全国硕士研究生入学统一考试

数学考试参考书（数学一和数学二适用）

南開大學出版社

全国硕士研究生入学统一考试

数学考试参考书

（数学一和数学二适用）

2011年版

本书编写组

南開大學 出版社

内容简介

本书是为参加全国硕士研究生入学统一考试数学一、数学二的考生而编写的辅导书。全书依据《考试大纲》,研究历年研究生入学考试试题,分析考生答题特点,归纳、总结考试内容和基本运算方法,并给出例题的解题思路、典型运算错误、特殊解题技巧、题目的变式、题设条件的解说、试题的难度系数及由性质、概念的内涵、外延而导出的一些有效解题技巧,这些构成了本书的特色,成为本书的亮点。这些内容包含着作者多年教学、研究考研试题的成果,是备考生不可多得的复习资料。这些知识及解题思路在通常的辅导书中较少见,但对备考生有很大帮助。

本书是参加全国硕士研究生入学统一考试数学一、数学二的考生的辅导书,也可以作为高等学校相应专业在校学生的学习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书：2011年版／《全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书》编写组编. —天津：南开大学出版社，2010.8

数学一和数学二适用

ISBN 978-7-310-03502-1

Ⅰ.①全… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 136733 号

南开大学出版社出版发行

出版人:肖占鹏

地址:天津市南开区卫津路 94 号　邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339　23500755

营销部传真:(022)23508542　邮购部电话:(022)23502200

*

天津泰宇印务有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷

787×1092 毫米　16 开本　27 印张　2 插页　850 千字

定价:42.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

前　言

近年来，全国硕士研究生入学统一考试数学试题的难易程度在考生中出现了不同的反映，这表明试题的进步。是什么原因使考生出现这种现象？特别是感到试题困难的考生是否思考过下面的问题：不同年份的试题有什么共性？差异在哪里？复习中出现了哪些不足？是否有偏差？

由历年来教育部考试中心发布的统计资料，可以发现一个值得考生深思的问题：为什么试卷中的题目绝大多数是中等难度题与容易题的情形下，考生的成绩却很低？后来的备考生应该从中汲取什么教训？

再读一读《全国硕士研究生入学统一考试数学考试分析》，教育部考试中心针对每年考生现状，在该书中对考生提出“思考与建议”，这几年来，多次建议考生：“注重数学基础。在阅卷中发现一些考生在答题的过程中出现很多很初等的错误，这是基本功不扎实的表现，可能是考生在复习中存在的偏差。一些考生在复习时过分追求难题，而对基本概念、基本方法和基本性质重视不够，投入不足。从试题可以看出，基本概念、基本方法和基本性质是考查的重点，因此要注重基础是复习的方向，要求考生不仅能明确概念的要素、性质和基本特征，还要理解概念与性质的内涵与外延。”教育部考试中心为备考生提出了复习的方向，这是提高考试成绩的根本途径。

针对上述问题，高等教育出版社的编辑经过多方调研确定为备考生提供一套既有针对性又有特色的考研应试对策丛书，目的是提高备考生的复习效率，引导备考生把握住正确的复习方向，从而达到提高考试成绩的效果。参加过多种层次的考试命题，多年来参加研究生的考试辅导工作，曾逐年对数学《教学大纲》、《考试大纲》进行对照研究，对历年研究生入学考试数学试题进行分析。基于对研究生入学考试的性质、命题指导思想的认识和对试题型与内容及难度关系的研究，针对考生中出现的普遍问题及学生学习数学中的常见问题，提出两个现实但又有普遍意义的问题：

1．明确考试的性质，了解命题的指导思想，这些对于坚定把握复习的方向有何意义？

对此，希望考生明确下列五点：

（1）全国硕士研究生入学考试具有两个功能：一是选拔功能；二是从考试的测量功能上看，它又是水平考试，用来测量考生是否达到一定的水平。命题不以《教学大纲》或某一指定的教材为依据，而是以《考试大纲》为依据。《考试大纲》规定的考试内容和考试要求与《教学大纲》不完全相同。<u>《教学大纲》中规定的有些内容并不作考查，而《考试大纲》中的某些考试要求略高于教学要求。</u>

（2）全国硕士研究生入学考试的命题指导思想坚持两个“有利于”，即：一是有利于国家对高层次人才的选拔；二是有利于数学教学质量的提高。因此要求<u>数学考试试题的编制能综合高等学校的教学实际，考试水平既能反映教学的实际水平，也能指导研究生新生明确应当具备的知识和能力。</u>同时正确利用这根“指挥棒”引导高校教学向教养学生应用数学能力的方向发展，使得学生学而有用，学而会用，对教学质量的提高起到积极促进作用。

（3）硕士研究生入学考试的数学试题以考查数学基本概念、基本方法和基本原理为主，并在这个基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合所学知识解决实际问题能力的考查。

硕士研究生入学考试的数学试题就知识内容来说有覆盖面较大的特点，就某试题题型与难度来说有以下特点：

填空题用于考查“三基”及数学的重要性质。一般来说，考研数学试题不出省去解答过程的大计算题，以中等难度的试题为主。

选择题主要考查考生对数学概念、性质的理解，要求考生能进行简单的推理、判定和比较。选择题部分一般不出纯粹的计算题。

解答题考查的是知识之间的有机结合。应用题一般与考生专业相关的背景知识相结合，避免出现不公平性。

(4) 命题有明确的共性，就是保持历年试题难度的稳定性。

(5) 对于数学考试，难度系数在0.3以下的为难题，难度系数在0.3~0.8的视为中等难度的试题，难度系数在0.8以上的视为容易题。试卷难度一般控制在0.5左右。

2. 一个较现实的问题是：如果备考生在复习过基础知识之后，面对一些选出的往年试题，觉得几乎个个题目都困难，这是否会深深地伤害备考生的自信心？如果面对一些选出的往年试题，备考生觉得几乎都能入手，又能否说明备考生已经较好地掌握了基础知识？如果备考生完整地解答了一份往年考试试卷，自己评定出成绩之后，是否能依此判断出掌握知识的程度如何？在以后的时间内能有多少成绩提升的空间？

目前全国有十几种版本的考研真题汇编，但是多数没有帮助备考生解决上述问题。我们对这些问题进行了深入研究，积多年教学与考研辅导经验，共同的认识是：做往年考试真题时，要考察这些题目的知识点、解题思路、特殊的解题技巧、可能出现的运算错误、题目可能的变化形式和题目的难度系数等，以便对这些题目有较全面的了解，知道它在试卷中的作用。经过这样的训练之后，当备考生遇到的几道难度系数都为0.2~0.3，即使备考生几乎每道题都遇到困难，也不至于降低自信心。如果这几道难度系数都为0.6~0.7时，即使备考生基本上都能上手，也不会过于盲目乐观。当备考生做完一套往年的完整试卷之后，可以对照前面提出的问题，检查自己的答案，判定出自己掌握基本知识的程度，找出问题的症结，明确努力的方向，从而判定出自己成绩可能提升的空间。

本书作者在上述共识的基础上，参考教育部考试中心历年发布的《硕士研究生入学考试数学试卷分析》和《数学试题编制实例分析》，结合多年参加考试阅卷及考研辅导积累的资料和经验，以编写出考研辅导的珍品辅导书为目的，使本书体现了以下几个特点：

(1) 归纳内容概要，分析各部分知识的基本问题，归纳基本运算方法，以利于考生理出知识框架。

(2) 对例题给出了解析，分析了解题思路。对部分例题给出了考生的典型运算错误及错误产生的原因，以利于备考生防范。

(3) 对部分例题给出了特殊解题技巧或可能的变化形式，或对例题中某些条件的作用进行解说，或指出某些题目在命制时出于考查知识点或难度等因素而有意放宽题设条件等说明，目的是利于备考生能深入复习。

(4) 给出了部分例题的难度系数，以有利于备考生在复习时检查自己对知识的掌握程度。

例题中的难度系数都是历年来教育部考试中心发布的考生的真实数据。读者也可以试分析其余未注明难度值的题目，并从中悟出应该如何对待这些试题。

简言之，各部分知识的基本问题与基本运算方法的归纳、总结，并给出例题的解题思路、典型运算错误、特殊解题技巧、题目的变式、题设条件的解说、试题的难度系数及由性质、概念的内涵、外延而导出的一些有效解题技巧，这些构成了本书的特色，成为本书的亮点。这些内容包含

着作者多年教学、研究考研试题的成果，是备考生不可多得的复习资料。

本书概率论与数理统计部分由南开大学周概容考试执笔。高等数学部分由北京航空航天大学徐兵教授执笔；线性代数部分由南开大学肖马成教授执笔，三人都在近20年期间参加了教育部考试中心的命题工作。作者深信，只要读者认真学习此书，一定能在考试中取得好成绩。

作　者

于2010年4月

目　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限与连续性

1.1.1　函　　数

一、内容概要

(一) 函数的定义

定义 1　对变量 x 在允许范围内的每一个值，变量 y 按照某个确定的规则总有相应的值与之对应，则称 y 为 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$. 常称 x 为**自变量**，y 为因变量. 称使函数有定义的值的全体为函数的定义域. 函数概念有两个基本要素：定义域、对应规则(或称依赖关系).

只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时，才认为它们是同一函数.

(二) 函数的性质

1. 单调性

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，如果对于该区间内的任意两点 $x_1<x_2$ 恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $y=f(x)$ 在该区间内**单调增加**(或**单调减少**).

函数的单调性不能脱离区间而言，如果没有指明区间而说 $f(x)$ 为单调函数，总要理解为 $f(x)$ 在其定义区间上为单调函数.

判定函数 $y=f(x)$ 单调性的常见方法：

(1) 依定义判定：在给定的区间内任取两点 $x_1<x_2$，比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$. 如果总有 $f(x_2)-f(x_1)>0$，则 $f(x)$ 在该区间内单调增加；如果总有 $f(x_2)-f(x_1)<0$，则 $f(x)$ 在该区间内单调减少.

(2) 依导数的符号判定：如果在某区间内总有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在该区间内单调增加；如果在某区间内总有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在该区间内单调减少.

2. 奇偶性

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 的定义区间 D 关于原点对称(既若 $x\in D$，则有 $-x\in D$)，如果对于 D 内任意点 x，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 内的**偶函数**；如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 内的**奇函数**.

奇函数 $y=f(x)$ 的图形关于原点对称，且若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$；偶函数的图形关于 y 轴对称. 两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数；两个奇(偶)函数之积必为偶函数；奇函数与偶函数之积必为奇函数. 判定函数奇偶性的方法是利用定义或上述性质.

3. 周期性

定义 4　若存在实数 $T>0$，对于任意 x，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**. 使得上述关系式成立的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的**最小正周期**，简称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

并不是每个周期函数都有最小正周期.

4. 有界性

定义 5　设 $y=f(x)$ 在某区间内有定义. 若存在 $M>0$，对于该区间内任意的 x，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在该区间内为**有界函数**.

如果没有指明区间，而是说"$f(x)$ 为有界函数"，总要理解为 $f(x)$ 在其定义区间内为有界函数. 判定函数有界性通常采用以下方法：

(1) 闭区间上的连续函数必定为有界函数. 如果 $f(x)$ 为 $(a,+\infty)$ 内的连续函数,只需考察 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 是否存在. 若上述两个极限都存在,则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内为有界函数.

(2) 适当放大或缩小有关表达式导出其界.

(3) 利用基本初等函数的图形判定

(三)初等函数

1. 反函数

定义 6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_x,值域为 D_y. 若对 D_y 中的每一个值 y,通过关系式 $y=f(x)$,有值 x 与之对应,这就建立了 x 与 y 之间的函数关系 $x=\varphi(y)$,常称 $x=\varphi(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. 习惯上常将 x 作为自变量,y 作为因变量,因此,需将 $x=\varphi(y)$ 中的 y 换为 x,x 换为 y,从而得到 $y=\varphi(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=\varphi(x)$ 这两条曲线在 xOy 坐标面上关于直线 $y=x$ 对称. 若 $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 互为反函数,则 $f[\varphi(x)]=x$.

2. 基本初等函数

幂函数　　$y=x^{\mu}$　(μ 为实数);

指数函数　　$y=a^x$　$(a>0,a\neq1)$;

对数函数　　$y=\log_a x$　$(a>0,a\neq1)$;

三角函数　　$y=\sin x$,　$y=\cos x$,　$y=\tan x$,　$y=\cot x$,　$y=\sec x$,　$y=\csc x$;

反三角函数　$y=\arcsin x$,　$y=\arccos x$,　$y=\arctan x$,　$y=\operatorname{arccot} x$.

定义 7 上述五类函数统称为**基本初等函数**.

3. 复合函数

定义 8 若对于 x 在某一范围中的每一个确定的值,依据一个确定的规则总有 u 的值与之对应,即 $u=g(x)$,而对于 u 的此确定值,y 按某确定的规则有值与之对应,即 $y=f(u)$,则称 y 为 x 的**复合函数**,常记为 $y=f[g(x)]$. 称 x 为自变量,u 为中间变量,y 为函数.

4. 初等函数

定义 9 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合而成,并能用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

二、基本问题与基本运算方法

(一)基本问题

1. 函数符号的运用问题,包括分段函数、反函数、可变上(下)限积分形式的函数、可变限二(三)重积分、可变限线(面)积分等形式的函数.

2. 讨论函数的基本性质.

(二)基本运算方法

1. 函数符号的运用.

2. (1) 判定函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的有界性,常利用连续函数在闭区间上的最大(小)值定理.

(2) 判定函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的有界性,常利用连续函数在闭区间上的最大(小)值定理,并判定 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$.

(3) 求函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域,常常可以利用求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值来确定.

3. 判定函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的单调性,常利用 $f'(x)$ 的符号来确定.

4. 判定函数 $f(x)$ 的奇偶性,常利用定义与性质来确定.

三、范例解析

近年来单独考查函数的题目已不多见,基本都是在一些综合性题目中考查函数符号或判定函数的性态. 这些函数可能是导函数、原函数、可变限积分表示的函数等.

例 1 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,在区间 $[0,2]$ 是 $f(x)=x(x^2-4)$. 若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$,其中 k 为常数,写出 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的表达式.

解析 由于题设中只给出了 $[0,2]$ 上 $f(x)$ 的解析表达式,欲求出 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的表达式,可以考虑变换,将 $[-2,0]$ 上的变量 x 变换到 $[0,2]$ 上的新变量.

当 $-2\leqslant x\leqslant0$ 时,可得 $0\leqslant x+2\leqslant2$. 设 $y=x+2$,则当 $-2\leqslant x\leqslant0$ 时,$0\leqslant y\leqslant2$,从而

$$f(x)=kf(x+2)=kf(y)=ky(y^2-4)$$
$$=k(x+2)[(x+2)^2-4]=kx(x+2)(x+4).$$

例 2 若 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$，并求出它的定义域.

解析 所给问题为已知复合函数的表达式，反过来求"中间变量"的问题. 求解的关键是将 $f[\varphi(x)]$ 的表达式转化为 $\varphi(x)$ 的表达式形式.

注意到 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}$ 且 $f[\varphi(x)]=1-x$，可得 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$，两端取自然对数，解得

$$\varphi^2(x)=\ln(1-x),\quad \varphi(x)=\pm\sqrt{\ln(1-x)}.$$

由于 $\varphi(x)\geqslant 0$，可得

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},$$

进而可得其定义域为 $(-\infty,0]$.

练　习　题

1. 设函数

$$g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}\quad f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

则 $g[f(x)]=$________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(f(x))]$ 等于(　　).

A. 0　　B. 1　　C. $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

3. 设 $y=\begin{cases}x, & x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x,\end{cases}$ 求其反函数.

练习题参考答案

1. $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　2. B　　3. $y=\begin{cases}x, & x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & x>16\end{cases}$

1.1.2 极　　限

一、内容概要

(一)极限的定义　　极限描述在给定的过程中函数的变化趋势(性态). 极限值为某个确定的常数.

1. 数列的极限

定义 1 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋于无穷时的**极限**，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2. 函数的极限

定义 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得对于满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

定义 3 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $N>0$，使得对于满足 $|x|>N$ 的一切 x，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

3. 左极限与右极限

定义 4 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得对于满足 $x_0-\delta<x<x_0$ 的一切 x，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0-0)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A.$$

定义 5 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得对于满足 $x_0<$

$x < x_0 + \delta$ 的一切 x,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**右极限**,记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 + 0) = A \text{ 或 } f(x_0^+) = A.$$

定义 6 设函数 $f(x)$ 在 x 充分大时的定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在 $N > 0$,使得对于满足 $x > N$ 的一切 x,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的**极限**,记为 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

定义 7 设函数 $f(x)$ 在 $-x$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在 $N > 0$,使得对于满足 $-x > N$ 的一切 x,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时的**极限**,记为 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

(二)无穷小量与无穷大量

定义 8 如果 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (\text{或} x \to \infty)}} f(x) = 0$,那么就称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时为**无穷小量**(**或称无穷小**).

定义 9 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $M > 0$,总存在 $\delta > 0$,使得对于满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x,恒有 $|f(x)| > M$,则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时为**无穷大量**(**或称无穷大**).

定义 10 设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $M > 0$,总存在 $N > 0$,使得对于满足 $|x| > N$的一切 x,恒有 $|f(x)| > M$,则称 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时为**无穷大量**(**或称无穷大**).

(三)极限的性质

性质 1 若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$,则必定存在 x_0 的某邻域,在该邻域内任何异于 x_0 的点 x 处,恒有 $f(x) > 0$.

性质 2 若 $f(x) \geqslant 0$,且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,则必有 $A \geqslant 0$.

性质 3 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限与右极限都存在且相等,此时三者值相同.

(四)无穷小量的性质 为了简便,首先约定下列性质中所讲的无穷小量与无穷大量是在同一变化过程中,在性质的叙述中省略不提.

性质 4 有限个无穷小量之和仍为无穷小量.

性质 5 有界函数与无穷小量之积仍为无穷小量.

性质 6 有限个无穷小量之积仍为无穷小量.

性质 7 若 $f(x)$ 为无穷大量,则其倒数$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小量;若 $f(x)$ 为无穷小量,且 $f(x) \neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大量.

性质 8 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$,其中 α 当 $x \to x_0$ 时为无穷小量.

性质 8 又称为极限基本定理.

定义 11 设$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \beta = 0$.

若$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$,则称在 $x \to x_0$ 时,α 为**较 β 高阶的无穷小量**,常记为 $\alpha = o(\beta)$;

若$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$,则称在 $x \to x_0$ 时,α 为**较 β 低阶的无穷小量**;

若$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$,则称在 $x \to x_0$ 时,α 与 β 为**同阶无穷小量**;

若$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$,则称在 $x \to x_0$ 时,α 与 β 为**等价无穷小量**,常记为 $\alpha \sim \beta$.

上述定义中极限过程换为 $x \to \infty$ 时也成立.

性质 9 若当$\underset{(x \to \infty)}{x \to x_0}$时,$\alpha \sim \alpha'$,$\beta \sim \beta'$,且若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在,则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

性质 9 常称为等价无穷小量代换. 这个性质常常使用在极限运算中,它能起到简化运算的作用. 但是必须注意,等价无穷小量代换可以在极限的乘除运算中使用,不能在加减运算中使用.

常用的等价无穷小量代换有:当 $x \to 0$ 时,

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x, \quad \ln(1 + x) = x,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \sqrt[n]{1 + x} - 1 \sim \frac{1}{n} x.$$

(五)极限的四则运算 设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$.

性质 10 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B.$

性质 11 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B.$

推论 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$n$ 为正整数，则有$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=A^n$.

性质 12 若 $B\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

上述运算法则在 $x\to\infty$ 时也成立.

(六)极限存在的准则

准则 I 夹逼准则.

(1)当 x 在 x_0 的某去心邻域内(或 $|x|>M$ 时)有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

(2)
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A,$$

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$存在，且等于 A.

准则 II 单调有界数列必有极限. 由极限存在的两个准则可以得到两个重要极限：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^x=\mathrm{e},\lim_{x\to x_0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

读者应该熟记两个重要极限的结构形式特点：

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1;\quad \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e};\quad \lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}.$$

只要符合上述结构形式的，极限公式总成立.

二、基本问题与基本运算方法

(一)基本问题

1. 求极限与极限性质问题.

2. 无穷小量阶的比较.

(二)基本运算方法

1. 利用连续函数性质求极限.(留待 1.1.3 介绍)

(1)若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(2)若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$f(u)$ 在点 u_0 处连续，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}g(x)]$.

2. 利用极限的四则运算法则求极限.

3. 利用两个重要极限公式求极限.

4. 利用等价无穷小量代换简化运算.

5. 利用无穷小量的性质求极限. 记住下面的结论：当 $b_0\neq 0$ 时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & m<n\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

6. 利用极限的概念与性质求极限.

7. 求分段函数在分段点处的极限时，若函数在分段点两侧表达式不同，需分别计算左极限与右极限进行判定.

8. 利用极限存在的准则求极限.

9. 利用洛必达法则求极限.(留待 1.2.3 介绍)

10. 利用导数定义求极限.(留待 1.2.1 介绍)

11. 利用定积分的定义求极限.(留待 1.3.2 介绍)

12. 利用极限运算进行无穷小量阶的比较.

三、范例解析

1. 利用极限的四则运算法则求极限.

例 1 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$ ________.

解析 所给极限为"$\dfrac{0}{0}$"型,不能直接利用极限四则运算法则.

本例求极限的函数分子中含有根式,且在 $x\to1$ 时,带有根式的分子表达式极限为零.对于含有根式的函数的求极限问题,通常可以先进行有理化,使恒等变形以后的表达式中带有根式的因子的极限不为零,能对其直接求极限.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}&=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(x^2+x-2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(3-x)-(1+x)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}\\&=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)}{(x+2)(x-1)}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}=-\frac{\sqrt2}{6}.\end{aligned}$$

注 本题也可以利用洛必达法则求解,难度系数为 0.79.

2. 利用两个重要极限公式求极限.

例 2 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,则 $=$ ________.

解析 本便为求极限的反问题.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2a}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}=e^{3a}=8,$$

所以 $a=\ln2$.

注 本题难度系数为 0.87.相仿,若 $a\neq0$,有

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{b}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{b}{x}}}{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{b}{x}}}=\frac{e^{\frac{b}{a}}}{e^{-\frac{b}{a}}}=e^{\frac{2b}{a}}.$$

上述两种表达式变形是求极限运算的常见技巧,为固定模式的求解方法.考生应熟记公式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx+d}=e^{ab}$,这对解题很有帮助.

3. 利用等价无穷小量代换简化运算.

例 3 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ________.

解析 所给极限为"$\dfrac{0}{0}$"型,不能直接利用极限四则运算法则.先进行等价无穷小量代换,再分组,可简化运算.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}&\xlongequal{(*)}\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}\\&\xlongequal{(**)}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{3\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

注 本题难度系数为 0.66.虽然所给极限为"$\dfrac{0}{0}$"型,但是由于表达式分子中含 $x^2\cos\dfrac{1}{X}$,不能利用洛必达法则求所给极限.

本题解题技巧为:上述运算中,在(*)处利用等价无穷小量代换;在(* *)处将表达式分组变形,从而简化

运算.

例 4 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

解析 所给极限为“$\frac{0}{0}$”型,但是其中$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x$为“$1^0$”型的幂指函数.注意到

$$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x=e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}},$$

利用等价无穷小量代换可以简化运算.

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3}\xlongequal{(*)}\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$$

$$\xlongequal{(**)}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\xlongequal{(***)}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

注 本题难度系数为 0.520.如果利用洛必达法则,则运算更为复杂.

本题解题技巧为:上述运算中式(*)处利用等价无穷小量代换:当$x\to 0$时,$e^x-1\sim x$;在式(**)处利用等价无穷小量代换:当$x\to 0$时,$\ln(1+x)\sim x$;在式(***)处利用等价无穷小量代换:当$x\to 0$时,$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$.

4. 利用无穷小量的性质求极限　常用的无穷小量性质有:有界变量与无穷小量之积为无穷小量,无穷大量的倒数为无穷小量等.

例 5 当$x\to 1$时,函数$\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限(　　).

A. 等于 2　　B. 等于 0　　C. 为∞　　D. 不存在,但不为∞

解析 由于$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$,又因为

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty,\ \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,\ \lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

可知$\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}}$不存在,也不为零和无穷大.故知本题应选 D.

注 特别指出,当$x\to x_0$时,$f(x)$为无穷大量,但是当$x\to x_0$时,$a^{f(x)}$不一定为无穷大量.这里需要分$a>1$与$0<a<1$两种情况讨论,还需要讨论当$x\to x_0$时,是$f(x)\to+\infty$,还是$f(x)\to-\infty$,否则必然导致错误!

例 6 求$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

解析 所给极限为“$\frac{\infty}{\infty}$”型问题,不能直接利用极限四则运算法则,也不能利用洛必达法则求之.通常解决无穷大量运算的基本原则是将其转化为无穷小量运算.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}\xlongequal{(*)}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x+1}{-x\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1.$$

注 本题难度系数为 0.45.解题技巧为:在上述运算(*)处,将无穷大量运算转化为无穷小量运算.

本题典型运算错误为:上述运算(*)处,当$x\to-\infty$,且$|x|$足够大时,$\sqrt{x^2}=|x|=-x$,这是解题中的关键.相当多的考生在此处出现错误,误答为 3,这是错误地认为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x+1}{x\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

此题为研究生入学考试试题，命制时曾考虑以下变式：

变式 1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=$________.

此变式较例 6 简单，只需注意 $|x|=x$.

变式 2 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

此变式较例 6 复杂，需分别讨论 $x\to-\infty$ 与 $x\to+\infty$ 两种情形.

5. 利用极限的概念与性质求极限.

例 7 已知 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=2x^2+5+3\lim\limits_{x\to1}f(x)$，求 $f(x)$.

解析 由题设知 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，变量的极限描述了在给定过程中函数的变化趋势，而极限值表示一个确定的数值，因此可设 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=A$，则有

$$f(x)=2x^2+5+3\lim_{x\to1}f(x)=2x^2+5+3A.$$

将上述表达式两端分别在 $x\to1$ 时取极限，则有

$$A=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(2x^2+5+3A)=7+3A,$$

解之得 $A=-\dfrac{7}{2}$，故

$$f(x)=2x^2+5-\frac{21}{2}=2x^2-\frac{11}{2}.$$

6. 求分段函数在分段点处的极限.

例 8 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解析 注意求极限的函数在点 $x=0$ 处间断，且在 $x=0$ 的两侧表达式不相同，因此应考虑利用左极限与右极限来判定极限是否存在. 由于

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty,$$

因此

$$\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty,\ \lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0.$$

当 $x>0$ 时，$|x|=x$；当 $x<0$ 时，$|x|=-x$，可得

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{|x|}\right)=2-1=1,$$

故

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

注 本题难度系数为 0.64. 解题技巧为：分别考察分段点处的左极限与右极限.

本题典型运算错误是将 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$ 分成两个极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{|x|}$ 讨论. 由于这两个极限都不存在，因此误答为原题极限不存在.

7. 利用极限存在的准则求极限　对于无穷多项和的极限，常常考虑利用夹逼定理求其极限. 若不可行，可考虑利用定积分定义等方法求解. 对于由递推公式给出的数列，判定其极限存在通常利用“单调有界数列必有

极限”的准则.

例 9 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+i}$.

解析 所给问题为无穷多项之和的极限问题,不能利用极限四则运算法则. 由于

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1},$$

可得知

$$\frac{\frac{1+n}{2}\cdot n}{n^2+n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i}\leqslant\frac{\frac{1+n}{2}\cdot n}{n^2+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+n}{2}\cdot n}{n^2+n}=\frac{1}{2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+n}{2}\cdot n}{n^2+1}=\frac{1}{2},$$

由夹逼定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i}=\frac{1}{2}.$$

例 10 设 $x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$存在极限,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解析 数列$\{x_n\}$是由递推公式形式表示的,判定其极限是否存在通常利用数列极限的存在准则:单调有界数列必有极限,其要点为判定数列$\{x_n\}$的单调性. 若其单调增加,应判定其有上界;若其单调减少,则应判定其有下界. 判定数列$\{x_n\}$的有界性与单调性的顺序可以随意.

由于 $x_1=10,x_2=\sqrt{6+10}=4$,可以猜测$\{x_n\}$为单调减少数列. 设 $x_k>x_{k+1}$,则

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2},$$

由归纳法可知$\{x_n\}$为单调减少数列. 又 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\geqslant0$,可知$\{x_n\}$为单调减少且有下界的数列,由极限存在准则可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{6+x_n},$$

从而 $A=\sqrt{6+A}$,可解得 $A=3$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

注 (1)本题难度系数为 0.53.

(2)此题为研究生入学考试试题,命制时曾考虑以下变式:

变式 1 设 $x_1=0,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$,证明数列$\{x_n\}$存在极限,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

此变式较例 10 难在判断$\{x_n\}$有界.

变式 2 设 $x_1>-6,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$,证明数列$\{x_n\}$存在极限,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

此变式的难度在于应该将 x_1 的初值分为几种情形讨论,较例 10 难度大.

例 11 设 $0<x_1<3,x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$存在极限,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解析 需利用“单调有界数列必有极限”的准则. 本题中 x_1 介于某个范围之内,与例 10 变式 2 相仿.

由于 $0<x_1<3$,可知 $3-x_1$ 为正数,从而

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}[x_1+(3-x_1)]=\frac{3}{2}.$$

设 $0<x_k\leqslant\dfrac{3}{2}(k>1$ 且 $k\in\mathbf{N}_+)$,则

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{1}{2}[x_k+(3-x_k)]=\frac{3}{2}.$$

由归纳法可知对任意正整数 $n>1$,总有 $0<x_n\leqslant\dfrac{3}{2}$,即$\{x_n\}$为有界数列. 当 $n>1$ 时,有

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})$$