

国家“十一五”重点图书

量子物理新进展系列

开放系统量子退相干的 纠缠态表象论

范洪义 胡利云 著



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

量子物理新进展系列

上海交通大学学术出版基金资助项目

开放系统量子退相干的 纠缠态表象论

范洪义 胡利云 著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

量子退相干是一个基本、重要,又颇具“魔力”的物理问题。本书介绍利用纠缠态表象和有序算符内的积分技术求解密度矩阵主方程的简明有效的新理论,以探求各种初始量子态的退相干的物理实质,并首次系统求出了多种密度矩阵的无限连续和形式,为量子光学、量子统计和量子信息论的研究提供了新思路,增添了新篇章。本书适合对量子论有兴趣的大学师生和理论研究人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

开放系统量子退相干的纠缠态表象论/范洪义,胡利云著. —上海:上海交通大学出版社,2010

(量子物理新进展系列)

ISBN 978-7-313-06858-3

I. ①开… II. ①范…②胡… III. ①量子力学—相干—研究 IV. ①0413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 195660 号

开放系统量子退相干的纠缠态表象论

范洪义 胡利云

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 韩建民

常熟市华通印刷有限公司印刷 全国新华书店经销

开本: 850mm×1168mm 1/32 印张: 11.625 字数: 298 千字

2010 年 12 月第 1 版 2010 年 12 月第 1 次印刷

印数: 1~2030

ISBN 978-7-313-06858-3/O 定价: 53.00 元

版权所有 侵权必究

前言

清代学者俞樾在《九九消夏录》曾对格物致知（即研究物理）写道：

“致知在格物，夫格物，乃大学教人之始，非可索之玄妙，亦不必求之过高，要使学者有可以入手之处，乃得为之。是故格者，格之训正，经传屡见正也。”

他又写道：“格，正也。欲致其知，在正其物，其物不正，知不可得而致也。”

我们不妨把“格”理解为研究，“正”理解为正确有效的方法，方法不对头，不可得知也。诚然，物理学是一门实验性极强的科学，所以不能因为应用了有效的数学新方法而过分强调数学的万能性，这也是为什么实验物理学家常常会怀疑过多地应用了数学。但是我们钻研理论愈深刻，知识就愈渊博，所需要验证理论的实验需求就愈少。

学习了好的方法，是否就会有科研成果呢？读者还必须如陶渊明所写过的那样：

淡柔情于俗内，负雅志于高云。

考所愿而必违，徒契契以苦心。

竟寂寞而无见，独悄悄以空寻。

这几句话摘自陶公的《闲情赋》。陶公的寂寞，起于何处，其空寻又止于何处，我们不得而知，也不想猜测。难道学研物理是闲情吗？从某种角度上说这是对的。嗜好科研，就如在海边拾贝壳那样，看成是闲情逸致，就会感觉有趣而不易疲劳，不会感到科研是个苦差使。

理论物理学家的任务是设法理解自然。爱因斯坦有一句名言：

“关于自然,最不可思议的事就是它是可以被理解的。”爱因斯坦的晚年致力于统一场理论的研究工作,就是希望以简单的原理来统一地描述物质世界的演化.早在 1917 年,爱因斯坦在给克莱因的信中写道:“尽管我们用简单性原则选择复杂(现象),但是没有任何根据说明这种理论方法是永远恰当的(充分的).……我毫不怀疑,总有一天,因为我们现在还不能想象的理由,会出现另一个新的描述来代替现在这个.我相信,这种理论代谢的深化过程是没有尽头的。”

从这一段话中,我们看到理论物理学家应该致力于用简单性原则去了解透析复杂嶙峋的现象,并以自己的感觉(直觉)以平易的方式感染与影响大众,而实现理论方法的新陈代谢,以探索更优美更简洁的步伐也是永远不会停息的. M·玻恩曾如此评说海森堡创建矩阵力学:“这个外行虽不知道适合于他的数学分支,可是一旦需要,他就能给自己创建适用的数学方法.这个外行该多有天才”.因此在学习量子力学这门博大精深而又玄妙的学科时,有必要探讨新的方法以进入更深的物理境界.

发现新方法的途径之一是:从欣赏数学形式的美感得到启示,从而产生有新意的飞跃.物理学家温伯格认为,对于某些科学家来说(如爱因斯坦和狄拉克),数学形式主义的美学魅力常常提示着这种飞跃的方向.物理学家 Erenfest 很欣赏 Boltzmann 能围绕一个中心问题而建构统计力学的方法这样一个庞大的思维体系.马赫说:“科学的方法是最大限度的思维经济,花费尽可能少的思维对事实做出尽可能最完善的陈述.”

摆在物理学家面前的量子退相干问题是基于宇宙间绝大多数物理系统都不是孤立的,而是处在“热库”中与其有热交换(称为开放系统)的考虑.因此,量子退相干与热的本性密切相关,那么什么是热的本性呢?在爱因斯坦的自述中,曾提到他的老同学、数学家格罗斯曼的一句非常俏皮而又具有特色的话:“我从学习物理当中也得到了某些实际的好处.从前当我坐在椅子上感觉到先于我坐

这椅子的人留下的余热时,我总有点不自在.但现在已经没有这种不适感了,因为物理学告知我,热是某种非个人的东西.”但仅仅是这点感受是远远不够的,即使用热力学三个定理来回答这个问题也是不够的,用 Boltzmann 的统计力学来解释也还欠缺.20 世纪初 Planck 在研究热辐射时以敏锐的洞察力在瑞利-琼斯公式和维恩公式的矛盾中发现了电磁辐射的单元——光量子的存在,拉开了 20 世纪量子物理学的帷幕.爱因斯坦说:“这一发现成为 20 世纪整个物理学研究的基础”,例如玻色把热辐射场考虑成为由光子组成的气体.进入 21 世纪,人们更认识到热的本性问题和量子信息的传播、量子通道的衰减、量子纠缠系统的退相干密不可分.

本书旨在以崭新的角度来研究开放系统的退相干问题,并体现“思维经济”的原则.书中我们提出用有序算符内的积分(IWOP)技术和热纠缠态表象的新方法处理量子退相干问题,求解量子统计、量子光学和量子信息理论中若干密度矩阵主方程并得到退相干的结果:求出了解的无穷算符和形式的 Kraus 算符,它清晰地表明密度矩阵的时间演化,从而确定量子通道,促进了开放系统的量子理论的新进展.

读者看我们的书,需要较熟练地掌握 IWOP 技术,这样才能做到:难懂处一语而尽,易懂处莫便放过.而关于这些新方法的介绍,读者可参考以下五本书:《量子力学表象与变换论——狄拉克符号法进展》,《量子力学纠缠态表象及应用》,《从量子力学到量子光学——数理进展》,《量子力学数理基础进展》和《光学变换——从量子到经典》.

人的精力与时光有限,而追求科学真理无涯,因此吾人读书,当读悠久不朽者、创意鲜明者、理论优美者、方法直接者、叙述清晰者,以此五点为标准,则鲜见佳本也.然 Dirac 的《量子力学原理》当视贤哲著作,不但名震一时,而且数出其版,历代人们学而研之,经久不衰.本书作者不才,写作时处处以 Dirac 书为楷模.然终究水平有限,祈望读者批评教正.

作者范洪义在写作过程中得到妻子翁海光以及研究生的协助,他们是袁洪春、徐学翔、陆海亮、唐绪兵、范悦、李恒梅、陈俊华、李玉剑、谢传梅,在此他深表感谢.每当夜深人静、身心疲倦想偷点懒时,范洪义脑海里就会闪现慈母毛婉珍 50 年前在灯下为小学生批阅作文时边读边改时的情景,她那消瘦的脸庞和慈祥的目光浮现在儿子眼前,鞭策着他再打起精神,坚持工作一会儿.另一作者胡利云在写作过程中得到妻子贾芳的大力支持,在漫长的求学历程中,她始终给了丈夫无微不至的关怀和照顾.胡利云十分感谢她在其攻读博士学位期间做出的理解与支持.

作者还感谢上海交通大学的张杰校长、谢绳武校长和叶取源副校长,以及叶庆好教授,他们对于作者的学术水平的估量和信任是作者顺利完成本书写作的前提之一.

目 录

第 1 章 开放量子系统理论简介	1
1.1 引言	1
1.2 开放系统量子态的演化	2
1.2.1 超算符(算符和表示)	3
1.2.2 超算符的性质与 Kraus 定理	4
1.3 三个典型量子通道的密度算符的和表示	5
1.3.1 退极化通道	5
1.3.2 位相阻尼通道	8
1.3.3 振幅阻尼通道	10
1.4 密度算符主方程	11
1.4.1 密度算符主方程的导出	11
1.4.2 主方程的两种传统求解方法	15
第 2 章 有序算符内的积分技术(IWOP 技术)与新的 算符恒等式	23
2.1 引言	23
2.2 有序算符内的积分技术(IWOP 技术)	25
2.3 几种常用的量子力学表象	28
2.3.1 坐标表象与动量表象	28
2.3.2 相干态表象	30
2.3.3 利用 IWOP 技术导出单模压缩算符	31
2.4 纠缠态表象与双模压缩算符	33
2.5 Wigner 函数与 Wigner 算符	38

2.6	纠缠态表象下的 Wigner 算符	42
2.7	若干指数算符分解的简单方法	44
2.7.1	与单模压缩有关的指数算符分解	44
2.7.2	与双模压缩有关的指数算符分解	49
 第 3 章 用热纠缠态表象求解密度算符主方程 (I)——主方程的转化及有关应用		
3.1	热纠缠态表象	55
3.1.1	热纠缠态表象 $ \eta\rangle$ 的引入	57
3.1.2	密度算符主方程转化为 C 数方程的一般规则	58
3.2	密度算符主方程的求解	63
3.2.1	密度算符 ρ 的混合相干态表示	63
3.2.2	由 $\langle\eta \rho\rangle$ 推导 ρ 的公式	64
3.3	由 ρ 推导内积函数 $\langle\eta \rho\rangle$ 的新公式	67
3.4	$\langle\eta \rho\rangle$ 与正 P 表示间的关系	71
3.5	内积函数 $\langle\eta \rho\rangle$ 表示的应用	74
3.5.1	算符系综平均值的计算	74
3.5.2	Wigner 函数的计算	77
3.6	热 Wigner 算符及其应用	79
 第 4 章 热纠缠态表象求解密度算符主方程 (II)——密度算符的无限和表示		
4.1	振幅衰减模型的密度算符主方程	91
4.1.1	$\langle\eta \rho\rangle$ 的计算	92
4.1.2	从 $\langle\eta \rho\rangle$ 导出密度算符的无限和表示	93
4.1.3	光子检测统计算符	97
4.2	描述激光过程密度算符的无限算符和表示、Kraus 算符	99

4.2.1	$\langle \eta \rho \rangle$ 的计算	99
4.2.2	从 $\langle \eta \rho \rangle$ 导出密度算符的无限和表示	101
4.2.3	Kraus 算符的归一化	102
4.2.4	激光过程中的量子态演化及 Kraus 算符 ...	104
4.3	压缩混沌光场在振幅衰减量子通道中的演化	109
4.3.1	压缩混沌光场的演化	109
4.3.2	压缩混沌光场的演化作为一个耗散 压缩混沌光场	112
4.4	压缩热库中阻尼谐振子主方程的算符和表示	114
4.4.1	主方程的解	114
4.4.2	Kraus 算符的归一化	117
4.5	位相扩散(或阻尼)模型中密度算符的算符和表示 ...	119
4.6	广义的位相扩散模型	123
4.7	密度算符主方程 $\frac{d\rho}{dt} = -\kappa(a^\dagger a \rho - a^\dagger \rho a - \rho a a^\dagger + \rho a a^\dagger)$ 的解	128
4.8	Kerr 介质中的退相干	131
4.8.1	密度算符主方程的解	131
4.8.2	密度算符的广义算符和表示与归一化	134
4.9	参量下转换过程中的密度算符主方程	135
4.9.1	密度算符主方程的解	135
4.9.2	广义算符的和表示及其归一化	139
4.10	Milburn 方程的几点论述	142
4.10.1	Milburn 方程的精确解——算符和 表示	142
4.10.2	Milburn 方程中密度算符的特点	143
4.10.3	von Neumann 熵随时间增加	144
4.10.4	直积算符时间演化的不同方式	146
4.11	用部分迹法导出新的密度算符	147

4.12	量子隐形传态的连续算符和表示	150
4.13	超算符方法剖析	154
4.13.1	超算符理论的缺点	155
4.13.2	若干超算符的算符实现	157
4.13.3	用超算符的算符实现求解密度算符 主方程	160
 第 5 章 量子退相干中的光子计数分布与 Wigner		
	函数的演化	163
5.1	光子计数检测的一般描述	163
5.1.1	光子计数	163
5.1.2	光子计数分布的量子力学描述	165
5.2	光子计数公式——密度算符的 Q 函数表示	168
5.3	光子计数公式——Wigner 函数表示	174
5.4	退相干模型中 Wigner 函数及光子数 分布的演化	176
5.4.1	振幅阻尼模型	177
5.4.2	有限温度模型	179
5.4.3	低级近似下的激光模型	182
5.4.4	光子数分布	183
 第 6 章 光子增加相干态在耗散量子通道中的统计特点		
6.1	光子增加(激发)相干态	188
6.2	光子损失通道中的激发相干态——密度算符的正规乘积 表示	189
6.3	Wigner 函数及其边缘分布	191
6.4	密度算符 $\rho_{a,m}(t)$ 的 Husimi 函数	195
6.5	密度算符 $\rho_{a,m}(t)$ 的光子计数分布	201
6.6	密度算符 $\rho_{a,m}(t)$ 的 Tomogram	205

6.7	热环境中的激发相干态	207
6.7.1	密度算符的正规乘积	207
6.7.2	Wigner 函数的解析表示	209
第 7 章	光子扣除压缩真空态(PSSV)在热环境中的 统计特性	212
7.1	光子扣除压缩真空态的引入	213
7.2	光子扣除压缩真空态的归一化	214
7.3	关于 Legendre 多项式的一些新关系	217
7.4	热通道中光子扣除压缩真空态的密度算符	220
7.5	热通道中 PSSV 的 Wigner 函数	222
7.6	光子计数分布的时间演化	229
7.7	热通道中光子扣除压缩真空态的 Tomogram	231
第 8 章	光子扣除双模压缩真空态的非经典性及其退 相干	234
8.1	光子扣除双模压缩态 $ \lambda, m, n\rangle$ 的引入	235
8.2	态 $ \lambda, m, n\rangle$ 的归一化	236
8.3	关于 Jacobi 多项式的一些新关系	237
8.4	双模光子扣除压缩真空态的非经典特性	240
8.4.1	压缩特点	240
8.4.2	光子数分布	243
8.4.3	态的反聚束性	245
8.5	光子扣除双模压缩真空的 Wigner 函数	248
8.6	热环境中的光子扣除双模压缩态	255
8.6.1	退相干模型——密度算符主方程在纠缠态 表象中的矩阵元 $\langle \eta_a, \eta_b \rho(t) \rangle$	255
8.6.2	从 $\langle \eta_a, \eta_b \rho(t) \rangle$ 导出密度算符的无限和 表示	257

8.6.3	光子扣除双模压缩态 Wigner 函数的 时间演化·····	258
第 9 章	非高斯热态、压缩热态的性质及退相干 ·····	267
9.1	光子增加、扣除热态的性质·····	267
9.1.1	光子增加、扣除热态的归一化·····	267
9.1.2	光子增加热态的统计性质·····	268
9.1.3	Wigner 函数·····	270
9.1.4	热压缩 Wigner 算符的正规乘积·····	270
9.1.5	光子增加热态的 Wigner 函数·····	272
9.2	光子增加热态在热环境下的退相干·····	277
9.2.1	光子数分布的时间演化·····	277
9.2.2	Wigner 函数的时间演化·····	279
9.2.3	Tomogram 的时间演化·····	283
9.3	光子扣除压缩热态的统计性质及其退相干·····	286
9.3.1	光子扣除压缩热态的归一化·····	287
9.3.2	光子扣除压缩热态的非经典特性·····	291
9.3.3	准几率分布函数·····	294
9.3.4	光子扣除压缩热态在热环境下的退相干·····	301
9.3.5	光子扣除压缩热态的非高斯性测量—— 保真度·····	305
第 10 章	非线性玻色系统的密度算符主方程 ·····	310
10.1	引言·····	310
10.2	非线性密度算符主方程的解——准算符和表示·····	311
10.3	纯粒子数态的演化·····	313
第 11 章	费米系统的密度算符主方程 ·····	317
11.1	引言·····	317

11.2	费米子密度算符主方程的解	317
11.3	费米子密度算符主方程解的应用	320
附录		322
附录 A	算符恒等式(6.13)的导出	322
附录 B	Legendre 多项式通常表达式与新表达式 (7.10)的比较	323
附录 C	归一化系数的导出	324
附录 D	关于 Hermite 多项式一个公式的导出	329
附录 E	另一方法推导式(9.31)	329
附录 F	式(9.68)的推导	332
参考文献		334
结语		356

第 1 章 开放量子系统理论简介

1.1 引言

对开放量子系统的理论描述是人们长期关注的课题之一^[1]. 之所以如此,主要基于以下两个方面的原因:第一,开放系统是普遍存在的. 实际上,几乎没有一个量子系统是完全独立于外界环境的. 即便是电磁场的真空,也可以看成是一个极限热库. 在各种领域,如宇宙学^[2]、量子光学^[3]、粒子物理^[4]、量子测量^[5]、量子计算^[6]以及量子信息理论^[7, 8]中有许多物理问题都与求解密度矩阵主方程(Master Equation, ME)^[9–11]相联系. 第二,过去 20 年里发展起来的量子信息技术激励人们去研究量子系统在环境中的退相干,因为它是实现有效量子信息处理的主要障碍之一. 量子计算很大程度上依赖每一步量子计算操作的幺正特征,而这一特征受到退相干的影响. 实际上,当一个量子系统与外界环境发生相互作用时,系统不可避免地要失去它原本的量子特征,如纠缠性和相干性等. 因此,找到描述系统密度算符的简明的表示是至关重要的,这样就可以用它有效地来分析任意给定量子初态的演化特性.

为了处理开放系统的动力学问题,以往采用两种有效的方法:第一,在薛定谔(Schrödinger)图景中的热库理论^[10–13],即从系统和热库所构成的总哈密顿量出发,考虑马尔科夫近似(Markov approximation),建立该系统的约化密度算符的运动方程——密度矩阵主方程;第二,在海森堡(Heisenberg)图景中的朗之万理论^[14, 15],在系统算符的海森堡运动方程中引进弛豫系数和噪声算符来描述热库对系统作用引起的起伏和耗散效应,即企图用噪声

算符来代替热库对系统的作用,并借助耗散-起伏定理而由系统力学量的平均方程推导出扩散系数的计算公式(即爱因斯坦关系).这两种方法对于处理原子系统、激光光场都取得了一定的成功,但也有待于发展与推广.

为了进一步求解密度矩阵主方程(ME),人们提出了若干种方法,其中既有精确求解的^[16, 17],也有近似求解的^[18].传统的求解主方程的途径是将主方程转换成 Fokker - Planck 方程或 Langevin 方程.此后,Aréalo-Aguilar 和 Moya - Cessa^[19]在研究有限温度下的单模辐射腔场的密度算符特性时发现:上述传统的做法并不能够容易地应用于任意初始的量子态情况.因此,他们提出了所谓的超算符方法.然而,超算符在很多情况下没有明显的表达形式,不方便理解.对于有的方程也无能为力.本书采用全新的方法,通过利用有序算符内的积分技术,将从热场动力学的角度引入热纠缠态表象来考察此类问题,即在此表象下提出一种新的方法来求解密度矩阵若干 $\rho(t)$ 主方程,成功地给出 $\rho(t)$ 的算符无限和表示(Kraus 算符),并证明其归一化.在此基础上又建立量子态的 Wigner 函数的演化、光子数分布的演变等与热纠缠态表示之间的关系.此方法简洁优美,能深刻地反映物理实质.

1.2 开放系统量子态的演化

一般量子力学教科书中所叙述的量子理论都是针对孤立或封闭的量子系统而言的.但实际情况是系统处在热库中,是与外界有相互作用的开放系统.

对于一个哈密顿量为 H 的封闭量子系统,量子态的演化是么正的:

$$\text{封闭系: } |\psi(0)\rangle \xrightarrow{U(t)} |\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle, U^\dagger(t)U(t) = 1. \quad (1.1)$$

如果 H 不显含时间, 则 $U = \exp(-iHt/\hbar)$. 可见, 对于封闭系统中量子态的演化, 用一个么正算符 U 就可表示. 那么, 对于开放系统中的量子态的演化又如何描述呢?

1.2.1 超算符(算符和表示)

设一封闭系统由两个开放的子系统 A, B 构成, 则总系统的初始状态用密度算符表示为: (以下均用密度算符表示系统状态)

$$\text{封闭系 } H_A \otimes H_B : \rho_A \otimes |0\rangle_{BB}\langle 0|, \quad (1.2)$$

其中子系 A 处于状态 ρ_A , 子系 B 处于状态 $|0\rangle_{BB}\langle 0|$. A, B 两子系统之间存在相互作用, 导致了 A 的态与 B 的态的量子纠缠. 设总系统演化的么正算符为 U_{AB} , 其演化可表示为

$$\rho_A \otimes |0\rangle_{BB}\langle 0| \xrightarrow{U_{AB}(t)} U_{AB}(\rho_A \otimes |0\rangle_{BB}\langle 0|)U_{AB}^\dagger. \quad (1.3)$$

由于局限在子系 A 中的观察者看不到整个系统的情况, 只能观察到 A 中的态及其演化, 因此, 对子系 A 中的观察者而言, 上述过程应为:

$$\rho_A \xrightarrow{\dots?} \rho'_A, \quad (1.4)$$

此过程实际上是统计性地排除子系统 B 的影响, 即对子系统 Hilbert 空间 H_B 进行部分求迹. 为此, 在 H_B 中选一组正交完备的基 $\{|\mu\rangle_B\}$, 将总系统对该基取迹后, 剩下的即为 Hilbert 空间 H_A 中观察者观察到的态(即局限于 H_A 中的观察者观测到的演化):

$$\begin{aligned} \rho'_A &= \text{Tr}_B[U_{AB}(\rho_A \otimes |0\rangle_{BB}\langle 0|)U_{AB}^\dagger] \\ &= \sum_{\mu} {}_B\langle \mu | U_{AB} | 0 \rangle_B \rho_A [{}_B\langle 0 | U_{AB}^\dagger | \mu \rangle_B], \end{aligned} \quad (1.5)$$

式中 $[{}_B\langle \mu | U_{AB} | 0 \rangle_B]$ 是一个作用于 H_A 的算符, 它表示在子系统 A 与子系统 B 相互作用下, 系统 B 由基态向 ${}_B\langle \mu |$ 的跳变对子系统 A 状态的影响. 不妨记为 $M_{\mu} = {}_B\langle \mu | U_{AB} | 0 \rangle_B$, 则式(1.5)可写成