 如果下面所有条件都成立:*

(1) 对每个 $y \in Y$, 存在 $x^* \in X$ 使得 $Kx^* = y$;

(2) 对每个 $y \in Y$, 方程 $Kx = y$ 的解唯一, 且 $x^* \in X$;

(3) 方程的解 x^* 连续依赖于 y, 即对每个满足 $Kx_n \to Kx^*(n \to \infty)$ 的序列 $x_n \in X$, 都有 $x_n \to x^*(n \to \infty)$.

至少有一个条件不满足, 则称为**不适定的**.

对非线性问题而言, 大多数情况下, 上述第二个条件不成立, 因而大多数的非线性反问题都是不适定的. 适定性概念中, "解连续依赖于给定数据"中的"数据"是指在定解问题中出现的一切已知量, 如微分方程中的参数、初始条件或边界条件等, 当数据有微小变化时, 解的改变量也很小.

从数学角度来看, 克服解的不存在性和解的不唯一性, 可以由扩大解空间和对解增加附加条件达到. 若第三条的稳定性不满足, 那么计算得到的解与真解相差甚远, 只有增加关于解的附加信息才能克服这一困难, 通常这是研究不适定问题的关键所在.

此外, 非线性、计算量大、解不唯一也是反问题中存在的问题. 因此, 稳定的、抗噪的、收敛域大的和计算量小的反演方法是人们自反问题发展以来一直都在探求的.

很长时间以来, 人们认为物理问题都是适定的, 直到 20 世纪 50 年代中期, 在解释地球物理观测数据的触发下, 人们才开始关注问题的不适定性. 人们相继发现波动方程、热传导方程和椭圆型方程的三类古典不适定问题并非没有实际意义. 这就促使人们对不适定问题进行研究, 从而开拓出了一个新的领域.

从 20 世纪 60 年代开始, 尤其是近十多年来控制、识别、遥感、资源勘探、大气测量、生物器官状态的分析、疾病的诊断及量子力学等自然科学与工程技术各领域中提出了很多微分方程反问题. 这些反问题在 Hadamard 的意义下通常是不适定的. 由于反问题的刺激, 不适定问题的研究大大推向前一步. 而不适定问题的研究为解决反问题提供了理论和方法. 应当指出"不适定"概念现在已经不局限于数学物理方程的问题了, 凡是"解不连续地依赖于数据"的一切数学问题都称为不适定问题.

下面考虑几个典型的不适定问题的例子.

例 1.1.1 [2] **(第一类积分方程)** 考虑如下方程:

$$g(x) = \int_0^1 k(x - x')f(x')\mathrm{d}x' = (\mathcal{K}f)(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1.1}$$

这是二维光学成像在一维中的模型, 其中 f 代表光源强度, g 代表图像强度. 核 k 表征成像时产生的模糊效应. 大气湍流对光传播的长期平均效应是由高斯 (Gauss) 核模拟的. 其一维形式可表述为

$$k(x) = C\exp(-x^2/2\gamma^2),$$

其中, C 和 γ 都是正参数. 与方程 (1.1) 相关的正问题是: 给定源 f 和核 k, 求解模糊的图像 g. 而我们感兴趣的还是反问题: 给定核 k 和模糊的图像 g, 确定源 f. 乍一看, 这个反问题的估计解似乎可以直接求出来. 可以通过简单地离散化方程 (1.1) 得到一个离散的线性系统 $Kf = d$. 比如, 如果利用中点积分法, K 的迹是

$$[K]_{ij} = hC\exp\left(-\frac{((i-j)h)^2}{2\gamma^2}\right), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

其中 $h = 1/n$. 如果矩阵 K 是非奇异的, 我们可以计算出 f 的离散估计值 $K^{-1}d$. 为了能够得到准确的积分值, n 必须相对较大. 然而, 当 n 越来越大时, 矩阵 K 的不适定性却越来越强, 所以 d 中的误差也被扩大了. 由于积分所产生的误差是可以得到控制并被避免的. 其他的误差, 如记录成像的设备所产生的误差, 实际上是控制不了的. 所以, 这种直接求解的方法可能就失效了.

例 1.1.2 (**拉普拉斯 (Laplace) 方程的柯西 (Cauchy) 问题**) 这是 Hadamard 给出的经典例子. 求 Laplace 方程的解 u,

$$\Delta u(x, y) := \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R} \times [0, \infty)$$

满足

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = g(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

其中 f 和 g 是已知函数. 当 $f(x) = 0$, $g(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx)$ 时, (唯一) 解是

$$u(x, y) = \frac{1}{n^2}\sin(nx)\sin\mathrm{h}(ny), \quad x \in \mathbf{R}, y \geqslant 0.$$

因此,

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\{|f(x)| + |g(x)|\} = \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

但是, 对于所有的 $y > 0$,

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}|u(x, y)| = \frac{1}{n^2}\sinh(ny) \to \infty, \quad n \to \infty,$$

即当数据误差趋于零时, 解的误差趋近于无穷.

很多反问题都要归结为第一类具有弱奇异核的积分, 这样的积分算子对于其定义的拓扑都是紧的, 下面的例子经常被文献引用.

例 1.1.3 (**微分**) 已知 $y(0) = 0$, 正问题是找属于连续函数 $C[0, 1]$ 空间上 y 的积分, 即计算

$$y(t) = \int_0^t x(s)\mathrm{d}s, \quad t \in [0, 1].$$

反问题是: 给出区间 $[0, 1]$ 上连续可导函数 y 且 $y(0) = 0$, 欲求 $x = y'$. 所以, 这就需要我们求解积分方程 $Kx = y$, 其中 $K : C[0, 1] \to C[0, 1]$, 且

$$(Kx)(t) := \int_0^t x(s)\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1], x \in C[0,1],$$

这里 $C[0,1]$ 上 $\|x\|_\infty := \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|$.

假设 y 是连续可导的, $y(0)=0$ 时, $Kx=y$ 的解是 $x=y'$. 如果 x 是 $Kx=y$ 的精确解, 我们在范数 $\|\cdot\|_\infty$ 下扰动 y, 那么右边的扰动 $\tilde{y}$ 不一定是可微的, 而且, 即使是扰动数据的解也不一定接近真解. 比如, δ 很小, 用 $\delta\sin(t/\delta^2)$ 扰动 y, 那么数据误差在 $\|\cdot\|_\infty$ 下是 δ, 而解的误差是 $1/\delta$, 因此问题 $(K, C[0,1], C[0,1])$ 是不适定的.

如果方程右端是一个不同的空间 $Y := \{y \in C^1[0,1] | y(0)=0\}$, 用 $\|x\|_{C^1} := \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x'(t)|$ 定义 Y. 如果关于范数 $\|x\|_{C^1}$, 将右端的 y 做一扰动, 那么由于 $K: C[0,1] \to Y$ 是有界可逆的, 问题 $(K, C[0,1], Y)$ 是适定的. 这个例子说明适定性依赖于空间的拓扑性质.

例 1.1.4 (积分)　积分方程

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{ts} x(s)\mathrm{d}s = y(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

是唯一可解的, 其中 $y(t) = (\exp(t+1)-1)/(t+1)$, 解 $x(t) = \exp(t)$.

用梯形公式近似积分得

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{ts} x(s)\mathrm{d}s = h\left(\frac{1}{2}x(0) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t x(1) + \sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{e}^{jht} x(jh)\right),$$

且 $h := 1/n$. 对 $t = ih$, 得线性系统

$$h\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{ih} x_n + \sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{e}^{jih^2} x_j\right) = y(ih), \quad i = 0, \cdots, n.$$

x_i 是 $x(ih)$ 的近似. 表 1.1 表明在 $t=0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$ 时, 真解 $x(t)$ 和近似解 x_i 的误差. 这里的 i 选取使得 $ih = t$.

从表 1.1 可看出, 近似解与真解没有关系, 而且离散的程度越好, 得到的结果越差.

表 1.1　精确解与真解间的误差

t	$n=4$	$n=8$	$n=16$	$n=32$
0	0.44	−3.08	1.08	−38.21
0.25	−0.67	−38.16	−25.17	50.91
0.5	0.95	−75.44	31.24	−116.45
0.75	−1.02	22.15	20.03	103.45
1	1.09	−0.16	−4.23	−126.87

在上面的例子中, 问题是解第一类积分方程. 在核具有弱条件下, 积分算子在很多自然拓扑中都是紧的. 下面的定理说明具有紧算子 K 的线性方程 $Kx = y$ 通常是不适定的.

定理 1.1.1 [1] 令 X 和 Y 是赋范空间, $K : X \to Y$ 是线性紧算子, 且具有零核 $\mathcal{N}(K) := \{x \in X | Kx = 0\}$. 令空间 $X/\mathcal{N}(K)$ 的维数是无穷的, 那么存在序列 $\{x_n\} \subset X$ 使得 $Kx_n \to 0$, 但是序列 $\{x_n\}$ 不收敛. 甚至可以找到 $\{x_n\}$, 使得 $\|x_n\| \to \infty$. 特别, 当 K 是一对一的时候, 逆算子 $K^{-1} : Y \supset K(x) \to X$ 是无界的.

例 1.1.5 (**参数识别**) 由观测值 u 重构偏微分方程中的未知系数, 通常把这一类问题称作**参数识别问题**. 地下水过滤就是这类问题中的一个较简单的例子. 通常可以用椭圆方程来描述这个问题

$$-\mathrm{div}(a\nabla u) = f, \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbf{R}^d,$$

其中, u 是未知的, f 是给定的源, a 是液压介电常数. 正问题是由给定的 a 和 $\partial\Omega$ 上的边界条件, 求解偏微分方程的解 u, 反问题是由受到干扰的解的测量数据

$$u^\delta(x) = u(x) + n^\delta, \quad x \in \Omega,$$

重构 Ω 上的未知函数 a.

如果对每个参数 a, 正问题的解都是唯一的, 那么我们就可以定义一个与参数和解有关的映射 $a \mapsto u_a$, 其中 u_a 就是给定特定的 a 时问题的解. 我们注意到尽管正问题是线性的, 但是反问题通常都是非线性的. 例如, 在地下水过滤问题中, $u_{2a} = \dfrac{1}{2}u_a$, 也就是说, $u_{2a} \neq 2u_a$, 因此, 该问题不是线性的.

参数识别问题的唯一性问题通常可以表征为识别问题. 当定义区域 $\Omega = [0,1]$, 边界条件分别为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(0) = 0$, $u(1) = 0$ 时, 通过关于 x 积分, 可以求得该问题的解

$$a(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x) = \int_0^x f(y)\mathrm{d}y.$$

所以, 对每个 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x) \neq 0$ 的 x, 参数 a 都是唯一决定的. 另一方面, 对源 f 还有许多非常实际的假设条件, 这些条件都保证了 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)$ 几乎处处不等于 0. 例如, 若 f 的不定积分在 $(0,1)$ 上是正的, 则上面的公式就表明 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x) \neq 0$. 另外, 如果 $f(x)$ 对几乎每一个 x 都不等于 0, 那么在开区间 $I \subset [0,1]$ 上, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x) \neq 0$. 因为如果 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x) = 0$, 那么

$$0 = \frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)\right) = f(x), \quad x \in I.$$

这就产生矛盾了. 如果 $f \equiv 0$, 那么对任意的 a, $u \equiv 0$, 并且 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \equiv 0$, 所以不可能重构参数. f 的选择问题对于参数的重构来说非常重要.

从求解公式

$$a(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x f(y)\mathrm{d}y}{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)}$$

来看, 除了对数据 u 微分而产生的线性不适定以外, 求商也会产生非线性不适定性, 从而导致 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 的较小的值产生的误差可能会比大的导数值 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 所产生的误差还要大.

在参数识别问题中还有一类有意思的问题就是稳定性估计, 即考虑在特定子集上逆算子的连续性问题. 对于一个不适定问题而言, 逆算子 (如果它存在的话) 不连续, 但是它在定义区间的紧子集上是连续的. 例如, 考虑这样一个紧子集

$$\mathcal{C}_{\gamma,M} = \left\{ u \in C^2([0,1]), \|u\|_{C^2} \leqslant M,\ \text{在}\ \ [0,1]\ \ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \geqslant \gamma > 0\ \text{中} \right\}$$

给定参数 a_j, u_j 是正问题的解, $j = 1, 2$. 由上面的反演公式, 可得

$$a_1(x) - a_2(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x f(y)\mathrm{d}y}{\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}(x)\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}(x)} \left(\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}(x) - \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}(x) \right),$$

则

$$\int_0^1 (a_1(x) - a_2(x))^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{\left(\displaystyle\int_0^1 |f(y)|\mathrm{d}y\right)^2}{\gamma^4} \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}(x) - \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}(x) \right)^2 \mathrm{d}x.$$

由分部积分和 Cauchy–Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}(x) - \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}(x) \right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (u_1 - u_2) \left(\frac{\mathrm{d}^2 u_2}{\mathrm{d}x}^2(x) - \frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}x}^2(x) \right) \mathrm{d}x \\
&\leqslant \sqrt{\int_0^1 (u_1(x) - u_2(x))^2 \mathrm{d}x} \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}^2 u_2}{\mathrm{d}x}(x) - \frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}x}(x) \right)^2 \mathrm{d}x} \\
&\leqslant 2M \|u_1 - u_2\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\|a_1 - a_2\|_{L^2} \leqslant \frac{\|f\|_{L^1}}{\gamma^2} \sqrt{2M} \|u_1 - u_2\|_{L^2}^{1/2},$$

即逆算子 $G: u \in \mathcal{C}_\gamma \to a$ 是局部 Hölder 连续的. 当 M 的值变大时, Hölder 估计式中的常系数也随之增加, 我们很容易注意这对于解的光滑性会产生什么样的影响. 而且估计式中的 $\dfrac{1}{\gamma^2}$ 项, 也反映了非线性不稳定性, 即 u 越接近于 0, 常系数变得越大.

1.2 反问题的国内外研究现状

对于非线性显式及隐式不适定反问题的研究 (即解 x^* 不连续依赖于数据 y^δ) 要求应用一些特殊的正则化方法. 目前, 对于线性不适定问题, 正则化理论已经相当完备[3~10], 但是对于非线性不适定问题的正则化理论还有许多问题没有解决. 其中对于非线性不适定问题来讲, 目前掌握的最好的一类正则化方法是 Tiknonov 正则化方法[3,11~16] 和迭代法.

具备良好稳定性的 Landweber 迭代法具有很高的研究价值. 1951 年, Landweber[17] 首次提出了解决线性问题的 Landweber 迭代法. 但是在实际中, 我们所接触的问题大多是非线性的. 因而, 研究非线性不适定问题, 无论在理论上, 还是在实际中, 意义都是十分重大的. 1995 年, Scherzer[18] 提出了解决非线性问题的 Landweber 迭代法的收敛标准.

1998 年, Scherzer 在原有迭代法的基础上增加了一项 $-\alpha_k(x_k^\delta - \zeta)$, 以提高 Landweber 迭代法的稳定性[19].

2000 年, Neubauer 推导了 Landweber 迭代法在希尔伯特 (Hilbert) 尺度下的收敛率, 并用有限维空间估计无限维空间, 且给出了有限维估计的收敛分析[20]. 他受到文献 [15] 的启发, 用 $F'(x_k^\delta)^*: X_s \to Y$ 替换 $F'(x_k^\delta)^*: X \to Y$, 其中 X_s 是 X 的子空间, 且 X_s 中的范数比 X 中的范数强, 即以更强的范数来提高收敛速度. 因此经改善后, 研究的 Hilbert 尺度下的迭代方程为

$$x_{k+1}^\delta = x_k^\delta + L^{-2s}F'(x_k^\delta)^*(y^\delta - F(x_k^\delta)), \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

Estatico 提出运用内外两层迭代[21]. 外层迭代是 Newton 法, 内层迭代是针对线性问题的截断 Landweber 正则化方法. 内层截断 Landweber 正则化方法正则化并加速外层 Newton 迭代的收敛.

Ramlau 在前几步迭代中用 F 的粗糙估计 F_m 替代 F, 以期在最初的迭代步中得到更好的初值[22].

2001 年, Jin 主要研究 Landweber 迭代法的有限维估计[23], 归结为如下形式:

$$x_k^{\delta,n} - P_nF'(x_{k-1}^{\delta,n})^*(F(x_{k-1}^{\delta,n}) - y^\delta), \quad k = 1, 2, \cdots,$$

并将原有的终止原则修正, 提出了新的终止原则. 进而在某些条件下, 可得到收敛性、收敛率及伪最优化估计.

1992 年, King 采用多水平算法解不适定问题[24].

1998 年, Scherzer 也采用多水平思想, 在迭代过程中选取合适的离散化参数, 并提出了一种合理的迭代初值的选取方法[25].

2002 年, 张军等提出了 Hilbert 尺度下求解非线性不适定问题的多水平迭代法[26].

但多年来学者对于 Landweber 迭代法的研究发现, 虽然其相对其他正则化方法有较好的稳定性, 但收敛速度较慢.

2007 年, 李莉等利用二级 Gauss 型显方法, 提出了 Runge–Kutta(R–K) 型 Landweber 迭代法, 分析了方法的收敛性, 并证明了方法的稳定性及收敛率 $O(\delta^{2/3})$[27].

在此基础上, 2008 年, 王薇等考虑一般情况, 用 m 级 Runge–Kutta 法求解连续型 Landweber 方法:

$$\dot{x}(t) = -F'(x(t))^*(F(x(t)) - y), \quad x(0) = x_0. \tag{1.2}$$

对此连续型 Landweber 方法 (1.2) 添加某一修正项 $-\alpha(t)(x(t) - \zeta)$, 对此初值问题应用步长为 1 的二阶 Runge–Kutta 方法, 得到 R–K 型修正 Landweber 迭代法[28]. 不仅分析了方法的收敛性, 而且通过具体的数值算例, 与 Scherzer 提出的修正的 Landweber 迭代法相比较, 所提出的方法稳定且大范围收敛. 不足之处是在方法的每一迭代步中, 需要计算算子 F 的两次 Fréchet 导数. 随后, 2009 年, 又从三阶的中点 Newton 法出发, 提出了一个隐式的 Landweber 方法.

2007 年, 徐静将萨马斯基技巧应用到 Landweber 迭代法中, 得到了修正的 Landweber 迭代法[29]

$$\begin{cases} x_{k,i+1} = x_{k,i} + F'(x_k)^*[y - F(x_{k,i})], & i = 0, 1, \cdots, m-1, \\ x_k = x_{k,0}, \quad x_{k+1} = x_{k,m}, & k = 0, 1, \cdots. \end{cases}$$

加快了 Landweber 迭代法的收敛速度.

在 Landweber 迭代法中, 算子的 Fréchet 导数在计算中占有较大的分量. 1995 年, Scherzer 将非线性条件减弱, 提出了一个修正的 Landweber 迭代法

$$q_{k+1}^\delta = q_k^\delta + \lambda G(q_k^\delta)^*(z^\delta - u_{q_k^\delta}).$$

这个方法虽然不需要算子 F 是 Fréchet 可微的, 但是, 仍然需要满足类似于非线性条件的不等式

$$\|F(\tilde{q}) - F(q) - G(q)(\tilde{q} - q)\| \leqslant \eta \|F(\tilde{q}) - F(q)\|, \quad \tilde{q}, q \in \mathcal{B}_\rho(q_0), \eta < \frac{1}{2}.$$