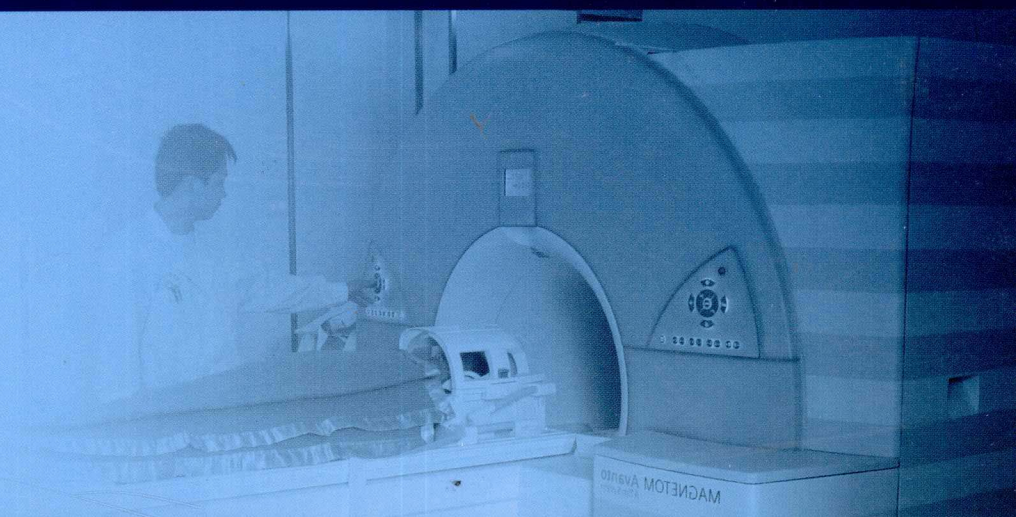




普通高等教育“十一五”国家级规划教材



医用物理学

(第二版)

王芝云 主编



科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

医用物理学

(第二版)

主 编 王芝云

副主编 刘 萍 田蓬勃

袁小燕 兰冰洁

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,是在前一版的基础上结合目前学生特点、融汇多年教学经验、汲取先进教学理念编写而成的。内容包括刚体力学基础、物体的弹性,流体力学基础,振动与波、声、超声和超声成像,气体分子动理论,液体的表面现象,静电场,直流电,恒定磁场,电磁感应、电磁场和电磁波,波动光学,几何光学,狭义相对论基础,量子物理基础,激光、X射线及X射线成像,原子核、磁共振成像、放射性核素成像共15章内容。

本书适合普通高等学校医学药专业学生学习使用,也可供相关人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

医用物理学/王芝云主编. —2版. —北京:科学出版社,2010
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-03-028858-5

I. ①医… II. ①王… III. ①医用物理学-高等学校-教材
IV. ①R312

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 171269 号

责任编辑:胡云志 唐保军 / 责任校对:郑金红
责任印制:张克忠 / 封面设计:无极书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京市农林印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2001年7月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2010年9月第 二 版 印张:21

2010年9月第七次印刷 字数:576 000

印数:15 501—19 500

定价:36.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

本书以教育部高等学校非物理类专业物理基础课程教学指导分委员会制定的《非物理类理工科大学物理课程教学基本要求》为依据,考虑到医学专业的培养目标和教学实际,在总结作者并吸收了众多同行教学改革经验和教学实践体会的基础上编写而成。

医用物理学课程的任务是使学生打好必要物理基础的同时,对学生进行能力培养、增强创新意识并提高科学素质。本书较系统完整地介绍物理学的基本理论、基本概念、基本原理和基本规律,并适当介绍物理知识在医学实际中的典型应用,具有理论基础宽厚、经典强化、近代突出的特点。在保证经典内容系统性的前提下,适当加强和拓展了近代物理内容,并适度介绍现代物理理论和技术在医学研究及临床实际中的一些应用实例,例如超声诊断、X射线断层成像、磁共振成像等。书中还附有一些反映物理知识在科研、生产生活特别是医学中具体应用的图片和照片,以使图文并茂。因此,本书有利于开阔学生观察思维的视野,激发学生的学习热情和求知欲望,培养学生的分析问题和解决问题能力,增强学生的探索精神和创新意识,从而全面提高学生的科学素质。

为了增强适应性,满足不同教学选择的需要和学有余力学生的需求,本书还安排了一些以“*”号为标识的弹性内容,作为正文的延伸或补充。各学校可根据各自的专业特点、培养目标和教学条件以及教学实际,适当选择讲授。“*”号内容无论讲授与否,都不破坏知识的系统性和连贯性。此外,本书还精选了较多应用所学理论解决实际问题的例题。在求解例题的过程中,注重解题思路和方法的分析、归纳和总结。各章后都有一定数量的思考题和习题。

本书由王芝云统稿任主编,刘萍、田蓬勃、袁小燕和兰冰洁辅助统稿任副主编。刘萍编写第1章和第3章,王芝云编写第2章,田蓬勃编写第4章和第12章,李海玲编写第5章,袁小燕编写第6章,荆彦锋编写第7章,牛晓东编写第8章,喻有理编写第9章,俞晓红编写第10章,朱小敏、马文强编写第11章和第13章,强蕴蕴编写第14章,兰冰洁编写第15章。李普选绘制全部插图。全书由15章组成,适合作为高等院校五年制和七年制医药学各专业60~100学时物理课程的教材使用,也可供基础医学研究人员和临床医务工作者以及生命科学和生物学等相关专业师生参考使用。

本书的编写得到了西安交通大学的大力支持以及各位编者学校的热情关心,得到了科学出版社高等教育出版中心数理出版分社领导和责任编辑的真诚帮助,在此表示衷心的感谢。在本书的编写过程中,编者参考了许多国内外优秀教材和教学参考资料,恕不一一列出,谨在此致以诚挚的谢意。

由于编者水平有限,书中疏漏和欠妥之处在所难免,敬请读者谅解并指正,恳请专家批评并赐教。

编 者

2010年6月18日

目 录

前言

第 1 章 刚体力学基础 物体的弹性	1
1.1 刚体运动学	1
1.2 刚体定轴转动的转动定律	3
1.3 刚体定轴转动的转动动能定理	7
1.4 刚体定轴转动的角动量 角动量守恒定律	9
1.5 刚体的进动	11
1.6 物体的弹性	12
思考题	17
习题	17
第 2 章 流体力学基础	19
2.1 理想流体的定常流动	19
2.2 黏滞流体的流动	24
2.3 物体在流体中的运动	30
2.4 血液的流动	31
思考题	34
习题	34
第 3 章 振动与波 声 超声和超声成像	35
3.1 简谐振动	35
3.2 阻尼振动 受迫振动和共振	38
3.3 振动的合成	41
3.4 机械波	45
3.5 波的能量	49
3.6 波的干涉	52
3.7 声波	57
3.8 多普勒效应	60
3.9 超声和超声成像	62
思考题	66
习题	68
第 4 章 气体分子动理论	68
4.1 平衡态 理想气体的状态方程	69
4.2 理想气体的压强和温度	74

4.3 平衡态的统计分布规律	78
4.4 理想气体的内能	81
4.5 气体分子的碰撞	82
* 4.6 非平衡态的输运过程	86
思考题	86
习题	88
第5章 液体的表面现象	88
5.1 液体的表面现象	96
思考题	96
习题	97
第6章 静电场	97
6.1 电荷与库仑定律 电场与电场强度	101
6.2 电场的高斯定理	101
6.3 电场的环路定理	107
6.4 电势	109
6.5 电介质中的静电场	116
6.6 静电场的能量	121
思考题	121
习题	124
第7章 直流电	125
7.1 直流电流	127
7.2 物质的导电性	127
7.3 直流电路定律	130
7.4 电容器的充放电过程	134
思考题	139
习题	142
第8章 恒定磁场	143
8.1 磁场与磁感应强度	145
8.2 电流的磁场	145
8.3 磁场的高斯定理	146
8.4 磁场的安培环路定理	150
8.5 磁场对电流的作用	152
8.6 磁场对运动电荷的作用	155
8.7 磁介质中的磁场	158
思考题	160
习题	167

第 9 章 电磁感应 电磁场和电磁波	167
9.1 电磁感应.....	169
9.2 感应电动势.....	169
9.3 自感和互感.....	171
9.4 磁场的能量.....	174
* 9.5 电磁场	176
* 9.6 电磁波	178
思考题	180
习题	182
第 10 章 波动光学	182
10.1 光的相干性	184
10.2 光的干涉	184
10.3 光的衍射	186
10.4 光的偏振	193
思考题	199
习题	206
第 11 章 几何光学	206
11.1 球面折射成像	208
11.2 薄透镜折射成像	208
11.3 几种常用光学仪器	212
11.4 光学仪器的成像质量	217
思考题	225
习题	228
第 12 章 狭义相对论基础	229
12.1 经典力学的时空观	231
12.2 狭义相对论的基本原理	231
12.3 狭义相对论的时空观	235
* 12.4 狭义相对论的速度变换	239
12.5 狭义相对论动力学基础	241
思考题	242
习题	247
第 13 章 量子物理基础	247
13.1 热辐射和普朗克能量子假设	248
13.2 光电效应和爱因斯坦光子理论	248
13.3 康普顿效应	252
13.4 实物粒子的波动性 不确定原理	255

13.5 波函数 薛定谔方程	257
13.6 薛定谔方程的应用	261
13.7 电子的自旋 原子的壳层结构	264
思考题	271
习题	274
第 14 章 激光 X 射线及 X 射线成像	275
14.1 激光	277
14.2 X 射线 X 射线成像	277
思考题	282
习题	292
第 15 章 原子核 磁共振成像 放射性核素成像	292
15.1 原子核的组成及其基本性质	293
15.2 原子核的放射性衰变	293
15.3 放射性射线与物质的相互作用	297
* 15.4 放射生物效应 辐射剂量与辐射防护	304
15.5 磁共振成像	309
15.6 放射性核素成像	313
思考题	323
习题	325
附录 基础常数	325

第 1 章 刚体力学基础 物体的弹性

受外力作用时,大小和形状保持不变的物体称为刚体.研究刚体机械运动基本规律的物理分支称为**刚体力学**(mechanics of rigid body).实际物体在外力作用下大小和形状发生变化的现象称为形变,物体形变的性质称为物体的弹性.

本章先介绍刚体平动的规律和刚体定轴转动运动学规律,然后讨论刚体定轴转动的转动定律,转动惯量,转动动能定理,以及刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律等刚体转动的动力学规律,最后讨论物体的弹性规律并简单介绍生物材料的力学性质.

1.1 刚体运动学

当受外力作用时,物体的大小和形状变化较小,而忽略这些变化对所研究问题影响不大时,则该物体可以视为刚体.实际刚体的运动通常都比较复杂.然而,刚体的任何复杂运动都可以看成是平动和转动两种基本运动的合成.因此研究刚体的平动和定轴转动,是研究刚体复杂运动的基础.

1. 刚体的平动

如图 1.1(a)所示,刚体在运动过程中,若其上任意一条假想的直线 l 始终保持彼此相互平行,则刚体的这种运动称为**平动**(translation).物体的平动运动随处可见,行驶的汽车车厢的运动,游乐车车厢的运动就是平动.

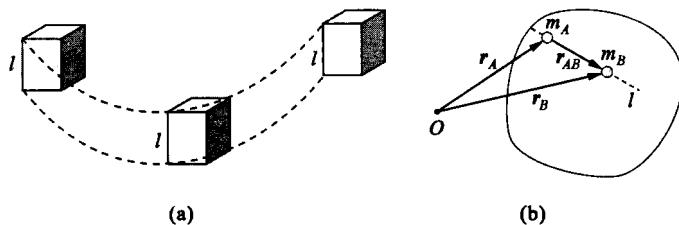


图 1.1

如图 1.1(b)所示,考虑做平动的刚体上,任意直线 l 上的任意两个质点 A 和 B . 设 r_A 和 r_B 分别为两质点相对于参考点 O 的位矢, r_{AB} 为质点 A 指向质点 B 的矢量,显然有 $r_A = r_B + r_{AB}$. 按照速度的定义,质点 A 的速度

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{d\boldsymbol{r}_A}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_B}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}_{AB}}{dt}$$

根据刚体平动的特点,在刚体运动过程中, r_{AB} 保持其大小和方向不变,故 r_{AB} 为常矢量. 即

$\frac{d\boldsymbol{r}_{AB}}{dt} = 0$. 则有

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{d\boldsymbol{r}_A}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_B}{dt} = \boldsymbol{v}_B$$

按照加速度的定义,质点 A 的加速度

$$a_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = a_A$$

由于质点 A 和 B 是任取的,因此可知,刚体平动时,组成刚体的各个质点的速度和加速度都相同.因此,只要知道刚体上任一质点的运动规律,就可以确定整个刚体的运动规律.所以,刚体的平动就可以归结为质点的运动.

2. 刚体的定轴转动

刚体运动时,若组成刚体的各个质点都绕同一直线做圆周运动,则刚体的这种运动称为转动(rotation),该直线称为转轴.物体的转动运动随处可见,门窗的开关运动,行驶的汽车车轮的运动,陀螺的运动,电机转子的运动等都是转动.

刚体转动时,若转轴相对于所选定的参考系固定不动,则刚体的这种转动称为定轴转动.刚体的定轴转动是刚体转动中一种最简单、最基本的转动.本章我们只研究刚体的定轴转动.

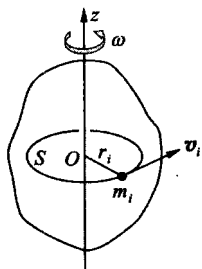


图 1.2

由于受外力作用时,刚体的大小和形状都不变,因此,刚体可以看成是由许多相互之间即使是受外力作用时也没有相对位移的质点系组成.如图 1.2 所示,刚体绕定轴 z 以角速度 ω 转动.垂直于转轴 z 的平面 S 称为转动平面.组成刚体的所有质点都在各自所在的转动平面上,以与 z 轴为交点的圆心 O 做圆周运动,并在相同的时间内,各个质点的角位移相同.因此,刚体上质量为 m_i 的任意质点的圆周运动规律就反映刚体的定轴转动的规律.

例 1.1 半径为 0.2m 的飞轮、以 $150\text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ 的转速转动,因受制动而均匀减速,经 30s 后停止转动.试求:

- (1) 飞轮在制动过程中的平均角加速度和角位移;
- (2) 制动开始后 $t = 6\text{s}$ 时,飞轮的角速度;
- (3) 制动开始后 $t = 6\text{s}$ 时,飞轮边缘上任一质点的速度、切向加速度和法向加速度的大小.

解 (1) 依题意, $\omega_0 = 5\pi\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega = 0$, $\Delta t = 30\text{s}$. 根据质点匀变速圆周运动规律 $\omega = \omega_0 + \beta t$, 可得飞轮在制动过程中的平均角加速度为

$$\bar{\beta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{0 - 5\pi}{30} = -\frac{\pi}{6} (\text{rad} \cdot \text{s}^{-2})$$

根据质点匀变速圆周运动规律 $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta\theta$, 可得飞轮在制动过程中的角位移为

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta} = \frac{0 - (5\pi)^2}{2 \times (-\pi/6)} = 75\pi (\text{rad})$$

(2) 由于制动过程是均匀减速的,根据质点匀变速圆周运动规律,可得制动开始后 $t = 6\text{s}$ 时,飞轮的角速度为

$$\omega = \omega_0 + \beta t = 5\pi - \frac{\pi}{6} \times 6 = 4\pi (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$$

(3) 根据质点圆周运动中角量与线量的关系,可得制动开始后 $t = 6\text{s}$ 时,飞轮边缘上任一点的速度、切向加速度和法向加速度的大小分别为

$$v = r\omega = 0.2 \times 4\pi = 2.5 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

$$a_t = r\ddot{\beta} = 0.2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -0.105(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

$$a_n = r\omega^2 = 0.2 \times (4\pi)^2 = 31.6(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

1.2 刚体定轴转动的转动定律

力矩作用于物体上可以改变物体的运动状态,那么,力矩与物体运动状态参数之间有什么样的关系呢?

1.2.1 力对轴的力矩

如图 1.3 所示,刚体的转动平面 S 与 z 轴的交点为 O , S 上的任意点 P 相对于 O 点的位矢为 $\boldsymbol{r}$, 转动平面 S 内的力 $\boldsymbol{F}$ 作用于 P 点. $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的矢积称为力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的力矩(moment of force), 用 M_z 表示, 即

$$\boldsymbol{M}_z = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \quad (1.1)$$

若 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 之间的夹角为 α , 则力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴力矩的大小为

$$M_z = rF \sin \alpha = hF$$

式中, h 为力 $\boldsymbol{F}$ 到 z 轴的垂直距离, 称为力臂, $h = r \sin \alpha$.

对于定轴转动的刚体而言, 力矩的方向只有两种: 沿 z 轴正方向或负方向. 因此, 可以认为力对定轴的力矩是代数量. 通常规定, 若 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ 的方向沿 z 轴正方向, 力矩为正; 反之力矩为负.

如图 1.4 所示, 如果力 $\boldsymbol{F}$ 不在转动平面 S 内, 可将 $\boldsymbol{F}$ 分解为平行于 z 轴的分力 $F_{//}$ 和垂直于 z 轴的分力 $F_{\perp}$. 由于 $F_{//}$ 与 z 轴平行, 不改变刚体的转动状态, $F_{//}$ 对 z 轴的力矩为零. 因此, 力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的力矩就等于 $\boldsymbol{F}$ 在垂直于 z 轴平面上的分力 $F_{\perp}$ 对 z 轴的力矩. 所以, 当力 $\boldsymbol{F}$ 不在转动平面 S 内, 应以 $F_{\perp}$ 替代式(1.1)中的 $\boldsymbol{F}$.

在国际单位制中, 力矩大小的单位为牛顿·米($\text{N} \cdot \text{m}$).

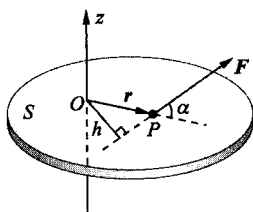


图 1.3

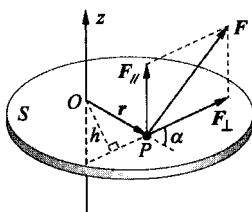


图 1.4

1.2.2 刚体定轴转动的转动定律

在质点力学中, 力的作用可以使质点产生加速度, 牛顿第二定律给出了质点获得的加速度与质点所受合力之间的关系. 对于定轴转动的刚体, 力矩作用可以使刚体产生角加速度, 那么, 刚体获得的角加速度与刚体所受的合力矩之间有何关系呢?

如图 1.5(a) 所示, 刚体绕定轴 z 以角速度 ω 转动. 设任意时刻 t , 刚体的角加速度为 β . 考虑转动平面 S 上质量为 m_i 的任意质点, m_i 相对于 O 的位矢为 $\boldsymbol{r}_i$ 、速度为 $\boldsymbol{v}_i$. 如图 1.5(b) 所示, 质点 m_i 做半径 r_i 的圆周运动, 作用于质点 m_i 上的所有外力的合力为 $\boldsymbol{F}_i$ 、所有内力的合力

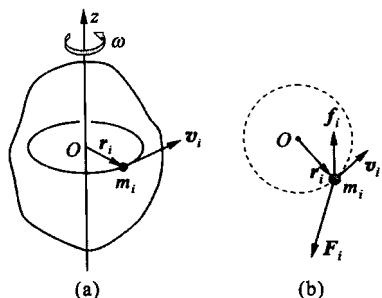


图 1.5

为 f_i . 根据牛顿第二定律, 有

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$$

上式在质点 m_i 的圆轨迹切线方向上的分量形式为

$$F_{i\tau} + f_{i\tau} = m_i a_{i\tau} = m_i r_i \beta$$

以 r_i 同乘上式两端, 并对整个刚体求和, 可得

$$\sum_i F_{i\tau} r_i + \sum_i f_{i\tau} r_i = \sum_i m_i r_i^2 \beta$$

式中, 左端第一项为作用在刚体上所有外力相对 z 轴的合外力矩, 用 M_z 表示; 第二项为所有内力相对 z 轴的合内力

矩. 由于内力总是成对出现, 而且大小相等、方向相反, 且在同一条直线上, 因此所有内力相对 z 轴的合内力矩必然等于零. 上式右端 $\sum_i m_i r_i^2$ 称为刚体相对 z 轴的转动惯量, 用 J_z 表示. 即

$$M_z = J_z \beta$$

考虑到刚体获得的角加速度与刚体所受合外力矩的方向相同, 上式可以写成如下的矢量形式

$$\mathbf{M}_z = J_z \boldsymbol{\beta} \quad (1.2)$$

可见, 刚体定轴转动时, 作用在刚体上所有外力相对某一轴的合外力矩, 等于刚体相对该轴转动惯量与刚体角加速度的乘积. 这一结论称为刚体定轴转动的转动定律 (law of rotation).

刚体定轴转动的转动定律是解决刚体定轴转动动力学问题的基本方程之一.

1.2.3 刚体相对定轴的转动惯量

在讨论刚体的转动定律时, 我们引入了刚体相对定轴的转动惯量. 组成刚体的每一个质点的质量与该质点到定轴垂直距离平方的乘积之和, 称为刚体相对某一定轴的转动惯量 (moment of inertia). 质量不连续分布的刚体, 相对某一定轴 z 的转动惯量为

$$J_z = \sum_{i=1} m_i r_i^2 \quad (1.3)$$

质量连续分布的刚体, 相对某一定轴 z 的转动惯量为

$$J_z = \int dJ_z = \int r^2 dm \quad (1.4)$$

在国际单位制中, 转动惯量的单位为千克·米² ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$).

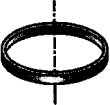
将刚体的转动定律 $M_z = J_z \beta$ 与质点的牛顿第二定律 $F = ma$ 比较可知, 刚体的转动惯量 J_z 与质点的质量 m 相对应. 质点的质量 m 是质点运动惯性的量度, 刚体的转动惯量 J_z 是刚体转动惯性的量度.

表 1.1 给出了几种常见的均质且形状规则的物体相对于给定轴的转动惯量.

根据转动惯量的定义及表 1.1 可见, 刚体的转动惯量与刚体的总质量、刚体质量的分布以及转轴有关.

实际物体通常是非均质的, 而且形状往往不规则, 用积分的方法求其转动惯量是很困难的, 常用实验的方法测定.

表 1.1 物体的转动惯量

 细直棒: 质量 m、长 l 转轴: 过一端与棒垂直 转动惯量: $J_z = \frac{1}{3}ml^2$	 细直棒: 质量 m、长 l 转轴: 过中心与棒垂直 转动惯量: $J_z = \frac{1}{12}ml^2$
 细圆环: 质量 m、半径 R 转轴: 过中心与环面垂直 转动惯量: $J_z = mR^2$	 细圆环: 质量 m、半径 R 转轴: 过中心与环面平行 转动惯量: $J_z = \frac{1}{2}mR^2$
 薄圆盘: 质量 m、半径 R 转轴: 过中心与环面垂直 转动惯量: $J_z = \frac{1}{2}mR^2$	 薄圆盘: 质量 m、半径 R 转轴: 过中心与环面平行 转动惯量: $J_z = \frac{1}{4}mR^2$
 球面: 质量 m、半径 R 转轴: 沿任意直径 转动惯量: $J_z = \frac{2}{3}mR^2$	 球体: 质量 m、半径 R 转轴: 沿任意直径 转动惯量: $J_z = \frac{2}{5}mR^2$

例 1.2 质量为 m 、长为 l 的均质细棒, 试求:

- (1) 棒相对于通过棒一 endpoint 与棒垂直的定轴的转动惯量;
- (2) 棒相对于通过棒中心与棒垂直的定轴的转动惯量.

解 如图 1.6 所示, 取 Ox 轴, 设定轴 z 通过坐标原点, 且与棒垂直. 设棒的左端距离原点 O 为 $-x_0$ 、右端点距离原点为 $l-x_0$. 考虑距 O 点为 x 的线元 dx , 其质量 $dm = \frac{m}{l}dx$. dm 相对 z 轴的元转动惯量为

$$dJ_z = x^2 dm = \frac{m}{l}x^2 dx$$

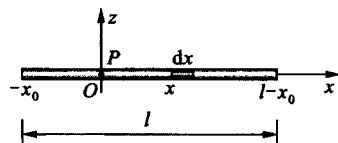


图 1.6

整个棒相对 z 轴的转动惯量为

$$J_z = \int dJ_z = \int_{-x_0}^{l-x_0} \frac{m}{l}x^2 dx = \frac{m}{3l}[(l-x_0)^3 + x_0^3]$$

- (1) 棒相对于通过棒一 endpoint 与棒垂直的定轴, $x_0 = 0$, 转动惯量为

$$J_z = \frac{1}{3}ml^2$$

- (2) 棒相对于通过棒中心与棒垂直的定轴, $x_0 = \frac{l}{2}$, 转动惯量为

$$J_z = \frac{1}{12}ml^2$$

例 1.3 如图 1.7 所示, 质量为 m 、长为 l 的均质细棒, 可绕通过其上端垂直于纸面的定轴 z 在铅垂面内自由转动. 开始时, 棒静止在水平位置. 试求棒转到与水平方向成 θ 角时的角加速度和角速度.

解 沿棒方向建 Ox 坐标如图 1.7 中所示, 在棒上 x 处取一质点, 其质量 $dm = \frac{m}{l}dx$. 则该质点相对 z 轴力矩的方向垂直纸面向里, 大小为

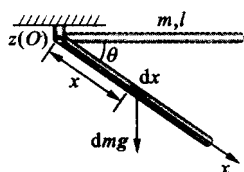


图 1.7

$$dM_z = x dm g \cos \theta = \frac{m}{l} g \cos \theta x dx$$

由于棒上所有质点对 z 轴力矩的方向相同, 则棒相对 z 轴力矩的方向垂直纸面向里, 大小为

$$M_z = \int M_z = \int_0^l \frac{m}{l} g \cos \theta x dx = \frac{1}{2} mgl \cos \theta$$

z 轴对棒的支承力通过 z 轴, 对 z 轴的力矩为零. 棒自由转动, 摩擦力对 z 轴的力矩为零. 因此, 在与水平方向成 θ 角时, 棒所受的合力矩就是重力矩 $M_z = \frac{1}{2} mgl \cos \theta$. 棒相对于 z 轴的转动惯量 $J_z = \frac{1}{3} ml^2$. 设棒转到与水平方向成 θ 角时的角加速度为 β , 根据转动定律, 有

$$\frac{1}{2} mgl \cos \theta = \frac{1}{3} ml^2 \beta$$

解得棒转到与水平方向成 θ 角时的角加速度

$$\beta = \frac{3g}{2l} \cos \theta$$

由 $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$, 而 $\beta = \frac{3g}{2l} \cos \theta$, 可得

$$\omega d\omega = \frac{3g}{2l} \cos \theta d\theta$$

依题意, 棒在水平位置时静止, 即 $\theta_0 = 0, \omega_0 = 0$. 设棒转到与水平方向成 θ 角时的角速度为 ω . 上式两端积分

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta \frac{3g}{2l} \cos \theta d\theta$$

可得棒由水平位置自静止开始转到与水平方向成 θ 角时的角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l} \sin \theta}$$

例 1.4 如图 1.8(a)所示, 质量为 M 、半径为 R 的薄圆盘, 可绕通过盘心垂直盘面的水平定轴 z 在铅垂面内自由转动. 固定在盘边缘的轻绳的下端分别系有质量为 m_1 和 m_2 的两个物体. 设绳与盘间无相对滑动, 绳不可伸长. 试求两物体的加速度和滑轮的角加速度.

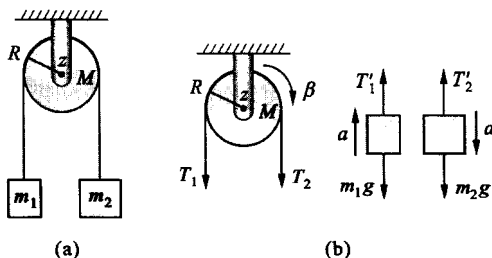


图 1.8

解 以圆盘为研究对象, 设圆盘的角加速度为 β , 圆盘受力如图 1.8(b)中所示. 由于 z 轴对圆盘的作用力及圆盘的重力都通过 z 轴, 相对 z 轴的力矩为零. 圆盘所受的外力矩就是两个

拉力 T_1 和 T_2 形成的, 考虑到 $J_z = \frac{1}{2}MR^2$. 根据转动定律, 有

$$(T_2 - T_1)R = J_z\beta = \frac{1}{2}MR^2\beta \quad (1)$$

以两物体为研究对象, 两物体受力如图 1.8(b) 中所示. 绳不可伸长, 两物体加速度相等, 设为 a . 因为是轻绳, 有 $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$. 根据牛顿第二定律, 分别有

$$T_1 - m_1g = m_1a \quad (2)$$

$$m_2g - T_2 = m_2a \quad (3)$$

又由于绳与滑轮间无相对滑动, 有

$$a = R\beta \quad (4)$$

式①~式④联立求解, 可得两物体的加速度和滑轮的角加速度分别为

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M\right)}, \quad \beta = \frac{a}{R} = \frac{(m_1 - m_2)g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M\right)R}$$

1.3 刚体定轴转动的转动动能定理

转动定律描述的是力矩作用于物体上可以改变物体的运动状态的瞬时规律. 当力矩持续作用于物体上时, 同样可以改变物体的运动状态. 力矩的持续作用与物体运动状态之间的关系如何呢? 本节我们讨论力矩对物体持续作用在空间产生的效果.

1.3.1 力矩的功

如图 1.9 所示, 设合外力 F 作用于刚体转动平面上的任意点 P , 使刚体绕定轴 z 转动. 在刚体转过元角位移 $d\theta$ 的过程中, P 点的元位移为 dr (大小等于 ds). 根据功的定义, 力 F 对刚体做的元功为

$$dA = F_{\perp} |dr| \cos \varphi = F_{\perp} ds \cos \varphi$$

式中 φ 为力 F 在转动平面上的分力 $F_{\perp}$ 与 dr 之间的夹角. 因为 $\alpha + \varphi =$

$\frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos \varphi = \sin \alpha$. 而 $ds = r d\theta$. 并利用式(1.1), 可将元功表示为

$$dA = rF_{\perp} \sin \alpha d\theta = M_z d\theta$$

上式两端积分, 可得刚体由角位置 θ_1 转动到角位置 θ_2 的过程中, 力矩 M_z 对刚体所做的功

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z d\theta \quad (1.5)$$

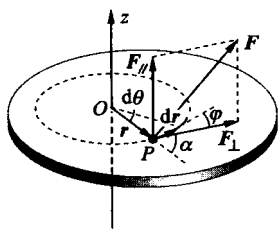


图 1.9

可见, 刚体定轴转动时, 合外力矩对刚体所做的功就是合力对刚体所做的功.

1.3.2 刚体定轴转动的转动动能

刚体定轴转动时, 组成刚体的各个质点都在做圆周运动. 各个质点具有动能, 整个刚体也具有动能. 定轴转动的刚体, 组成刚体的所有质点的动能之和就是刚体的转动动能 (rotational kinetic energy).

如图 1.10 所示, 刚体绕定轴 z 以角速度 ω 转动. 转动平面上质量为 m_i 的任意质点做半径

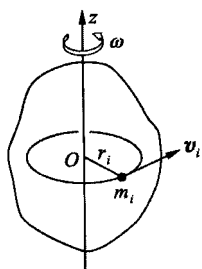


图 1.10

为 r_i 的圆周运动. 设任意时刻, 该质点的速度为 v_i , $v_i = r_i \omega$. 则该质点的动能为

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

对上式求和, 可得刚体的转动动能

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

式中 $\sum_i \Delta m_i r_i^2$ 为刚体相对于 z 轴的转动惯量 J_z . 因此, 刚体的转动动能为

$$E_k = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad (1.6)$$

上式表明, 刚体的转动动能与刚体的转动惯量成正比, 与刚体角速度的平方成正比.

1.3.3 刚体定轴转动的转动动能定理

刚体在转动过程中, 组成刚体的质点之间不发生相对位移. 可见, 刚体是一个特殊的质点系. 可以证明, 各个质点间没有相对位移的质点系中, 内力做功的总和为零. 因此, 根据质点系的动能定理, 合外力对质点系做的功等于质点系动能的增量, 即

$$A = \Delta E_k$$

设相对定轴 z 转动惯量为 J_z 的刚体, 在对 z 轴合外力矩 M_z 的持续作用下, 由角位置为 θ_0 、角速度为 ω_0 的初始状态转动到角位置为 θ 、角速度为 ω 的末了状态. 在这一过程中, 合外力矩对刚体做的功为

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} M_z d\theta$$

刚体动能的增量为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} J_z \omega^2 - \frac{1}{2} J_z \omega_0^2$$

由 $A = \Delta E_k$, 有

$$\int_{\theta_0}^{\theta} M_z d\theta = \frac{1}{2} J_z \omega^2 - \frac{1}{2} J_z \omega_0^2 \quad (1.7)$$

上式表明, 刚体定轴转动时, 合外力矩对刚体做的功等于刚体转动动能的增量. 这一结论称为刚体定轴转动的动能定理 (theorem of kinetic energy).

例 1.5 如图 1.11 所示, 质量为 m 、长为 l 的均质细棒, 可绕通过其一端垂直于纸面的定轴 z 在铅直面内自由转动. 开始时, 棒静止在水平位置. 试求棒转到与水平方向成 θ 角时的角速度.

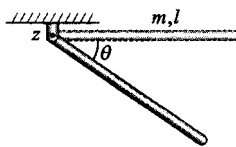


图 1.11

解 根据例 1.3 结论, 棒在与水平方向成 θ 角时, 棒所受合外力矩 (重力矩) 的大小 $M_z = \frac{1}{2} mgl \cos \theta$. 则棒由水平位置自静止开始转到

与水平方向成 θ 角的过程中, 合外力矩对刚体做的功为

$$A = \int_0^{\theta} M_z d\theta = \int_0^{\theta} \frac{1}{2} mgl \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} mgl \sin \theta$$

由水平位置自静止开始转到与水平方向成 θ 角, 棒转动动能的增量为

$$\frac{1}{2} J_z \omega^2 - 0$$

根据刚体定轴转动的动能定理, 有

$$\frac{1}{2} mgl \sin \theta = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$

将 $J_z = \frac{1}{3} ml^2$ 代入, 可得由水平位置自静止开始转到与水平方向成 θ 角时, 棒转动的角速度

$$\omega = \sqrt{\frac{3g \sin \theta}{l}}$$

上述结果与使用转动定律求解的完全一致.

1.4 刚体定轴转动的角动量 角动量守恒定律

本节我们讨论力矩对时间的持续作用效果.

1.4.1 刚体对轴的角动量

如图 1.12 所示, 刚体绕定轴 z 以角速度 ω 转动. 转动平面上质量为 m_i 的质点, 相对于 O 点的位矢为 $\mathbf{r}$. 若某一时刻, 该质点的速度为 $\mathbf{v}_i$, 则 $\mathbf{r}$ 与 $m_i \mathbf{v}_i$ 的矢积称为该质点对 z 轴的角动量 (angular momentum), 用 L_{zi} 表示, 即

$$\mathbf{L}_{zi} = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

角动量的方向沿 z 轴正方向, 大小为

$$L_{zi} = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega$$

由于组成刚体的所有质点对 z 轴的角动量的方向相同, 因此, 整个刚体对 z 轴的角动量 L_z 的大小应为各质点对 z 轴的角动量大小之和. 即

$$L_z = \sum L_{zi} = \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega = J_z \omega$$

考虑到角动量 L_z 与角速度 ω 方向相同. 上式可以写成如下的矢量形式:

$$\mathbf{L}_z = J_z \boldsymbol{\omega} \quad (1.8)$$

上式表明, 定轴转动的刚体, 对定轴角动量的大小等于刚体对该轴转动惯量与刚体角速度大小的乘积, 角动量的方向与角速度的方向相同.

在国际单位制中, 角动量的单位为 $\text{千克} \cdot \text{米}^2 \cdot \text{秒}^{-1}$ ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$).

与牛顿第二定律可以用动量表述类似, 转动定律可以用角动量表述为

$$\mathbf{M}_z = J_z \boldsymbol{\beta} = \frac{d(J_z \boldsymbol{\omega})}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_z}{dt} \quad (1.9)$$

上式表明, 定轴转动的刚体所受合外力矩等于刚体角动量随时间的变化率. 上式是转动定律的另一种表达式. 这一形式不仅适用刚体, 也适用于相对于定轴转动惯量变化的非刚体.

1.4.2 刚体对定轴的角动量定理

由式(1.9), 有

$$\mathbf{M}_z dt = d\mathbf{L}_z = d(J_z \boldsymbol{\omega})$$

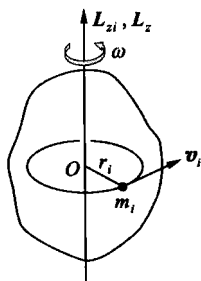


图 1.12