大学高等数学类规划教材配套用书

# 线性代数

## 学习指导与习题解答

张 友 袁学刚 编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

# 线性代数

## 学习指导与习题解答

张 友 袁学刚 编著

大连理工大学出版社
DALIANUNMERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数学习指导与习题解答 / 张友，袁学刚编著
—大连：大连理工大学出版社，2011.2
ISBN 978-7-5611-6020-6

Ⅰ.①线… Ⅱ.①张… ②袁… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 017107 号

大连理工大学出版社出版

地址：大连市软件园路 80 号　邮政编码：116023
发行：0411-84708842　邮购：0411-84703636　传真：0411-84701466
E-mail：dutp@dutp.cn　URL：http://www.dutp.cn
大连华伟印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：140mm×203mm　　印张：8.625　　字数：312 千字
2011 年 2 月第 1 版　　2011 年 2 月第 1 次印刷

责任编辑：王　伟　　责任校对：婕　琳
封面设计：孙　元

ISBN 978-7-5611-6020-6　　定　价：24.00 元

# 前　言

《线性代数学习指导与习题解答》是大学高等数学类规划教材《线性代数》配套的辅助用书.编写本书的目的是让学生在学习原教材的基础上,进一步开阔眼界,拓展思路,多实践,多练习,以增强分析问题和解决问题的能力.本书具有以下几个特点:

1.紧扣大纲,突出重点.每章都包含基本要求与内容提要,其中既有对本章重点内容的简略概括和串讲,又有对本章学习的具体要求.目的在于使学生明确重点、难点,弄清各知识点之间的相互联系,对本章有一个全局性的认识和把握.基本要求是根据《线性代数》的教学大纲和考研大纲的要求提出的,强调学生按照教学大纲的要求进行学习.

2.选题广泛且代表性强.在例题选择和编排上,编者参考了大量教科书、习题集以及最近几年的考研试题和考研辅导书,从中精选了160多道例题.对题目按题型进行归纳、分类,总结了各种题型的解法,每种题型的解法都具有一定的代表性.读者可在掌握这些类型的解题方法后,举一反三,触类旁通.

3.一题多解,方法灵活.例题分析中,注重一题多解,大部分题目给出了两种以上解法.对各类题型的解法都有分析,有小结,以引导学生多方位思考,开阔解题思路,使所学知识融会贯通,能综合灵活地解决问题.

4.紧密结合原教材.在章节和内容的编排上与原教材结合紧密,

定义和概念的叙述以及符号的使用都与原教材保持一致，便于学生学习．每章内容的编排总结比原教材更加深入，更有条理，易于学生理解和掌握．

另外还选编了适量的自测习题，并给出参考答案和提示，供学生练习，以巩固所学知识，提高独立解题能力，并检测学生对所学知识的掌握程度．

本书可作为学习《线性代数》课程的参考用书，也可作为考研复习的辅导用书．

本书由大连民族学院理学院组织编写，由张友、袁学刚编著．

笔者虽尽心努力，但由于水平有限，难免有疏漏和不足之处，欢迎读者批评指正，特此致谢．

编著者

2011年1月

# 目　录

# 第1章　行列式

本章的重点是行列式的计算，要求在理解 $n$ 阶行列式的概念，掌握行列式性质的基础上，熟练正确地计算三阶、四阶及简单的 $n$ 阶行列式.

计算行列式的基本思路是：按行(列)展开公式，通过降阶来计算. 但在展开之前往往先利用行列式性质通过对行列式的恒等变形，使行列式中出现较多的零和公因式，从而简化计算.

常用的行列式计算方法和技巧有：直接利用定义法，化三角形法，降阶法，递推法，数学归纳法，利用已知行列式法.

行列式在本章的应用是求解线性方程组(克莱姆法则). 要求掌握克莱姆法则并注意克莱姆法则应用的条件.

## 基本要求

1. 理解行列式的定义.
2. 掌握行列式的性质.
3. 熟练掌握行列式的计算方法.
4. 掌握克莱姆法则.

## 内容提要

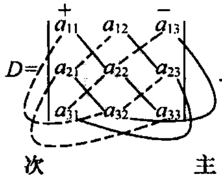
**1. 行列式的定义**

(1)二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(2)三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$



—— 三阶行列式

(3)$n$ 阶行列式

$n$ 阶行列式等于它的任意一行(列)的各元素与其对应代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

(4)代数余子式

在 $n$ 阶行列式中,划去元素 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 所在的第 $i$ 行和第 $j$ 列后,剩下的元素按原来的顺序构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 $a_{ij}$ 的余子式,记作 $M_{ij}$,即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

并称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式.

常用公式:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

**2. 行列式的性质**

**性质 1(转置性)** 行列式与它的转置行列式相等.

**性质 2(反号性)** 互换行列式两行(列)的元素,行列式改变符号.

**推论 1** 行列式中有两行(列)对应元素相等,行列式的值为零.

**性质 3(倍乘性)** 行列式中某一行(列)的所有元素都乘以同一数 $k$,等于

用数 $k$ 乘此行列式.

**推论 2**　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号外面.

**推论 3**　若行列式中有一行(列)的元素全为零,则行列式的值为零.

**推论 4**　若行列式中有两行(列)对应元素成比例,则行列式的值为零.

**性质 4(可加性)**　若行列式中某一行(列)的元素 $a_{ij}$ 都可分解为两元素 $b_{ij}$ 与 $c_{ij}$ 之和,即 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$ $(j=1,2,\cdots,n,1\leqslant i\leqslant n)$,则该行列式可分解为相应的两个行列式之和.

**性质 5(倍加性)**　行列式任一行(列)的各元素同乘以一个常数 $k$ 后加到另一行(列)对应的元素上,行列式的值不变.

**3. 行列式的计算**

计算行列式的常见方法有:

(1)利用定义计算行列式;

(2)利用行列式性质化简、计算行列式;

(3)利用递推公式或数学归纳法计算行列式.

**4. 一些特殊行列式的值**

(1)上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2)下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3)对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(4) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(5) $$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(6) $$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(7)设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D=D_1D_2$.

(8)范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

其中 $\prod$ 为连乘积的符号.

**5. 行列式的应用**

**定理 1(克莱姆(Cramer)法则)** 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1}$$

的系数行列式 $D\neq0$,则方程组有唯一解;且

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j$ 是把系数行列式 $D$ 中第 $j$ 列的元素用常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代替后所得到的 $n$ 阶行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

**定理 1′**　方程组(1)无解或至少有两个不同的解,则它的系数行列式 $D=0$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}\tag{2}$$

**定理 2**　如果齐次线性方程组(2)的系数行列式 $D\neq0$,则它有唯一零解.

**定理 2′**　如果齐次线性方程组(2)有非零解,则其系数行列式 $D=0$.

## 课后习题解答

### 作业题一解答

**1.** 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & 1 \\ -1 & -\sqrt{a} \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 1 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;　　(6) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$； (8) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$.

**解** (1) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & 1 \\ -1 & -\sqrt{a} \end{vmatrix}=1-a$；

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$；

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0;$$

(4) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 1 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12};$$

(5) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=-3;$$

(6) $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=48;$$

(7) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 10 \\ 3 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 15 \end{vmatrix} = 90;$$

(8) $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & a+b \end{vmatrix} = 0$$

**2.** 计算下列 $n$ 阶行列式

(1) $$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix};$$

(2) $$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \quad (a_1, a_2, \cdots, a_n \neq 0);$$

(3) $$D_n = \begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix};$$

(4) $$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

**解**　(1)按最后一行展开得

$$D_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!$$

(2)(升阶法)

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&1+a_1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&1+a_{n-1}&1\\0&1&\cdots&1&1+a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\-1&a_1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&0&\cdots&a_{n-1}&0\\-1&0&\cdots&0&a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}&1&\cdots&1&1\\0&a_1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1}&1\\0&0&\cdots&0&a_n\end{vmatrix}$$

$$=\Big(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\Big)\prod_{i=1}^{n}a_i$$

(3) $$D_n=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\Big)\begin{vmatrix}1&x_2&\cdots&x_n\\1&x_2-m&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_2&\cdots&x_n-m\end{vmatrix}$$

$$=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\Big)\begin{vmatrix}1&x_2&\cdots&x_n\\0&-m&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-m\end{vmatrix}$$

$$=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\Big)(-m)^{n-1}$$

(4) $$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a&-1&0&\cdots&0&0\\ax&a&-1&\cdots&0&0\\ax^2&ax&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ax^n&ax^{n-1}&ax^{n-2}&\cdots&ax&a\end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & a & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & ax & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & ax & a \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & a+x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & ax+x^2 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x^n & ax^{n-1}+x^n & ax^{n-2} & \cdots & ax & a \end{vmatrix}$$

$$=a(x+a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & x & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x^n & x^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & ax & a \end{vmatrix}$$

$$=a(x+a)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & a & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & ax & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x^{n-1} & ax^{n-2} & ax^{n-3} & \cdots & ax & a \end{vmatrix}$$

$$=a(x+a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & a+x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & ax+x^2 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x^{n-1} & ax^{n-2}+x^{n-1} & ax^{n-3} & \cdots & ax & a \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a(x+a)^n$$

**3. 证明**

(1) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}=(1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b)$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}=0$;

(4) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.

**证明** (1) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1x & b_1 & c_1 \\ b_2x & b_2 & c_2 \\ b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+x^2\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=(1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$

$$=(b-a)(c^3-a^3)-(c-a)(b^3-a^3)$$
$$=(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b);$$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+b+c+d & b & c+d \\ 1 & a+b+c+d & c & a+d \\ 1 & a+b+c+d & d & a+b \\ 1 & a+b+c+d & a & b+c \end{vmatrix} = 0;$

(4)从最后一行起，分别将每一行都乘以 $x$ 后加到其前一行，得

$$\text{左边}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & x^{n-2}+a_{n-1}x^{n-3}+\cdots+a_3x+a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2+a_{n-1}x+a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)\begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(-1)^{n+1}(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)(-1)^{n-1}$$
$$=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

**4.** 已知

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 和 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

**解** 注意 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 等于用 1,1,1,1 替换 $D$ 的第 1 行对应元素所得到的行列式，则

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$