解三角形

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

上海教育出版社

解 三 角 形

中国数学会上海分会

中学数学研究委員会編

上海教育出版社

一九六三年·上海

解　三　角　形

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

*

上 海 教 育 出 版 社 出 版
（上 海 永 福 路 123 号）
上海市书刊出版业营业許可证出 090 号
中华书局上海印刷厂印刷
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

*

开本：787×1092　1/32　印張：3 3/8　字数：77,000
1956年10月新知識出版社第1版第8次印刷（173,001—180,000本）
1959年9月新1版　1963年3月第6次印刷
印数：77,501—104,500本

統一书号：7150·669
定　价：（九）0.30元

序　言

本会为了学習苏联先進經驗，帮助教师積極提高教学質量，并根据当前中学教学实际需要，决定着手編寫有关高初中数学各科包括三角、几何、代数、算術教材內容的小册子，陸續分批出版，以提供中学数学教师作为進一步研究和了解教材的参考，从而更好地掌握教材的教学目的。同时也可供高初中学生作为課外鑽研的題材，以利更深刻地理解教材內容。我們希望通过这一套小册子的出版，能使数学界同志对中学数学教材的研究得到廣泛的交流。

这本"解三角形"的小册子，是按中学数学教学大綱修訂草案"解斜三角形"編寫的。它从直角三角形的边角关系導出斜三角形的边角关系；比較詳細地叙述了正弦定理的証明，并由此導出其他公式；对公式之間的独立性也作了說明。在討論三角形的解法时則着重分析解法步驟，再通过具体例子闡明它的应用。对数字計算則强調使用对数，并在最后还簡單的介紹了三角函数的造表法。

本会在編寫本册前，曾拟就編寫計划，經过編輯組兩次討論，然后确定初步提綱，分別由趙型、秦子超、施毓湘諸同志提供材料，而由楊荣祥同志执筆寫成，再經程其襄、姚晶、朱鳳豪諸同志校訂，最后由楊荣祥同志作了修正。虽然这样，但由于我們水平有限，缺点是难免的，希望数学界同志予以批評和指正。

中國数学会上海分会中学数学研究委員会　1956年8月

目　　錄

直角三角形的解法…………………………………………… 1
任意三角形的边角关系…………………………………… 7
斜三角形的解法………………………………………………33
斜三角形解法的特殊情形…………………………………48
用数值解三角形的例子……………………………………64
三角在其他学科上的应用…………………………………79
三角函数造表法………………………………………………95

直角三角形的解法

研究三角形的解法和关于物理、化学、工程上应用問題，是三角教学目的之一．三角学从这名詞原來的涵义而言，是指三角形測量，所以解任意三角形是研究初等三角学中的重要一环．

三角形的形狀和大小，决定于它的六个組成元素：三只角和三条边．这六个元素不是彼此完全独立的，而是在某种程度上互相依賴互相制約的．因此，如果我們知道了这六个元素中的三个元素（至少有一边）或元素間的关系，而这些已知量或已知关系如能符合于平面几何作三角形的条件，就可以从这些已知量及已知关系根据元素間的相依关系求出所有的元素，因而确定这三角形的形狀和大小．这样的从已知量求出未知量从而确定三角形的过程叫做解三角形．

关于直角三角形的解法，我們已在本会編寫的“三角函数”小册子第25頁上簡略的討論过，直角三角形可以解出的条件必須应用(1)**兩銳角互余关系**；(2)**銳角三角函数定义**．因为直角三角形有一个直角，**所以只要知道它的兩个元素（至少一边，直角除外），就可以求出其余的三个元素**．因此解直角三角形的問題，依照可解的条件，也就是可以确定三角形的条件，只有下边的四种情形：

(1)已知兩直角边．

(2)已知一直角边和斜边．

(3)已知斜边和一銳角．

(4)已知一直角边和一銳角．

上述四种情形可由下面这三个独立的公式來解出直角$\triangle ABC$的。

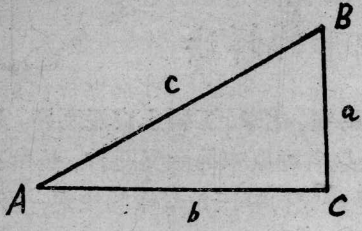

圖 1

由圖1,可知

(1) $A+B=90°$,

(2) $\sin A=\dfrac{a}{c}$,

(3) $\cos A=\dfrac{b}{c}$.

我們就可以运用这三个公式，已知直角三角形的兩个条件(至少一边，直角除外)，求出其他各元素了。

我們还可以把直角三角形的解法推廣到等腰三角形和正多边形. 就是任意三角形具有某种已知条件，也可以用直角三角形解法來解的.

用直角三角形解法解等腰三角形. 因为等腰三角形可以变为直角三角形來解.

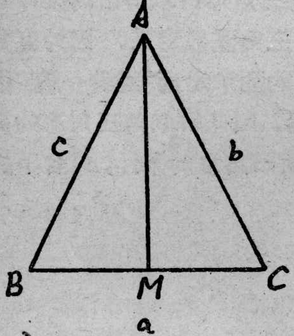

圖 2

如圖2中， $AM\perp BC$,

$b=c,\quad BM=MC=\dfrac{a}{2}$,

$\angle MAB=\angle MAC=\dfrac{A}{2}$.

在等腰三角形ABC中，已知的独立关系应为:

(1) $b=c$,

(2) $\dfrac{A}{2}+B=90°$,

(3) $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{BM}{AB}=\dfrac{\frac{1}{2}a}{c}=\dfrac{a}{2c}$.

如果能够知道等腰三角形的兩个独立的条件，就可以运用上述关系解出这三角形。

我們也可用直角三角形解法解正多边形。因为一个 n 边的正多边形（n 指 $\geqslant 3$ 的自然数），由几何可知正多边形必可作一个外接圓和一个內切圓，并且这兩个圓是同心圓，从圓心 O 与各頂点作連綫，就分成 n 只全等的等腰三角形（如圖 3）。

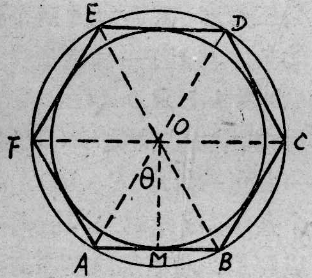

圖 3

这些等腰三角形的頂角是 $\frac{360^\circ}{n}$（如 $\angle AOB=\angle BOC=\cdots\cdots$）。如果 n 为已知，則等腰三角形 OAB 的頂角和底角都可以計算出來；如果再作內切圓的半徑使通过各个切点（如圖上 OM），則又分等腰三角形为兩个全等的直角三角形，所以正多边形也可以归結为直角三角形來求解。

我們設頂心距（也叫它为半徑）$OA=R$，边心距 $OM=r$，边長为 s，边数为 n，周長为 P_n，面積为 S_n，$\angle AOM=\frac{1}{2}\angle AOB=\theta$。顯然，有

$$\theta=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n}=\frac{180^\circ}{n},$$

$$s=2r\tan\theta,$$

$$P_n=ns,$$

$$\frac{\frac{1}{2}s}{R}=\sin\theta,\quad \text{即 } s=2R\sin\theta.$$

$$S_n=\frac{1}{2}P_nr.$$

我們也可用直角三角形解法來解斜三角形。因为斜三角形

总可以被一边上的高綫分成兩个直角三角形的和或差。因此只要有足够的已知条件，就可利用直角三角形的解法來解斜三角形。

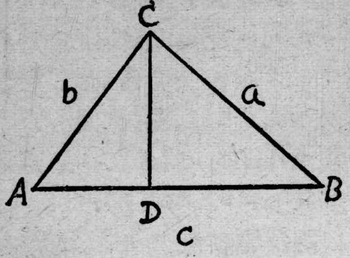

圖 4

前面已經談过，解每一个直角三角形，需要知道兩个独立的条件，但当一只直角三角形（如圖 4 上 $R\triangle ADC$）解出以后，其中一条高綫（DC）就是另一直角三角形（$R\triangle BDC$）的一个条件，因此第二只直角三角形还只需有一个独立的条件就可以解了。所以解斜三角形一共需要三个独立的条件。由于解直角三角形的条件中至少要有一边，因此解斜三角形的三个独立条件中也至少要有一边。

斜三角形解法的詳細研究留待后面再講，这只不过举例說明可用直角三角形解法來解任意三角形而已。

例如： 已知 $\triangle ABC$ 的 A, B, a；求解 $\triangle ABC$.

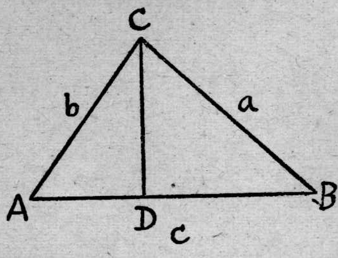

圖 5

設 $\triangle ABC$ 中（如圖 5）

$A=\alpha, B=\beta, BC=a$,

解 (1)因 $A+B+C=180°$,

$\therefore \quad C=180°-A-B$

$=180°-\alpha-\beta.$

(2)在 $R\triangle CDB$ 中

$CD=a\sin\beta$,

$BD=a\cos\beta$.

(3)在 $R\triangle CDA$ 中

$$\frac{CD}{b}=\sin\alpha,$$

$$\therefore \qquad b=\frac{CD}{\sin\alpha}=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

(4) $$AD=b\cos\alpha=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha.$$

$$AB=c=AD+DB=\frac{a\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}+a\cos\beta$$

$$=\frac{a\sin\beta\cos\alpha+a\cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}.$$

如果題設α是鈍角(如圖 6),則有

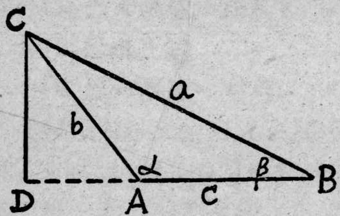

圖 6

$$CD=a\sin\beta,$$

$$BD=a\cos\beta,$$

$$CD=b\sin(180°-\alpha)$$

$$=b\sin\alpha,$$

即 $$b=\frac{CD}{\sin\alpha}=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

$$AD=b\cos(180°-\alpha)$$

$$=-b\cos\alpha$$

$$=-\frac{a\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$ (其中 $\cos\alpha<0$,所以 $AD>0$)

但 $$c=AB=BD-AD$$

$$=a\cos\beta-\left(-\frac{a\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$$=a\cos\beta+\frac{a\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{a\sin\alpha\cos\beta+a\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}.$$

从本例可以看出,当 $90°<\alpha<180°$ 与 $0°<\alpha<90°$ 时的結

果是相同的.

如果 β 是鈍角，它的結果也是一样的.

上面的例子可以說明自直角三角形的解法推廣到任意三角形的解法是完全可能的，而且是必要的. 如果任意三角形中有一个角为直角时，就变为直角三角形. 所以直角三角形的解法是解任意三角形的基礎，而直角三角形的解法又是任意三角形解法的特例.

任意三角形的边角关系

現在我們來研究任意三角形的分类和基本元素之間的关系. 关于任意三角形的分类，在平面几何里已告訴我們，有四种三角形一定可以作出的.

(1)**已知兩角一对边和兩角一夾边.**

(2)**已知兩边一夾角.**

(3)**已知三边.**

(4)**已知兩边一对角.**

以上四种三角形除(4)必須進行討論有一解、二解或無解外，其他(1)(2)(3)只要在已給条件可能作出三角形的情况下，都有唯一的三角形存在. 凡是用几何能作出的三角形，我們一定可以用三角方法求解，并且要比几何方法解三角形深入細致得多，可由已知的元素計算出其他的元素.

任意三角形的六个基本元素三只角和三条边，常用a,b,c表示边，A,B,C表示角，也常用α,β,γ表示角的度数. 这六个元素也不是完全彼此独立的，而是在一定程度上相互依賴和制約的.

各內角A,B,C之間的关系，在几何学內已經知道，

即
$$\boldsymbol{A+B+C=180^\circ}.$$

各边之間的关系，几何学內只証明了同一三角形內兩边之和大于第三边，

即 $a+b>c$. 但 $a+b$ 到底比 c 大多少是無法肯定的(即使有足够条件)，因此这个关系还不够精确，有進一步研究的必要.

同样的，各边与各角之間的关系，几何学内也只說明了大边对大角和大角对大边。它們之間的大小关系究竟怎样呢？比如 a 是 b 的兩倍，那末 a 边的对角是不是 b 边的对角的兩倍呢？这个問題在几何学是沒有獲得解决的，因此我們也無法利用这些关系來解三角形。

为了要進一步运用三角方法來解三角形，我們要導出一些三角形內边角之間的关系。

前述三角形內如果一边是另一边的兩倍，它們的对角的关系如何？这一問題我們可以先选几只比較熟悉的三角形來研究。

圖 7 是一只含有 30° 和 60° 的直角三角形，从几何学內的关系，知道：

$$c=2b,\qquad a=\sqrt{3}\,b,$$

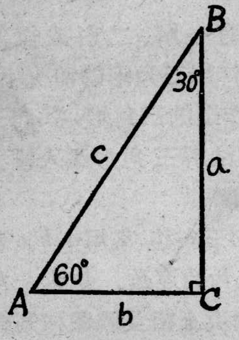

圖 7

边 c 是边 b 的兩倍，現在它們的对角 $C=90°$，$B=30°$，顯然可知 C 不是 B 的兩倍而是三倍，但如果拿它們的正弦來比較，

則有 $\qquad \sin C=\sin 90°=1,$

$$\sin B=\sin 30°=\frac{1}{2}.$$

比較得 $\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$，也就是 $\sin C$ 是 $\sin B$ 的兩倍，

即 $$\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}.$$

再看看边 a 与边 b 的比是 $\sqrt{3}:1$，也与它們的对角的正弦之比相等。

現在我們再看另一只比較熟悉的三角形。

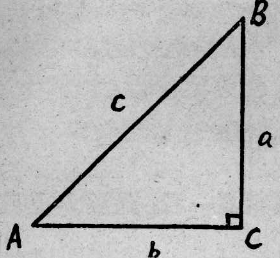

圖 8

圖8是一只等腰直角三角形，則有

$$a=b, \qquad c=\sqrt{2}\,b,$$

$$A=B=45°, \quad C=90°,$$

等边对等角的关系，我們不必討論它，

今 $$c:a=\sqrt{2}:1,$$

而 $$\sin C:\sin A=\sin 90°:\sin 45°$$

$$=1:\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}:1$$

也有 $$c:a=\sin C:\sin A.$$

但这还是特殊三角形的特殊情形，我們再从一般三角形來研究这个关系。

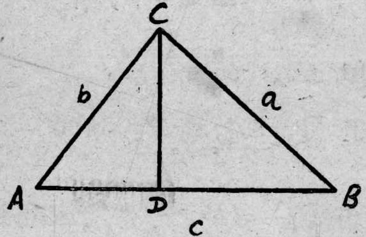

圖 9

在圖9的$\triangle ABC$中，作$CD\perp AB$，則$\triangle ADC$及$\triangle BDC$都是$R\triangle$；在直角$\triangle ADC$中，$CD=b\sin A$，在直角$\triangle BDC$中，$CD=a\sin B$，由上面兩式比較得，

$$b\sin A=a\sin B,$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}.$$

由本例可以看出，三角形兩边之比等于它們所对角的正弦之比，是具有一般性了。但还有必要看一看，当A或B是鈍角的情形。

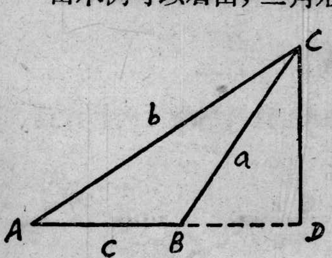

圖 10

在圖10的$\triangle ABC$中，角B是鈍角，作$CD\perp AB$交AB的延長綫于D，在直角$\triangle ADC$中，

$$CD = b\sin A,$$

在　$R\triangle BDC$ 中，$CD = a\sin(180° - B) = a\sin B$，

由上式比較得，　$b\sin A = a\sin B$，

$$\therefore \qquad \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

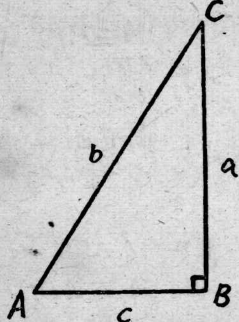

圖　11

这里应該再看一看，如果 B 是直角的情形。

在圖 11 的 $\triangle ABC$ 中，角 B 是直角，因为 $\triangle ABC$ 是直角三角形，可以根据三角函数定义得，

$$\sin A = \frac{a}{b},$$

即 $$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{1},$$

但　$B = 90°$，$\sin B = \sin 90° = 1$，

以 $\sin B$ 代入得，

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin A}{\sin B}$，所得比例关系仍然是一致的。于是，我們得到結論：

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin A}{\sin B}$ 是一般性的眞理，这个关系能適用于任意三角形，同样可以証明：

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

为了使这三个关系式寫得整齐些，我們利用比例的性質，把它們变形为如下的形式：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

上式就是：**三角形的各边与它們的对角的正弦成正比例**，这

一个关系叫做**正弦定理**.

正弦定理也可以从三角形的一边与外接圓直徑之間的关系中導出. 这个关系是: 三角形一边与它的外接圓直徑之比等于这边的对角的正弦,

即 $a=2R\sin A$,(R 指三角形外接圓半徑)

$$b=2R\sin B,$$

$$c=2R\sin C.$$

現在讓我們來証明这个关系:

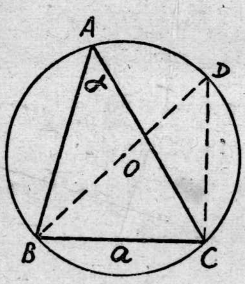

圖 12

(1)設如圖 12, α 为銳角, $BC=a$, R 是△外接圓半徑.

証明: 作 $\triangle ABC$ 的外接圓, 因为要求 a, α, 和 $2R$ 的关系, 因此我們添置补助綫 BD 直徑, 連 DC, 則有

$$\angle BCD=\angle R.$$

又同弓形內的弓形角相等,

即 $\angle BDC=\angle BAC=\alpha$,

在 $R\triangle BCD$ 中, 由正弦函数定义得:

$$\frac{BC}{BD}=\sin D=\sin A,$$

即 $$\frac{a}{2R}=\sin A,$$

$$\therefore \quad a=2R\sin A.$$

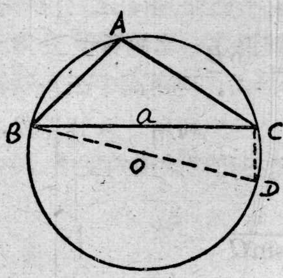

圖 13

(2)設如圖 13 中 A 为鈍角.

証明: 作 $\triangle ABC$ 的外接圓, 作直徑 BD 并連 DC, 則有 $\angle BCD=\angle R$; 因为 A 是鈍角, 所以过 B 点的直徑 BD 必在 $\triangle ABC$ 外, 而有

$$\angle BDC=180^\circ-A.$$

因此，$$\frac{BC}{BD}=\sin(180^\circ-A)=\sin A,$$

即 $$\frac{a}{2R}=\sin A,$$

仍得 $$a=2R\sin A.$$

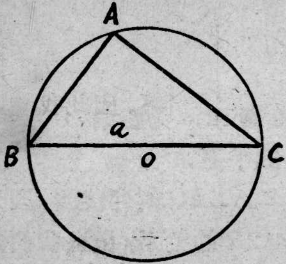

圖 14

(3)設如圖 14 中 A 是直角。

証明：因为 BC 就是 △ 外接圓的直徑，

$\therefore$ $$BC=2R,$$

又 $$a=BC=2R,$$

今 $$\sin A=\sin 90^\circ=1,$$

由此得 $$a=2R\sin A.$$

証到这里已可証明 $a=2R\sin a$ 能適用于任何三角形，我們可以用同样的証法証得

$$b=2R\sin B,$$
$$c=2R\sin C.$$

再从上面这三个关系式，就很容易証明正弦定理，

即 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

这样的从上述关系証得**正弦定理，不僅証得了三角形的各边与其对角的正弦之比相等，而且还証得这一比值等于三角形外接圓的直徑。**我們要求学生熟記关系式。現用高中三角新編課本，对正弦定理的証法是正确的。

我們为了解斜三角形，所以要研究三角形的边角关系，現在提出下面的兩种关系，甚为重要：

I 角的关系：

$$A+B+C=180^\circ. \tag{1}$$