自然科学丛书

Ziran Kexue congshu

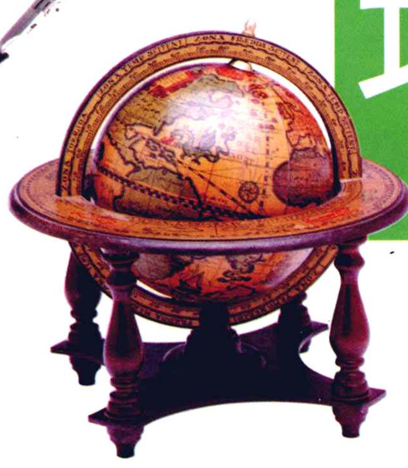
主编★黄勇

数学天地

量与形的旋律（下）

数学就像空气一样，到处都有，谁也离不开它，但谁也不能直接看清它的面貌、它的影子。

科学家发现，数量和形状是事物最基本的性质，认识事物常常需要从研究数量和形状开始。数学正是从打结记数和土地测量开始的。



古人民出版社

数学天地

——量与形的旋律

主编　黄　勇

（下）

内蒙古人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学天地:量与形的旋律. 下册/黄勇主编. —呼和浩特:内蒙古人民出版社,2007.12

(自然科学丛书)

ISBN 978-7-204-09336-6

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 黄…　Ⅲ. 数学-普及读物　Ⅳ. 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 194262 号

自然科学丛书

黄　勇　主编

责任编辑: 王继雄
封面设计: 烽火视觉
出版发行: 内蒙古人民出版社
地　　址: 呼和浩特市新城区新华东街祥泰大厦
印　　制: 北京海德伟业印务有限公司
经　　销: 新华书店
开　　本: 787×1092　　1/32
印　　张: 120
字　　数: 1440 千字
版　　次: 2008 年 1 月第一版
印　　次: 2008 年 1 月第一次印刷
印　　数: 1-5000 (套)
书　　号: ISBN 978-7-204-09336-6/Z·525
定　　价: 595.20 元 (全 24 册)

如出现印装质量问题，请与我社联系。
联系电话: (0471) 4971562　4971659

生活中的数学

用单循环制进行的比赛场数的计算

用淘汰制进行球类锦标赛，比赛场数比较少，所需用的时间较短，所以，报名人数较多的个人锦标赛往往采用这种方法。但有一个缺点，就是要获得冠军，中途不能有失。而且如果两强相遇过早，所产生的亚军和其他名次往往与实际水平不完全相符。因此，在报名单位较少的一些团体锦标赛中，往往不采用淘汰制而采用另一种比赛方法——循环制。

用循环制进行的比赛场数应该怎样计算呢？下面我们来看一个例子。如果你所在的学校有 15 个班级，每个班级有 1 个球队参加比赛，若用单循环制进行，一共要比赛几场？

如果用单循环制进行比赛，每一个队要和另一个队比赛一场，所以在 15 个球队中，每一个队伍要进行 14 场比赛，15 个球队就有 15×14 场比赛。但每场比赛是两队互相交锋的，因此，这样计算就把一场比赛算做两次了，而实际的比赛场数是 $\frac{15 \times 14}{2} = 105$（场）。

我们再来看看世界杯足球赛的例子。98 世界杯足球赛有 32 支参赛球队，如果始终采用单循环制进行比赛，那么一共要进行的比赛场数是 $(32 \times 31) \div 2 = 496$（次）。

一般说来，单循环制的比赛，如果有 n 队报名，那么，

比赛的场数总共是：

$$\frac{n\times(n-1)}{2}$$

但是这样安排场次太多，费时太长。因此，许多比赛采用的不完全是单循环制，而是分组双轮单循环制。下面我们来看，如果把 15 队分成三组，每组 5 队，采用分组双轮单循环制，一共要比赛几场？

在这三组中用单循环制进行比赛，产生三个分组冠军，这三队再进行第二轮的单循环赛，产生冠亚军。这样：

第一轮是$\frac{5\times4}{2}+\frac{5\times4}{2}+\frac{5\times4}{2}=30$（场）；

第二轮是$\frac{3\times2}{2}=3$（场）；

比赛的总场数是 $30+3=33$（场）。

再来看 98 世纪杯足球赛的例子，32 支参赛队分成 8 个组，每组 4 个队。如果按照分组进行双轮单循环赛，那么，第一轮要比赛$\frac{4\times3}{2}\times8=48$（场），产生 8 个分组冠军；第二轮，这 8 个队再进行 $(8\times7)\div2=28$（场）比赛，决出冠亚军。

现在请你用同样的方法来安排一次乒乓球赛，报名参加男子团体赛的有 26 个队，报名参加女子团体赛的有 19 个队。如果用单循环制进行比赛，要安排几场比赛？如果各分成三组，男子两组各 9 队，一组 8 队，女子两组各 6 队，一组 7 队，采用分组双轮单循环制，一共要比赛几场？事实上很多比赛会同时采用这两种比赛方式——淘汰制和单循环制。例如 98 世界杯足球赛，先是 32 支球队分成 8 个组，采用分组单循环制，进行 48 场比赛，每组的冠亚军共 16 支球

队，再采用淘汰制，进行 8 场比赛，决出前 8 强。再用淘汰制，进行 4 场比赛，决出前 4 名。还是用淘汰制，进行 2 场比赛，决出前 2 名。最后前 2 名争夺冠亚军，另外还安排一场决出 3、4 名的比赛。这样比赛场数总共是 $48+8+4+2+1+1=64$（场）。

池塘中的芦苇有多高

陈明和张红、方华在昆明湖中划船，岸边有一棵芦苇露出水面。这棵芦苇有多长呢？这里水有多深呢？小明捉摸了一会，拿出尺来量了量芦苇露出水面的长度是 11 厘米。芦苇离岸边的距离是 3 米零 1 厘米，他又扯着芦苇顶端引到岸边，芦苇顶正好和水面相齐，陈明高兴地说，我可以算出芦苇的长度和水深。张红和方华感到奇怪：你怎么会算的呢？陈明说："我叔叔有一本《九章算术》，那是汉朝的著作，离现在快两千年了。前天晚上，叔叔给我讲了其中一个题目，就是计算芦苇长度的。"接着，陈明给他的小伙伴讲了这个《九章算术》勾股章的第六题。题目是：

"有一个方池，每边长一丈，池中央长了一棵芦苇，露出水面恰好一尺，把芦苇的顶端引到岸边，苇顶和岸边水面刚好相齐，问水深、苇长各多少？"

设池宽 $ED=2a=10$ 尺，C 是 ED 的中央，那么，$DC=a=5$ 尺，生长在池中央的芦苇是 AB，露出水面的部分 $AC=1$ 尺，而 $AB=BD$，设 $BD=c$，水深 $BC=b$，$\triangle BDC$ 是一个勾股形。显然 $AC=AB-BC=c-b=1$ 尺，AC 的长等于勾股形中弦和股的差，称为股弦差。于是，问题就变了：已知勾股

形的勾长和股弦差长，求股长和弦长。

由勾股定理得

$$a^2=c^2-b^2$$

那么，

$$\begin{aligned} a^2-(c-b)^2 &= c^2-b^2-(c-b)^2 \\ &= c^2-b^2-(c^2-2bc+b^2) \\ &= 2bc-2b^2 \\ &= 2b(c-b) \end{aligned}$$

所以

$$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)} \qquad (1)$$

$$c=b+(c-b) \qquad (2)$$

将 a，c－b 的数值代入（1）、（2）两式，很容易求出水深 b＝12 尺，苇长 c＝13 尺。《九章算术》用非常精练的语言概括了这个解法：

半池方自乘，以出水一尺自乘，减之，余、倍出水除之，即得水深。加出水数，得葭（苇）长。

这段话翻译成数学语言就是（1）式和（2）式。

怎样渡河才更好

暴风雨过去了，一支巡回医疗队来到河边，哪知木桥已被洪水冲断，怎么办呢？正在焦急的时候，忽然看见一条小船向这边驶来。

“啊，太好啦！村里两个少先队员来接我们啦！”大家高兴极了。

可是，这条船实在太小，它只能承载两个孩子或者一个大人。

“怎样才能全部渡到对岸去呢?”大家都在沉思着。

聪明机智的少先队员，很快想出了渡河方案，巧妙地把大家全部渡到对岸，是怎样一个方案呢?

首先，两个少先队员把船划到对岸。

接着，他们之中一个留在对岸，另一个划回来。

这个少先队员上岸，一个医疗队员划过去。医疗队员上岸，留在对岸的少先队员划回来。

这时，一个医疗队员已到对岸，而两个少先队员却都回到这边来。整个过程这样重复下去，直到每一个医疗队员全都渡过河去为止。

这里渡河的程序是何等重要，先怎样，后怎样，再怎样，必须按一定的次序。

用什么方法挑选自己满意的商品

我们经常会遇到这样的情况：购买商品时，同样的商品有很多，怎样挑选出最满意的一个来呢?当然，营业员不可能把所有的商品都拿出来任你挑选，我们也就没有多大的挑选余地，但如果摆在你面前的商品有很多，你该如何挑选呢?又譬如说生产厂家要从自己的产品中，挑选一个最好的去参加评比，怎样从众多的产品中挑选呢?

所谓满意的标准有很多，对于顾客来说，商品的好坏大致有三个标准：一是商品的质量，二是商品的外观，三是商品的价格。而这三者往往不容易完全兼顾，顾客的心理也有

差异，有人对外观的要求较高，而有人则更看重价格。这里，我们假定顾客心中已经有一定的标准，能够从两件商品中区分出好坏。

现在假定有 n 件商品供你挑选。一般的方法是采取两两比较，先对其中两个进行比较，再换两个进行比较，如此一直下去，直到最后选出最优的一个来。作两两比较，人们总是希望比较的次数越少越好，那么从 n 件商品中选出一个最优的至少要比较多少次呢？为了叙述方便，我们把这个次数记为 f（n）。

如果 n=2，即从两件商品中挑选一个最优的，只须进行一次比较就可以了。因此，f（2）=1。

如果 n=3，可以先对其中两件商品作比较，选出的优胜者再与另一件相比，选出最优的，因而只须进行两次比较，即 f（3）=2。

下面，我们来看一般情形，n 件商品，我们先任取两件作比较，选出一个再与下一个相比，如此继续，到最后一件，那么一共进行的比较次数是 n-1 次。这一方案所用的比较次数一定不比 f（n）小，有 f（n）≤n-1。

现在我们假设已经有一个方案，只需进行 f（n）次比较。那么，第一次比较总是从其中的两个开始的，淘汰掉一个之后，优胜者与其他 n-2 件的最少比较次数是 f（n-1），而原方案去掉第一次比较剩余的比较方案恰好是 n-1 件商品选优的一种方案。于是，有 f（n）-1≥f（n-1），即

$$
\begin{aligned}
f(n) &\geq f(n-1)+1 \geq f(n-2)+1+1 \\
&\geq f(n-3)+3 \geq \cdots \geq f<n-(n-2)+n-2 \\
&= f(2)+n-2 = 1+n-2 = n-1
\end{aligned}
$$

前面已知 $f(n) \leqslant n-1$，现又有 $f(n) \geqslant n-1$，于是，$f(n)=n-1$。也就是说，从 n 件商品中挑选出一个最优的，至少要作 n－1 次比较。前面我们已经给出了一个作 n－1 次比较的方案，当然也还有其他的最佳方案。比如说，我们可以把商品先分成若干个组，在组内先进行比较，然后每组的优胜者再拿到一起作比较。

下面我们来看如何从 n 件商品中挑选两个最优。我们只要求能找出两个最满意的商品，而不需要在两个商品中再区分最优。这时最少的比较次数是多少呢？我们先从 n 件商品中选出一个最优来，最少的比较次数是 n－1，去掉这个最优，再从剩下的 n－1 件商品中选出一个最优，最少进行 n－2 次比较，这时我们保证了这两件商品确实比其他 n－2 件商品更优。由于不需要区分冠亚军，所以在这 2n－3 次比较中，我们还应去掉一次冠亚军之间进行的比较，于是我们最少的比较次数是 2n－4。那么，这些比较又如何进行呢？这一问题我们留给读者自己去思考。

怎样巧算圆木堆垛

在货栈或仓库里，物品的码放都是很有次序的，这样不仅整齐美观，取用方便，而且也易于统计。

有一堆长短粗细相同的圆木堆放在露天仓库里，按以下规律排列：最下边一层是 10 根，以后每一层比下一层少一根，最上边一层是 1 根，这堆圆木一共有多少根？

有的同学说，圆木堆垛的横截面是一个三角形，底层是 10 根，高是 10 层，列式为：$10 \times 10 \div 2 = 50$（根），这堆圆

木共50根。

也有同学说，圆木堆垛的横截面是一个梯形，下底层是10根，上底层是1根，高是10层，列式为：（10+1）×10÷2=55（根），这堆圆木共55根。

这两个答案哪个对呢？让我们来分析一下。

假如你在这堆圆木旁边，再并排地放上同样的一堆，只是上下倒置。这时，这两堆圆木合成的圆木堆，每一层的根数，恰好是底层与顶层根数的和，底层是10根顶层是1根，每一层的根数是10+1=11（根），一共是10层，11×10=110（根），这110根是两堆圆木的总根数，原来的这堆圆木的根数就是这两堆圆木总根数的一半，110÷2=55（根）。由此说明，认为“这堆圆木共50根”的答案是错误的。错误的根本原因在于，不应该把圆木堆垛的横截面看成为三角形，虽然它的上底很短，数值很小，是“1”，但它毕竟不是“0”，只有当梯形的上底逐渐缩短，数值成为“0”时，梯形才转化成三角形了。

一般的计算公式是：

$$\frac{（\text{底层根数}+\text{顶层根数}）\times\text{层数}}{2}$$

如果有一堆钢管堆放在地上，第一层是8根，底层是20根，每层仍是依次减少一根，要求这堆钢管总数是多少根，也可以用这个公式来计算：

$$\text{总根数}=\frac{（\text{底层根数}+\text{顶层根数}）\times\text{层数}}{2}=$$

$\frac{(20+8)\times13}{2}=182$（根），这堆钢管总数是182根。

“巧算圆木堆垛”的方法还可以推广到其他圆柱形物体

的计算上去，如铅笔厂计算铅笔的支数、水泥管厂计算水泥管数等。除此以外，你能不能用这种巧算的方法去计算：101＋102＋103……＋198＋199＋200的和呢？把101看作顶层的数，200看作底层的数，100个数是层数，列式为：

$$\frac{(101+200)\times 100}{2}=15050$$

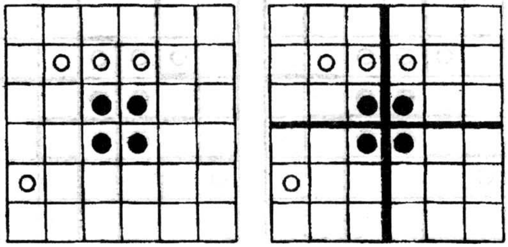
其实，这道题还可以这样算：150.5×100＝15050，你猜猜，这又是怎么想的呢？

趣味几何

意大利著名科学家伽利略曾经说过："大自然用数学语言讲话，这个语言的字母是：圆、三角形以及其他各种数学形体。"几何学研究的对象正是圆、三角形及其他各种数学形体。

一个由36个小方格组成的正方形，如图所示，放着4个黑子和4个白子。现在要把它分割成形状大小都相同的4块，并使每一块里都有一个黑子和一个白子，应怎样分割？

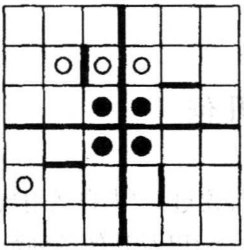
分析：要将图形分成大小相同的四块，可先将图形一分

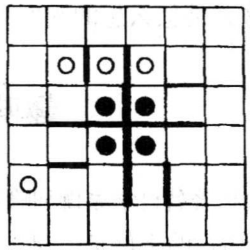


图（A）

为四，如图（A）

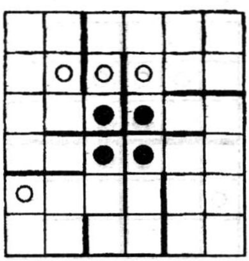
但这样左上角一块中就出现了两个白子，为此必须将它们割开。但问题要求4块形状大小都要一样，因此只要一块割开，其他3块都要做同样的割开，如图（B）。然后再将原来的分割线去掉一部分。如果去掉近中心的1/3，则黑子就会连成一片；如果去掉中间的1/3，又会有两个白子连在一起。因此只可去掉靠边上的1/3，如图（C）。





图（B）　　图（C）

现在只需要把左边两个白子分开。显然，只要将4条短的分割线延长到边，就能达到目的，如图（D）。到此，图中的6条分割线都不能再延长，只能沿折线分割，成为符合要求的图（E）。



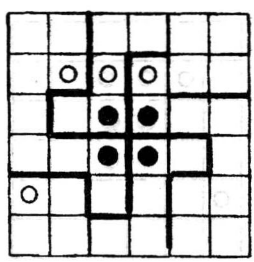


图 D（D）　　图（E）

节能灶

便民小吃店准备改进炉灶，知道煤厂生产有两种蜂窝煤。大蜂窝煤的直径是小蜂窝煤直径的 2 倍，3 个大蜂窝煤垒起的高度与 4 个小蜂窝煤垒起的高度相等。

假如砌的炉灶采用 3 块大蜂窝煤，那么相当于多少块小蜂窝煤的热值？如果按同样热值的那么多小蜂窝煤砌成炉灶，哪个灶更节省？

解答：假设大蜂窝煤半径为 R，高度为 b，小蜂窝煤半径为 r，高度为 a，则：

$$R = 2r,\ 3b = 4a$$

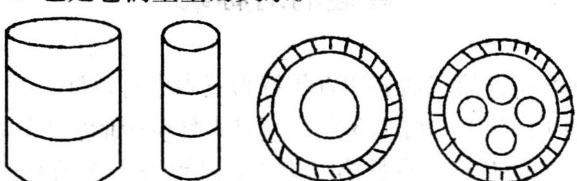
大蜂窝煤的体积为 $\pi R^2 \cdot b$，小蜂窝煤的体积为 $\pi r^2 \cdot a$。

$$\therefore \pi R^2 \cdot b = \pi\ (2r)\ \cdot \frac{3}{4} \cdot a$$

$$= \frac{16}{3} \cdot \pi r^2 \cdot a$$

即　$3\pi R^2 \cdot b = 16\pi r^2 \cdot a$

由此可知，3 个大蜂窝煤的体积等于 16 个小蜂窝煤的体积，3∶16 也是它们重量的关系。



由于热值与其质量成正比，相同质量的蜂窝煤应该产生

相同的热值，所以要砌放3块大蜂窝煤的炉灶，也可以砌成能放16块小蜂窝煤的炉灶，如同图上所示的两种炉膛内的蜂窝煤全部燃烧（令中间小孔不计），其燃烧面积应该是上端面的面积加上侧面的面积之和，于是，对于16块小蜂窝煤，燃烧表面积之和为：

$$S_A = 4 \times 4 \times (\pi r^2 + 2\pi ra)$$
$$= 16\pi r^2 + 32\pi ra$$

3块大蜂窝煤，其燃烧表面积为：

$$S_B = 3 \times (\pi R^2 + 2\pi R \cdot b)$$
$$= 3\pi R^2 + 6\pi Rb$$
$$\because R = 2r,\ b = \frac{3}{4}a$$
$$\therefore S_B = 3\pi (2r)^2 + 6\pi (2r) \frac{4}{3}a$$
$$= 12\pi r^2 + 16\pi r2a$$
$$\therefore S_A > S_B$$

由此，小蜂窝煤燃烧面积大，烧得快，不节省煤，而大蜂窝煤燃烧面积适中，烧得慢，省煤。

青蛙的对称跳

1985年，第三届五四青年智力竞赛中有这样一道题：

地面上有A、B、C 3点，一只青蛙位于地面上距离C点为0.27米的P点，青蛙第一步从P跳到关于A的对称点P_1，我们把这个动作说成是青蛙从P点关于A点作“对称跳”；第二步从P_1出发对B点做对称跳到P_2；第三步从P_2点出发

对 C 点做对称跳到达 P_3；第四步从 P_3 再对 A 做对称跳到达 P_4，……，按这种方式一直跳下去。若青蛙第 1985 步对称跳之后到达 P_{1985}，问此点与出发点 P 的距离为多少厘米?

要在短时间内把 1985 步对称跳都做出来是困难的，这里面一定隐含着某种规律。

设想我们在地面上建立了一个直角坐标系，使出发点 P 正好是坐标原点，并设 A（a_1，a_2）B（b_1，b_2），C（c_1，c_2）。

根据对称跳的定义，P 和 P_1 关于 A 点对称。由于 P（0，0），则点 P_1 的坐标为（$2a_1$，$2b_1$）。设 P_2（x_2，y_2），由于 B 是 P_1 与 P_2 的中点，则 $x_2=2b_1-2a_1$，$y_2=2b_2-2a_2$。实际上，我们只须关心点的第一个坐标。

设 P_i（x_i，y_i），i=1，2，3，4，5，6，我们又有

$x_3=2c_1-x_2=2（c_1-b_1+a_1）$，

$x_4=2a_1-x_3=2（b_1-c_1）$，

$x_5=2b_1-x_4=2c_1$，

$x_6=2c_1-x_5=0$。

类似地可知 $y_6=0$，这表明 $P_6=P$，也就是说，经过关于 A，B，C 的 6 次对称跳之后，青蛙又回后到了原出发点，这又可以说成：这样的对称以 6 为周期。由于 $1985=6\times330+5$，所以经过 1985 步对称跳，实际上相当于只做了 5 次对称跳，或者说只差一步就跳回到原点，它与 P 是关于点 C 对称的两点，因此。

P_{1985}与 P 的距离 $=P_5$ 与 P 的距离

$=2\times$（P 与 C 的距离）$=2\times0.27$ 米

$=0.54$ 米 $=54$ 厘米。

影子部队

数学大军中有一支劲旅，称做“影子部队”。它就是“三角函数”，因为它离不开角度，它总是跟随着角度，像它的影子一样。

这天，影子部队随着角度观光了三角形博览会。角度是这里的常客，它也很自负，它说：“任何△ABC，三个内角和为 180°。”说完没有人理它，它又说：“△ABC 若是直角三角形，那么 Rt∠C = ∠A + ∠B。”这时影子部队答了话：“凡是有你的地方，就有我存在。至于△ABC 若满足下列条件：

$$\sin C=\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$$

则△ABC 一定是直角三角形。不信，你可以试试。”

证明；先设△ABC 为任意三角形，有 A + B + C = 180°

$$\therefore \text{右式}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{180^\circ-C}{2}}{\cos\frac{180^\circ-C}{2}}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

左式：$=2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$