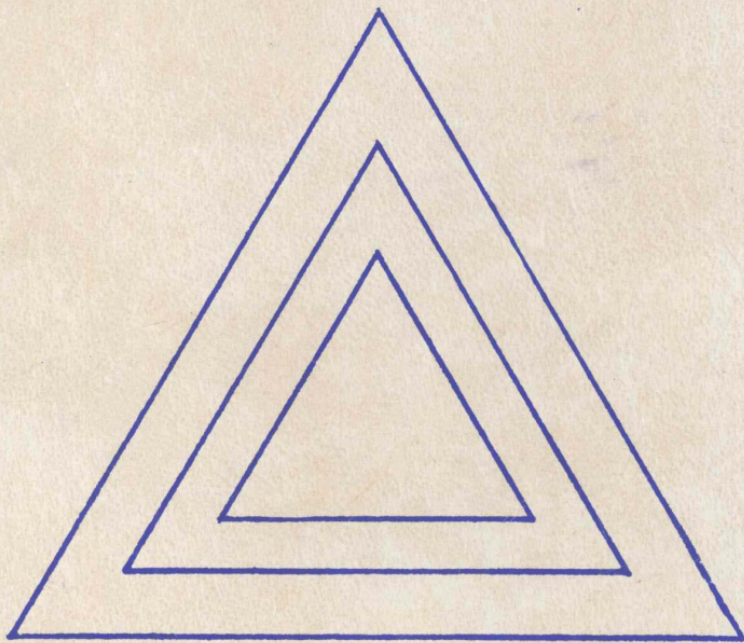


# 歐幾里得 幾何原本

藍紀正、朱恩寬 譯  
梁宗巨、張毓新、徐伯謙 校訂



九章出版社

ISBN 957-603-016-1



00450

9 789576 030161

# 歐幾里得 幾何原本

藍紀正 朱恩寬 譯  
梁宗巨 張毓新 徐伯謙 校訂

九章出版社

國立中央圖書館出版品預行編目資料

歐幾里得幾何原本 / 藍紀正, 朱恩寬譯. -- 一版. --

臺北市：九章, 1992[民國 81]

面；公分

ISBN 957-603-016-1(精裝)

1. 歐幾里得幾何

316.01

85012546

## 歐幾里得·幾何原本

藍紀正、朱恩寬譯

梁宗巨、張毓新、涂伯謙 校訂

本書經作者授權在台灣出版。並據陝西科學技術出版社 1990 年出版的歐幾里得《幾何原本》重新排印。

出版者：九章出版社

台北市信義路 3 段 147 巷 15 弄 5-1 號 7 樓

局版臺業字第 2327 號

門市地址：台北市信義路 3 段 147 巷 17 弄 7-1 號 1 樓

電話：(02)23257970 · 27048405 · 27045243

傳真：(02)27067353

e-mail：[ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)

發行人：孫文先

印刷者：九章文具印刷品有限公司

出版日期：2002 年 1 月一版四刷

定價：450 元整

郵政劃撥：10534676 九章出版社

總經銷：成信文化事業有限公司

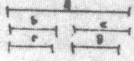
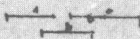
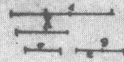
台北縣中和市橋和路 112 巷 10 號 2 樓

查尋本社圖書目錄 <http://ccmp.tacomall.com.tw>



the teaching of the subject for eighteen hundred years preceding that time. He is the only man to whom there ever

29.  
30.  
31.  
32.  
33.  
34.  
35.  
36.  
37.  
38.  
39.  
40.



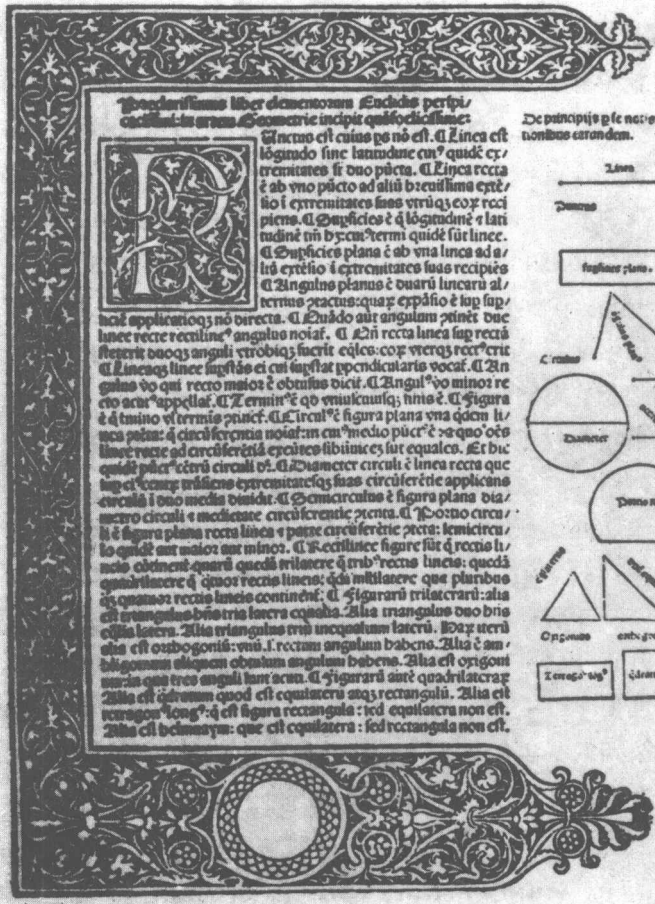
29. *Si unum in duobus partem ducatur qui in duobus partem*  
 30. *Si unum in duobus partem ducatur qui in duobus partem*  
 31. *Si unum in duobus partem ducatur qui in duobus partem*  
 32. *Si unum in duobus partem ducatur qui in duobus partem*  
 33. *Si unum in duobus partem ducatur qui in duobus partem*  
 34. *Si unum in duobus partem ducatur qui in duobus partem*  
 35. *Si unum in duobus partem ducatur qui in duobus partem*  
 36. *Si unum in duobus partem ducatur qui in duobus partem*  
 37. *Si unum in duobus partem ducatur qui in duobus partem*  
 38. *Si unum in duobus partem ducatur qui in duobus partem*  
 39. *Si unum in duobus partem ducatur qui in duobus partem*  
 40. *Si unum in duobus partem ducatur qui in duobus partem*

PAGE FROM A TRANSLATION OF EUCLID'S ELEMENTS

This manuscript was written c. 1204. The page relates to the propositions on the theory of numbers as given in Book IX of the *Elements*. The first line gives Proposition 28 as usually numbered in modern editions

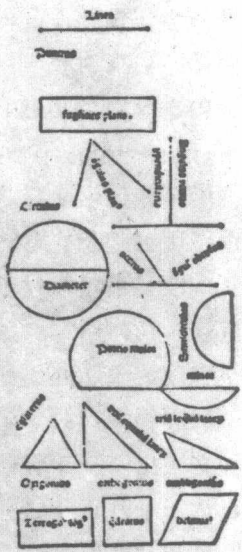
公元 1294 年拉丁文手抄本《原本》的一頁。





Præclarissimus liber elementorum Euclidis per  
 Christoph. Clavius commentis illustratus  
 Quinctus est cuius pars non est. A Linea est  
 longitudo sine latitudine cuius quidem ex-  
 tremitates si duo puncta. A Linea recta  
 est ab uno puncto ad alium brevissima exten-  
 sio i extremitates suas utriusque eorum reci-  
 piens. A Superficies est quæ longitudine et lati-  
 tudine tribus brevibus terminis quidem sunt lineæ.  
 A Superficies plana est ab una lineæ ad al-  
 teram extensio i extremitates suas recipiens  
 A Angulus planus est duarum linearum al-  
 terius applicationis non directæ. A Quando autem angulum præmet due  
 lineæ rectæ recilineæ angulus notatur. A In recta lineæ super rectam  
 steterit duos angulos utrobique facit æquales eorum uterque rectus erit  
 A Lineas quæ lineæ ipsi sibi ei cui inscribitur perpendicularis vocatur. A An-  
 gulus quoque qui recto maior est obtusus dicitur. A Angulus quoque minor re-  
 ctus acutus appellatur. A Terminis quoque emulcatis; unus est. A Figura  
 est quæ terminis præter se. A Circulus est figura plana una quæcumque li-  
 nea prima quæ circumferentia notatur cuius in medio punctum est: quoque omnes  
 lineæ rectæ ad circumferentiam æquidistantes sibi invicem sunt æquales. Et hic  
 quædam præter se circuli sunt. A Diameter circuli est lineæ recta que  
 tangit utrumque terminum circumferentiarum suarum circumferentiam applicans  
 circuli i duo media dividit. A Semicirculus est figura plana dia-  
 metro circuli et medietate circumferentiarum præter se. A Per octo circa  
 sunt figure planæ rectæ lineas et partem circumferentiarum præter se: semicirculus  
 hoc quidem aut maior aut minor. A Rectilineæ figure sunt quæ rectis li-  
 neis obtinentur quatuor quedam trilateræ quæ tribus rectis lineis: quedam  
 quadrilateræ quæ quatuor rectis lineis: quedam multilateræ que pluribus  
 autem quadrilateræ sunt tria: quadrilateræ sunt: A Triangulum dicitur tri-  
 laterum quæ tres angulos habet acutos. A Quadrilaterum autem quæ quadrilateræ  
 sunt: A Illud est quadratum quod est equilaterum atque rectangulum. A Illud est  
 trapezium longum: quod est figura rectangula: sed equilatera non est.  
 A Illud est hexagonum: que est equilatera: sed rectangula non est.

De principiis geometriæ primo de diffinitio-  
 nibus eorundem.



公元 1482 年最早的拉丁文印刷本《原本》首页。在  
 威尼斯出版。





公元 1570 年比林斯利 (H. Billingsley) 英譯本  
 《原本》首頁。

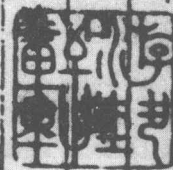
幾何原本第一卷之首

界說三十六  
公論十九

求作四



泰西利瑪竇  
吳淞徐光啓



界說三十六則

凡造論先當分別解說論中所用名目故曰界說

凡歷法地理樂律算章技藝工巧諸事有度有數者皆

依賴十府中幾何府邊凡論幾何先從一點始自

無引之為線線展為面面積為體是名三度

第一界

第一分

公元 1607 年利瑪竇、徐光啓漢譯本《原本》首頁。

Item, sub aequalibus rectis lineis contentum, & basim BC basi EF aequalem habebimus; erisque triangulum BAC triangulo EDF aequale, ac reliquis anguli B, C reliquis angulis E, F aequales erunt, uterque utriusque, sub quibus aequalia latera subtenduntur.

Si punctum D puncto A applicetur, & recta DE rectae AB superponatur, cadet punctum E in B, quia  $DE = AB$ . Item recta DF cadet in AC, quia ang. A = D. Quinetiam punctum E puncto C coincidet, quia  $AC = DF$ . Ergo rectae EF, BC, cum eodem habeant terminos, congruent, & proinde aequales sunt. Quare triangula BAC, EDF; & anguli B, E; itemque anguli C, F etiam congruunt, & aquantur. Quid erat Demonstrandum.

PROP. V.



Isoscelium triangularum ABC qui ad basim sunt anguli ABC, ACB inter se sunt aequales. Et productis aequalibus rectis lineis AB, AC qui sub base sunt anguli CBD, BCE inter se aequales erunt.

Accipe  $AF = AD$ , & junges CD, ac BF.

Quoniam in triangulis ACD, ABF, sunt  $AB = AC$ , &  $AF = AD$ , angulisque A communis, erit ang.  $ABF = ACD$ , & ang.  $AFB = ADC$ , & bas.  $BF = DC$ , item  $FC = DB$ . ergo in triangulis BFC, BDC erit ang.  $FCB = DCB$ . Q. E. D. Item ideo ang.  $FBC = DCB$ . atqui ang.  $ABF = ACD$ . ergo ang.  $ABC = ACB$ . Q. E. D.

Corollarium.

Hinc, Omne triangulum aequilaterum est quoque aequiangulum.

PROP.

公元 1655 年巴羅 (I. Barrow) 拉丁文譯本《原本》的一頁，卷 I 命題 5 “驢橋”。

THE THIRTEEN BOOKS OF  
EUCLID'S ELEMENTS

TRANSLATED FROM THE TEXT OF HEIBERG

WITH INTRODUCTION AND COMMENTARY

BY

SIR THOMAS L. HEATH,

K.C.B., K.C.V.O., F.R.S.,

SC.D. CAMB., HON. L.SC. OXFORD

HONORARY FELLOW (SOMETIME FELLOW) OF TRINITY COLLEGE CAMBRIDGE

SECOND EDITION

REVISED WITH ADDITIONS

VOLUME I

INTRODUCTION AND BOOKS I, II

DOVER PUBLICATIONS, INC.  
NEW YORK

公元1925年希思(T.L. Heath)英譯本《原本》增  
訂本首頁。

# 序

歐幾里得《幾何原本》是世界名著，在各國流傳之廣、影響之大僅次於基督教的《聖經》。我國在明清兩代有過譯本，前 6 卷是利瑪竇和徐光啓合譯的，1607 年出版。底本是德國人克拉維烏斯 (C. Clavius) 校訂增補的拉丁文本 *Euclidis Elementorum Libri XV* (《歐幾里得原本 15 卷》，1574 年初版)。後 9 卷是英國人偉烈亞力和李善蘭合譯的，1857 年出版，底本是另一種英文版本。這兩種底本都是增補本，和歐幾里得原著有很大的出入，不少內容是後人修改或添加上去的。明清本的最初翻譯距今已好幾百年，現在不容易找到，況且又是文言文，名詞術語不是現代語言，這更增加了閱讀的困難。因此重新翻譯是十分必要的。

本書根據目前標準的希思 (Thomas Little Heath, 1861-1940) 英譯評注本 *The thirteen books of Euclid's Elements* (《歐幾里得原本 13 卷》，1908 年初版，1926 年再版，1956 年新版) 譯出，而希思本又是以海伯格 (John Ludwig Heiberg, 1854 ~ 1928, 丹麥人) 與門格 (H. Menge) 的權威註釋本 *Euclidis opera omnia* (《歐幾里得全集》，1883 ~ 1916 出版，希臘文拉丁文對照) 為底本的，應該說比明清本所根據的底本更可靠，而且更接近歐幾里得的原著。

蘭紀正副教授、朱恩寬副教授積多年的幾何教學經驗，參考了明清本以及不同文字的幾種版本，譯成漢文後廣泛徵求了意見，數易其稿，當能較好地表達歐幾里得的基本精神。

多少年來，千千萬萬人通過歐幾里得幾何的學習受到了邏輯的訓練，從而邁入科學的殿堂。大科學家牛頓在撰寫他的名著《自然哲學之數學原理》(*Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687) 時，就曾受到幾何公理方法的啓迪。他在序中寫到：“從那麼少

的幾條外來的原理，就能夠取得那麼多的成果，這是幾何學的光榮”  
(It is the glory of geometry that from so few principles, fetched from without, it is able to accomplish so much)<sup>(註)</sup>。  
今天，我們仍然不斷從幾何中吸取營養。無論從數學史或是從數學教育的角度，《原本》都永遠是有價值的參考書。希望這個譯本能在我國的文化建設中起到應有的作用。

希思本附有大量的註文，它不僅是原文的詮譯，而且可以看作是兩千年來研究《原本》的歷史總結。如將註文全部譯出，可幫助讀者進一步瞭解原文的內容，並知道各個定義、命題、方法的來龍去脈。不過工作量很大，只好留待將來。這裏不妨借用一下徐光啓的話：“續成大業，未知何日，未知何人，書以俟焉”。

梁 宗 巨

1986. 12. 8.

---

(註) R. E. Moritz, On mathematics and mathematicians (1914)  
p. 293.

# 導 言

## 歐幾里得和他的《幾何原本》

### (一)歐幾里得傳記

歐幾里得 (Euclid, 拉丁文拼為 Euclides 或 Eucleides, 希臘文  $\text{Εὐκλείδης}$ , 公元前 300 年前後) 是希臘數學家, 以其所著的《幾何原本》(Elements,  $\text{Στοιχεῖα}$ ) 聞名於世。對於他的生平, 現在知道的很少。他生活的年代, 是根據下列的記載來確定的。普羅克洛斯 (Proclus,  $\text{Πρόκλος}$ , 412? ~ 485) 是雅典柏拉圖學園<sup>(1)</sup>晚期的導師, 公元 450 年左右, 他給《幾何原本》作注, 寫了一個簡明的《幾何學發展概要》<sup>(2)</sup> (以下簡稱《概要》), 字數雖不多, 但已包括從泰勒斯 (Thales,  $\text{Θαλῆς}$ , 公元前 640? ~ 546?) 到歐幾里得數百年間主要數學家的事跡, 這是幾何學史的重要資料。《概要》中指出, 歐幾里得是托勒密一世<sup>(3)</sup>時代的人, 早年學於雅典, 深知柏拉圖的學說。又說阿基米德 (Archimedes,  $\text{Ἀρχιμήδης}$ , 公元前 287 ~ 212) 的書引用過《幾何原本》的命題<sup>(4)</sup>, 可見他早於阿基米德。另一位學者帕波斯

---

(1) 柏拉圖 (Plato, 公元前 427 ~ 347) 在公元前 387 年建立的著名學習場所。

(2) 參見① C. C. Gillispie, Dictionary of scientific biography, Vol. 4 (1971) pp. 414 ~ 459。② B. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft (1966) p. 148。

(3) Ptolemy I, 托勒密王國的創建者, 公元前 323 ~ 285 在位, 建都在亞歷山大。

(4) 阿基米德《論球與圓柱》(On the sphere and cylinder) I 命題 6 明確指出引用了《幾何原本》XI 的證明。見 T. L. Heath, The works of Archimedes with the method of Archimedes (1912) p. 9。

(Pappus, Πάππος, 公元 300~350 前後) 在《數學匯編》中提到阿波羅尼奧斯(Apollonius, Ἀπολλώνιος, 約公元前 225) 長期住在亞歷山大, 和歐幾里得的學生在一起。這說明歐幾里得曾在亞歷山大教過學。

綜上所述, 歐幾里得應該是公元前 300 年前後的人。

《概要》還記述了這樣一則故事: 托勒密王問歐幾里得說, 除了他的《幾何原本》之外, 還有沒有其他學習幾何的捷徑。歐幾里得回答道: “在幾何裏, 沒有專為國王鋪設的大道”(There is no royal road to geometry)<sup>(5)</sup>。這句話成為傳誦千古的學習箴言<sup>(6)</sup>。斯托比亞斯(Stobaeus, 約 500) 記述另一則故事, 說一個學生才開始學習第一個命題, 就問學了幾何學之後將得到些什麼。歐幾里得說: “給他三個錢幣, 因為他想在學習中獲取實利。”由此可知歐幾里得主張學習必須循序漸進、刻苦鑽研, 不贊成投機取巧的作風, 也反對狹隘實用觀點。帕波斯特別讚賞歐幾里得的謙遜, 他從不掠人之美, 也沒有聲稱過哪些是自己的獨創。而阿波羅尼奧斯則不然, 他過分突出自己, 明明是歐幾里得研究過的工作, 他在《圓錐曲線論》(Conics) 中也沒有歸功於歐幾里得<sup>(7)</sup>。

除了《幾何原本》之外, 歐幾里得還有不少著作, 可惜大都失傳。唯一保存下來的純粹幾何著作(希臘文)是《已知數》(The data, Δεδομένα), 體例和《幾何原本》前 6 卷相似, 包括 94 個命題, 指出若圖形中的某些元素已知, 則另外的一些元素也可以確定。《圖形的分割》(On divisions of figures, Περὶ διαιρέσεων βιβλίον) 現存拉丁文本與阿拉伯文本, 論述用直線將已知圖形分為相等的部分或成比例的部分。《光學》(Optica, Ὀπτικά) 是早期的幾何光學著作之一, 研究透視問題, 指出光的入射角等於反射角。認為視覺是眼睛發出光線到達物體的結果等<sup>(8)</sup>。還有一些著作未能確定是否屬於歐幾

---

(5) 原文見 R.E. Moritz, On mathematics and mathematicians (1914) p. 152。

(6) 另一種說法認為這是門奈赫莫斯(Menaechmus) 和亞歷山大王的故事。

(7) T. L. Heath, A manual of Greek mathematics (1931) p. 203。

(8) 這些著作的內容, 參見 T. L. Heath, A history of Greek mathematics (1921) 11 章。



里得，而且已經散失。

## (二)《幾何原本》產生的歷史背景

歐幾里得的《幾何原本》是一部劃時代的著作。其偉大的歷史意義在於它是用公理法建立起演繹體系的最早典範。過去所積累下來的數學知識，是零碎的、片斷的，可以比作木石、磚瓦。只有借助於邏輯方法，把這些知識組織起來，加以分類、比較，揭露彼此間的內在聯繫，整理在一個嚴密的系統之中，才能建成巍峨的大廈。《幾何原本》（以下簡稱《原本》）完成了這一艱巨的任務，它對整個數學的發展產生了深遠的影響。

《原本》的出現不是偶然的，在它之前，已有許多希臘學者做了大量的前驅工作。從泰勒斯算起，已有三百多年的歷史<sup>(9)</sup>。泰勒斯是希臘第一個哲學學派——伊奧尼亞學派的創建者。伊奧尼亞地處小亞細亞西岸，它比希臘其他地區更容易吸收巴比倫、埃及等古國積累下來的經驗和文化。在那裏，氏族貴族政治為商人的統治所代替，商人具有強烈的活動性和冒險性，這有利於思想自由而大膽地發展。城邦內部的鬥爭幫助擺脫傳統的信念。希臘沒有特殊的祭司階層，也沒有必須遵守的教條，因此有相當程度的思想自由。科學和哲學開始從宗教分離開來。泰勒斯早年是一個商人，通過商業旅遊，很快就掌握了古代流傳下來的知識，並加以發揚。他企圖擺脫宗教，從自然現象中去尋找真理。對一切科學問題不滿足於知其然，而且還要探索所以然的道理。他對數學的最大貢獻是開始了命題的證明。所謂證明，就是借助一些公理或真實性業經確定的命題來論證某一命題的真實性。這為建立幾何的演繹體系邁出了可貴的第一步，在數學史上是一個不尋常的飛躍。

接着是畢達哥拉斯 (Pythagoras, Πυθαγόρας, 公元前 580? ~ 500?) 學派，活動於義大利半島南部一帶。這個學派企圖用數來解釋

---

(9) 歐幾里得以前希臘數學的各個學派，在下列書中做了較好的描述：George Johnston Allman (1824 ~ 1904), *Greek geometry from Thales to Euclid* (1889)。