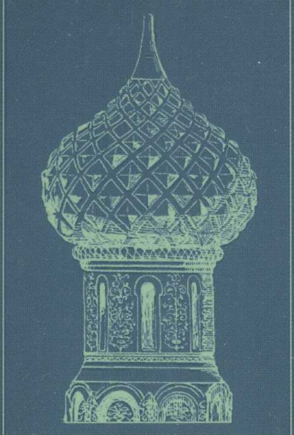

俄罗斯数学
教材选译

数学分析习题集

（根据 2010 年俄文版翻译）

□ Б. П. 吉米多维奇　著
□ 李荣涷　李　植　译

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

数学分析习题集

Shuxue Fenxi Xitiji

（根据 2010 年俄文版翻译）

□ Б. П. 吉米多维奇　著

□ 李荣涑　李　植　译

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

图字: 01–2008–5183 号

Б. П. Демидович,

Сборник задач и упражнений по математическому анализу,

Москва, Издательство Астрель, 2010.

Originally published in Russian in the title:

B. P. Demidovich

Collection of Problems and Exercises in Mathematical Analysis

图书在版编目 (CIP) 数据

数学分析习题集 / (俄罗斯) 吉米多维奇著; 李荣涑, 李植译. — 2 版. — 北京: 高等教育出版社, 2010.7

根据 2010 年俄文版翻译

ISBN 978–7–04–025439–6

I.数… II.①吉…②李…③李… III.数学分析–高等学校–习题 IV. O17–44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 213260 号

策划编辑	赵天夫	责任编辑	蒋 青	封面设计	王凌波
版式设计	余 杨	责任校对	王 雨	责任印制	陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010–58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400–810–0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	涿州市星河印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	1958 年 6 月第 1 版
			2010 年 7 月第 2 版
印 张	25.5	印 次	2010 年 7 月第 1 次印刷
字 数	450 000	定 价	29.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

物 料 号 25439–00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的

链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

序 言

和许多数学家一样, 我也曾两次使用这部广为流传的著作: 首先是别人教我数学分析的时候, 然后是我自己教别人数学分析的时候. 在 Б. П. 吉米多维奇的习题集筹备再版之际, 我深感欣喜, 并以特别感激的心情应其子 В. Б. 吉米多维奇之邀为本版作序.

在此, 我对这本卓越的大学数学分析习题集和它的作者、国立莫斯科大学教授 Б. П. 吉米多维奇作简要的介绍.

鲍里斯·巴甫洛维奇·吉米多维奇 (Борис Павлович Демидович, 1906—1977) 是白俄罗斯人, 他的父亲 П. П. 吉米多维奇是当地的一位教师[①], 在教书的同时也在民族学和地方民俗学领域取得了研究成果, 并因此当选为莫斯科大学自然科学、人类学和民族学爱好者皇家协会的准会员. Б. П. 吉米多维奇本人在国立白俄罗斯大学毕业后也曾当过几年教师, 后来成为国立莫斯科大学数学和力学研究所的研究生. 在研究生期间, 他在 В. В. 斯捷潘诺夫的领导下开展研究, 直接导师则是 В. В. 涅梅茨基. 在很大程度上, 正是他们决定了 Б. П. 吉米多维奇的主要研究领域——经典数学分析和常微分方程理论.

研究生毕业后, Б. П. 吉米多维奇被聘为国立莫斯科大学力学数学系数学分析教研室的助教. 在此后的四十多年时间里, 他一直是这个教研室的成员. 他在副博士[②]论文答辩后成为该教研室的副教授, 在博士论文答辩后晋升为教授. 此外, 他还在莫斯科的其他一些高等院校任教. 他直接培养的学生, 许多已经成为副博士或博士.

Б. П. 吉米多维奇的论文、专著和教科书 (共计约 60 项) 反映了他极强的专业精神和极丰富的教学经验, 这些学术作品获得了国内外的广泛认可. 其中, 具有特殊地位的正是呈献给读者的这本习题集. 它的第一版于 1952 年问世, Б. П. 吉米多维奇为此花费了 15 年以上的时间来收集材料. 该习题集一举成名, 立刻成为大学数学分析的基本教材.

①俄文 учитель 一词一般指中小学教师. —— 译注

②苏联和现在的俄罗斯等国家的副博士 (кандидат наук) 学位一般相当于我们通常所说的博士学位, 而博士学位 (доктор наук) 则是更高一级的学位, 要求学位获得者在相关领域有非同寻常的重要贡献. 在上述国家, 副博士学位拥有者才有资格成为副教授, 博士学位拥有者才有资格成为教授. —— 译注

此后, 作者又进行了一些修订, 但由于这本书的初始结构十分合理, 后续调整并不算大. 至今, 习题集的俄文版已经多次再版, 并被译为多种文字在世界的许多国家使用.

数学的发展带来了新的概念、方法、观念和语言, 它们通常会把个别的事实联系起来. 这也经常涉及那些似乎已经发展完毕的基础分支. 微积分学的发展就完全印证了这个结论, 例如对微分和微分规则的不变性的现代解释, 再如利用微分形式的语言和对微分形式的积分给出牛顿—莱布尼茨公式的现代表述. 目前, 无论在数学分析的习题集中, 还是在必修课上, 都未必总能找到这样的语言和一般形式的斯托克斯公式. 此外, 渐近方法作为一种因其有效性而非常有用的重要数学工具, 也是数学的某些领域所共有的一种方法. 渐近方法的基本内容, 就如同极限理论和泰勒公式那样, 总是希望能在数学分析的习题集中看到. 至于数学分析的较高等的分支, 则要求读者有一定的熟练程度和技巧. 要知道, 演奏者若不精通乐器是不可能演奏一部严肃音乐作品的.

经验已经表明, Б. П. 吉米多维奇的习题集能够让学生在使用经典分析工具的时候获得必要的技能. 本书是高等院校数学分析习题课的基本教材之一.

卓里奇 (В. А. Зорич)
莫斯科大学力学数学系
数学分析教研室教授

目　录

第一部分

一元函数

第一章　分析引论

§1. 实数

1. 数学归纳法. 为了证明某定理对任意的正整数 n 为真, 只需证明下面两点即可: (1) 这定理对 $n=1$ 为真, (2) 设这定理对任何的一个正整数 n 为真, 则它对下一个正整数 $n+1$ 也为真.

2. 分割. 若分有理数为 A 和 B 两类, 使其满足下列条件: (1) 两类均非空集; (2) 每一个有理数必属于一类, 且仅属于一类; (3) 属于 A 类 (下类) 的任一数小于属于 B 类 (上类) 的任何数, 则这样的一个分类法称为分割. (a) 若或是下类 A 有最大的数, 或是上类 B 有最小的数, 则分割 A/B 确定一个有理数; (b) 若 A 类无最大数, 而 B 类亦无最小数, 则分割 A/B 确定一个无理数. 有理数和无理数统称为实数①.

3. 绝对值 (或模). 若 x 为实数, 则用下列条件所确定的非负数 $|x|$, 称为 x 的绝对值 (模)

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y, 以下不等式成立:

$$|x| - |y| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

4. 上确界和下确界. 设 $X = \{x\}$ 为实数的有界集合. 若:

(1) 每一个 $x \in X$②满足不等式

$$x \geqslant m;$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x' \in X$, 使

$$x' < m + \varepsilon,$$

则数 $m = \inf\{x\}$ 称为集合 X的下确界.

同样, 若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leqslant M;$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x'' \in X$, 使

---

①以后若没有相反的附带说明, 数这个字我们将理解为实数.

②符号 $x \in X$ 表示 x 属于集合 X.

$$x'' > M - \varepsilon,$$

则数 $M = \sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界, 则通常说

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

若集合 X 上方无界, 则认为

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5. 绝对误差和相对误差. 设 $a\ (a \neq 0)$ 是被测量的精确数值, 而 x 是这个量的近似值, 则

$$\Delta = |x - a|$$

称为被测量的绝对误差, 而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测量的相对误差.

若数 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字所对应的位数的单位的一半, 则说 x 有 n 位精确的数字.

利用数学归纳法求证下列等式对任何正整数 n 皆成立:

1. $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

4. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

5. 设 $a^{[n]} = a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]} = 1$, 求证

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}_n^m a^{[n-m]} b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个的组合数, 由此推出牛顿二项式公式.

6. 证明伯努利不等式:

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

式中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

7. 证明: 若 $x > -1$, 则不等式

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx \quad (n > 1)$$

为真, 且仅当 $x = 0$ 时, 等式成立.

8. 证明不等式:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n > 1).$$

提示: 利用不等式

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 2 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

9. 证明如下不等式:

(a) $2! \cdot 4! \cdots (2n)! > [(n+1)!]^n\ (n > 1)$;

(b) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

10. 证明如下不等式:

(a) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\ (n\geqslant 2)$;

(b) $n^{n+1}>(n+1)^n\ (n\geqslant 3)$;

(c) $\left|\sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)\right|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x_k\ (0\leqslant x_k\leqslant\pi, k=1,2,\cdots,n)$;

(d) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$.

11. 设 c 为正整数, 而不为整数的平方, 且 A/B 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割, 其中 B 类包含所有满足 $b^2>c$ 的正有理数 b, 而 A 类包含所有其余的有理数. 求证: 在 A 类中无最大数, 而在 B 类中无最小数.

12. 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来建立: A 类包含所有满足 $a^3<2$ 的有理数 a; B 类包含所有其余的有理数. 证明: 在 A 类中无最大数, 而在 B 类中无最小数.

13. 作出适当的分割, 然后证明等式:

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$; (b) $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

14. 建立确定数 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割.

15. 求证: 任何非空且下方有界的数集有下确界, 而且何非空且上方有界的数集有上确界.

16. 证明: 一切有理真分数 $\dfrac{m}{n}$ (式中 m 及 n 为正整数, 且 $0<m<n$) 的集合无最小及最大的元素. 求这个集合的上确界及下确界.

17. 求满足不等式

$$r^2<2$$

的有理数 r 所成集合的下确界和上确界.

18. 设 $\{-x\}$ 为数 $x\in\{x\}$ 的相反数的集合, 证明:

(a) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$; (b) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

19. 设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合, 其中 $x\in\{x\}$ 及 $y\in\{y\}$, 证明等式:

(a) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$; (b) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

20. 设 $\{xy\}$ 为所有 xy 乘积的集合, 其中 $x\in\{x\}$ 及 $y\in\{y\}$, 且 $x\geqslant 0$ 及 $y\geqslant 0$. 证明等式:

(a) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$; (b) $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\sup\{y\}$.

21. 求证不等式:

(a) $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$; (b) $|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$.

解不等式:

22. $|x+1|<0.01$. **23.** $|x-2|\geqslant 10$.

24. $|x|>|x+1|$. **25.** $|2x-1|<|x-1|$.

26. $|x+2|+|x-2| \leqslant 12$.

27. $|x+2|-|x|>1$.

28. $||x+1|-|x-1||<1$.

29. $|x(1-x)|<0.05$.

30. 证明恒等式:

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$$

31. 当测量长度 10 cm 时, 绝对误差为 0.5 mm; 当测量距离 500 km 时, 绝对误差等于 200 m. 那种测量较为精确?

32. 设数 $x=2.3752$ 的相对误差为 1%, 试确定此数包含多少位精确数字?

33. 数 $x=12.125$ 包含 3 位精确数字. 试求此数的相对误差.

34. 矩形的边长等于:

$$x=2.50\ \mathrm{cm}\pm 0.01\ \mathrm{cm}, \quad y=4.00\ \mathrm{cm}\pm 0.02\ \mathrm{cm}.$$

这个矩形的面积 S 界于什么范围内? 当其边长取平均值时, 矩形面积的绝对误差 Δ 和相对误差 δ 是多少?

35. 物体的质量 $P=12.59\ \mathrm{g}\pm 0.01\ \mathrm{g}$, 其体积 $v=3.2\ \mathrm{cm}^3\pm 0.2\ \mathrm{cm}^3$. 若对物体的质量和体积都取其平均值, 试求物体的密度, 并估计密度的绝对误差和相对误差.

36. 圆半径

$$r=7.2\ \mathrm{m}\pm 0.1\ \mathrm{m}.$$

若取 $\pi=3.14$, 则求出的圆面积的最小相对误差是多少?

37. 已测得长方体各边长为

$$x=24.7\ \mathrm{m}\pm 0.2\ \mathrm{m}, \quad y=6.5\ \mathrm{m}\pm 0.1\ \mathrm{m}, \quad z=1.2\ \mathrm{m}\pm 0.1\ \mathrm{m}.$$

此长方体的体积 V 界于什么范围内? 若测量的各结果都取其平均值, 则所求出的体积可能有的绝对误差和相对误差是多少?

38. 正方形的边长 x 满足 $2\ \mathrm{m}<x<3\ \mathrm{m}$. 应当以多小的绝对误差来测量边长, 在计算此正方形的面积时才有可能精确到 $0.001\ \mathrm{m}^2$?

39. 假设矩形每边的长皆不超过 10 m, 为了使根据测量所计算出来的面积与原面积之差不超过 $0.01\ \mathrm{cm}^2$, 问测量矩形的边 x 与 y 时, 许可的绝对误差 Δ 的值多大?

40. 设 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x 和 y 的相对误差, $\delta(xy)$ 为数 xy 的相对误差. 求证

$$\delta(xy) \leqslant \delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

§2. 数列理论

1. 数列极限的概念. 若对于任何的 $\varepsilon>0$, 存在数 $N=N(\varepsilon)$, 使得

$$当\ n>N\ 时, \quad |x_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 有极限 a (或者说, 收敛于 a), 亦即

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a.$$

特别地, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, 则称 x_n 为无穷小量.

没有极限的数列, 称为发散的.