ZUI YOUHUA FANGFA

最优化方法

陈军斌 杨悦 编著

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

方法

陈军斌　杨悦　编著

中国石化出版社

内 容 提 要

本书在对最优化问题介绍的基础上，详细介绍了线性规划、无约束非线性规划、约束非线性规划、多目标优化、离散型优化、动态规划、层次分析法以及智能优化算法等内容。

本书可作为信息与计算科学、应用数学本科专业教材，也可供工科院校相关专业的研究生、工程硕士参考。

图书在版编目（CIP）数据

最优化方法／陈军斌，杨悦编著．—北京：中国石化出版社，2010.12
ISBN 978-7-5114-0631-6

Ⅰ．①最… Ⅱ．①陈… ②杨… Ⅲ．①最优化算法
Ⅳ．①O242.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 221180 号

中国石化出版社出版发行
地址：北京市东城区安定门外大街 58 号
邮编：100011 电话：(010)84271850
读者服务部电话：(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com.cn
北京宏伟双华印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
850×1168 毫米 32 开本 8.375 印张 204 千字
2011 年 1 月第 1 版 2011 年 1 月第 1 次印刷
定价：22.00 元

前　言

最优化方法(也称作运筹学方法)是近几十年形成的，它主要运用数学方法研究各种系统的优化途径及方案，为决策者提供科学决策的依据。最优化方法的主要研究对象是各种有组织系统的管理问题及其生产经营活动。最优化方法的目的在于针对所研究的系统，求得一个合理运用人力、物力和财力的最佳方案，发挥和提高系统的效能及效益，最终达到系统的最优目标。实践表明，随着科学技术的日益进步和生产经营的日益发展，最优化方法已成为现代管理科学的重要理论基础和不可缺少的方法，被人们广泛地应用到公共管理、经济管理、国防等各个领域，发挥着越来越重要的作用。

本书是作者在其“最优化方法”讲义基础上修改而成的。该讲义为相关专业的研究生、工程硕士及同等学历的本科生讲授过多遍，受到同学们的好评。该书得到了“十一五”国家科技支撑计划项目(2007BAB17B04)和西安石油大学首届“研究生名教材”建设基金项目的资助。

本书第一、二、八、九章由杨悦博士编写,其余由陈军斌博士编写。

感谢赵来军博士对本书部分章节提出宝贵建议，感谢西安石油大学研究生部领导对本书在立项建设过程中的大力支持，感谢出版社各位领导和编辑们为本书在出版过程中所付出的辛勤劳动。

由于作者水平有限，在编写过程中难免有错误，恳请专家、同行和广大读者批评指正。

目　录

第一章　概论

随着生产、经济、技术的发展，工程技术、管理人员在实际工作中，肯定会面临这样一类问题：

（1）工程设计中如何选择参数，使得设计既满足要求又能降低成本；

（2）在资源分配中，怎样的分配方案既能满足各方面的要求，又能获得较好的经济效益；

（3）生产计划安排中，选择怎样的计划方案才能提高产值和利润；

（4）原料配比问题中，怎样确定各种成分的比例才能提高质量，降低成本；

（5）在城建规划中，如何安排工厂、机关、学校、商店、医院、住宅和其他单位的合理布局，才能方便群众，有利于城市各行各业发展。

如此等等，不胜枚举，这类问题的共同特点，就是要在所有的可能方案中，选出最合理的，达到事先规定的最优目标的方案，这个方案可称为最优方案，寻找最优方案的方法称为最优化方法。

最优化是一个古老的课题，早在 17 世纪已经提出极值问题，到 20 世纪 40 年代以来，由于生产和科学研究突飞猛进发展，特别是计算机日益广泛应用，使得最优化问题不仅成为一种迫切需要，而且有了求解的有力工具。最优化理论和算法也就迅速发展起来，形成了一个新的学科，并在实际应用中发挥越来越大的作用。因此，有关最优化方法的基本知识已成为工程技术和工程管理人

员所必备的基础知识之一。本教材将以此为目的,介绍有关优化问题的模型及求解方法。

§1 最优化问题举例

当量化地求解一个实际的最优化问题时,首先要把这个问题转化为数学模型,即建立数学模型,这是重点;而要建立合适的数学模型,必须对实际问题有很好的了解,经过分析研究,抓住其主要因素,理清其相互的联系,然后综合利用有关学科的知识和数学知识才能完成。

例1 配棉问题

棉纺厂的主要原料是棉花,一般要占总成本的70%左右,棉花的品种、等级不同,价格也不同。所谓配棉问题,即根据棉纱的质量指标、采用各种价格不同的棉花,按一定的比例配成纱,使其既能达到质量指标,又使总成本最低。

棉纱的质量指标一般由棉结和品质指标决定,这两个指标都可用数量形式来表示,一般来说,棉结粒数越少越好,品质指标越大越好,但在具体生产过程中,它受棉花品种的现存量、生产技术、设备条件等多方面的制约。

一个年纺纱能力为15000锭的小厂在采用最优化方法配棉前,某一种产品32D纯棉纱的棉花配比、质量指标及单价如下:

原料品名	单价/(元/t)	混合比/%	棉结/粒	品质指标	混棉单价/(元/t)
国棉131	8400	25	60	3800	2100
国棉229	7500	35	65	3500	2625
国棉327	6700	40	80	2500	2680
平均合计		100	70	3175	7405

有关部门对32D纯棉纱规定的质量指标为棉结不多于70粒，品质指标不小于2900，请利用优化问题，解决该品种的配棉问题。

解 设 x_1, x_2, x_3 分别为国棉131,229,327的棉花配比

本例目标：混棉单价最小，即

$\min Z = (8400x_1 + 7500x_2 + 6700x_3)$

约束条件：$60x_1 + 65x_2 + 80x_3 \leqslant 70$

$3800x_1 + 3500x_2 + 2500x_3 \geqslant 2900$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$

例2 资金使用问题

设有400万元，要求4年内使用完，若在一年内使用资金 x 万元，则可以得到效益 $\sqrt{x}$ 万元（效益不能再使用），当年不用的资金可存入银行，年利率为10%，试制定资金使用计划，以使4年效益之和为最大。

解 设 $x_i (i=1,2,3,4)$ 分别表示第 i 年使用的资金数，于是

$$\max Z = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4}$$

约束条件：

第一年：$0 \leqslant x_1 \leqslant 400$

第二年：$0 \leqslant x_2 \leqslant (400 - x_1) \times 1.1$

第三年：$0 \leqslant x_3 \leqslant [(400 - x_1) \times 1.1 - x_2] \times 1.1$

第四年：$0 \leqslant x_4 \leqslant \{[(400 - x_1) \times 1.1 - x_2] \times 1.1 - x_3\} \times 1.1$

例3 投资的收益和风险

市场上有 n 种资产（如股票、债券……）$S_i (i=1,2,\cdots,n)$ 供投资者投资，某公司有数额为 M 的一笔相当大资金可用作一个时期的投资，公司的财务人员对 n 种资产进行评估，估算出在这一时期内购买 S_i 的平均收益率为 r_i 及风险损失率为 q_i，考虑到投资越分散，总的风险越小，公司决定，当用这笔资金购买若干种资产时，总

体风险可用所投资的 S_i 中最大的一个风险来度量。购买 S_i 要付交易费，费率为 p_i，并且当购买不超过给定值 u_i 时，交易费按购买 u_i 计算，另外，假设同期存款利率是 r_0，且无交易费又无风险。

请给公司设计一种投资方案。

解 设变量 $x_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 分别表示存入银行和购买 S_i 的金额，$y_j=0$ 表示不买 S_j，$y_j=1(j=1,2,\cdots,n)$ 表示买 S_j。

目标有两个：

第一个目标：$\max Z_1 = \sum_{i=0}^{n} r_i x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i \max(x_i, u_i)$

第二个目标：$\min Z_2 = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{q_i x_i\}$

约束条件：
$$\sum_{i=0}^{n} x_i \leqslant M$$
$$x_i \geqslant 0 \quad i = 0,1,2,\cdots,n$$
$$x_j \leqslant My_j,\ j = 1,2,3,\cdots,n$$

例 4 某工厂生产 A 和 B 两种产品，所用原料均为甲、乙、丙三种，每生产一个产品的具体用料情况如下：

	甲	乙	丙
A	9	3	14
B	4	10	5

已知产品 A 每件可获利 7000，产品 B 每件可获利 12000，如果该厂现有原料甲 350 单位，乙 250 单位，丙 200 单位，问在现有生产条件下 A、B 各生产多少，才使该厂获得利润最大？

解 首先确定变量，设生产 A 产品 x_1 件，生产 B 产品 x_2 件，则变量 $x=[x_1,x_2]^T$。

确定约束条件：$9x_1+4x_2\leqslant 350$
$$3x_1+10x_2\leqslant 250$$
$$14x_1+5x_2\leqslant 200$$

$x_1 \geqslant 0$

$x_2 \geqslant 0$

确定目标函数：$f(x)=f(x_1,x_2)=7x_1+12x_2$

则数学模型可表示为

$$\max f(x)=7x_1+12x_2$$

约束条件：

$$\begin{aligned}
&9x_1+4x_2-350\leqslant 0\\
&3x_1+10x_2-250\leqslant 0\\
&14x_1+5x_2-200\leqslant 0\\
&x_1\geqslant 0\\
&x_2\geqslant 0
\end{aligned}$$

例 5 某公司现有总资金 A 万元，目前有 $n(n\geqslant 2)$ 个项目可供选择投资，设投资第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个项目要用资金 a_i 万元，预期收益 b_i 万元，请问如何决策这个投资方案？

解 首先确定变量，设投资第 i 个项目的变量为 x_i，

$$x_i=\begin{cases}1,\text{决定投资第 } i \text{ 个项目}\\0,\text{放弃投资第 } i \text{ 个项目}\end{cases},i=1,2,\cdots,n。$$

投资第 i 个项目的金额为 a_ix_i 万元，因而总金额为 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i$ 万元；

投资第 i 个项目的收益为 b_ix_i 万元，因而总收益为 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i$ 万元；

确定约束条件：公司总资金为 A 万元，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i\leqslant A$。

由于 x_i 只能取 0 或 1，因而要满足 $x_i(x_i-1)=0,i=1,2,\cdots,n$。

目标函数：在这个最优化问题中，有两个目标函数，一个是应使投资所用资金最小，即 $f_1(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i$ 最小化。另一个是应使投

资的收益最大化,即$f_2(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ 最大化。

因此数学模型表示为

$$\begin{cases} \min f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \\ \max f_2(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \end{cases}$$

约束条件: $A - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant 0,$

$x_i(x_i - 1) = 0, i = 1,2,\cdots n$。

§2 最优化问题概述

§2.1 最优化问题的数学模型与基本概念

最优化问题的一般数学模型为

$$\min f(x) \quad (1.1)$$

$$(P) \quad \text{s. t.} \begin{cases} h_i(x) = 0 \quad i = 1,2,\cdots,m & (1.2) \\ g_i(x) \geqslant 0 \quad j = 1,\cdots,p & (1.3) \end{cases}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$,即 x 是 n 维向量,在实际问题中也常常把变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 叫决策变量。"s. t. "是"Subject to"的缩写,表示"受限制于"。

满足约束条件(1.2)和(1.3)的 x 称为可行解或可行点,或允许解,全体可行解构成的集合称为可行域或允许解,记为 D。即

$$D = \{x \mid h_i(x) = 0, i = 1,2,\cdots,m, g_j(x) \geqslant 0 \\ j = 1,2,\cdots,p, x \in R^n\}$$

若 $h_i(x), g_j(x)$是连续函数,则 D 是闭集。

定义 1.1:若 $x^* \in D$,对于一切 $x \in D$,恒有 $f(x^*) \leqslant f(x)$,则称

x^* 为最优化问题(P)的整体最优解。

若 $x^* \in D$,对于一切 $x \in D, x \neq x^*$,恒有 $f(x^*) < f(x)$,则称 x 为问题(P)的严格整体最优解。

定义 1.2:若 $x^* \in D$,存在 x^* 的某邻域 $N_\varepsilon(x^*)$,使得对一切 $x \in D \cap N_\varepsilon(x^*)$,恒有 $f(x^*) \leqslant f(x)$,则称 x^* 为最优化问题(P)的局部最优解,其中

$$N_\varepsilon(x^*) = \{x \quad \| x - x^* \| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}, \| \cdot \| \text{是范数}$$

当 $x \neq x^*$,且上面的不等式为严格不等式 $f(x^*) < f(x)$ 时,则称 x^* 为问题(P)的严格局部最优解。

显然,整体最优解一定是局部最优解,而局部最优解不一定是整体最优解。

求解最优化问题(P),就是求目标函数 $f(x)$ 在约束条件式(1.2)、式(1.3)下的极小点,实际上是求可行域 D 上的整体最优解,但是在一般情况下,很不容易求出整体最优解,往往只能求出局部最优解。

最优解 x^* 对应的目标函数值 $f(x^*)$ 称为最优值,常用 f^* 表示。

最优化问题的分类:

$$\text{按有无约束方程(条件)分}\begin{cases}\text{有约束条件的最优化问题}\\ \text{无约束条件的最优化问题}\end{cases}$$

$$\text{根据目标函数和约束函数类型分}\begin{cases}\text{线性规划}\\ \text{非线性规划}\end{cases}$$

§2.2 最优化问题的一般算法

基本方法:求解最优化问题(P)的基本方法是给定一个初始可行点 $x_0 \in D$,由这个可行点出发,依次产生一个可行点序列 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$,记为 $\{x_k\}$,使得或者某个 x_k 恰好是问题的一个最优解,或者该点列 $\{x_k\}$ 收敛到问题的最优解 x^*,这就是我们平时所

说的迭代算法。

在迭代算法中由点 x_k 迭代到 x_{k+1} 时，要求 $f(x_{k+1}) \leqslant f(x_x)$，称这种算法为下降算法。

点列 $\{x_k\}$ 的产生，通常采用两步来完成：①在可行域内 x_k 点处求一个方向 P_k，使 $f(x)$ 沿方向 P_k 移动时函数值有所下降，一般称这个方向为下降方向或搜索方向。②以 x_k 为出发点，沿 P_k 方向作射线 $x_k + \alpha P_k$，其中 $\alpha > 0$，在此射线上求一点 x_{k+1}，$x_{k+1} = x_k + \alpha_k P_k$，使得 $f(x_{k+1}) < f(x_k)$，其中 α_k 称为步长。

定义 1.3：在点 x_k 处，对于向量 $P_k \neq 0$，若存在实数 $\bar{\alpha} > 0$，使得对于任意的 $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ 有

$$f(x_k + \alpha P_k) < f(x_k)$$

成立，则称 P_k 为函数 $f(x)$ 在点 x_k 处的一个下降方向。

当 $f(x)$ 具有连续的一阶偏导数时，并记 $f(x)$ 在 x_k 处的梯度为

$$\nabla f(x_k) = g_k = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_{x_k}^T$$

由 Taylor 公式

$$f(x_k + \alpha P_k) = f(x_k) + \alpha g_k^T P_k + o(\alpha)$$

当 $g_k^T P_k < 0$ 时，有 $f(x_k + \alpha P_k) < f(x_k)$，所以 P_k 是 $f(x)$ 在 x_k 处的一个下降方向。反之，当 P_k 是 $f(x)$ 在 x_k 处的一个下降方向时，有 $g_k^T P_k < 0$，所以也称满足 $g_k^T P_k < 0$ 的方向 P_k 为 $f(x)$ 在 x_k 处的下降方向。

定义 1.4：已知区域 $D \subset R^n$，$x_k \in D$，对于向量 $P_k \neq 0$，若存在实数 $\bar{\alpha} > 0$，使得任意 $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ 有

$$x_k + \alpha P_k \in D$$

则称 P_k 为 x_k 点处关于区域 D 的可行方向。

显然，对于区域 D 的内点来说，任意向量 P_k 都是可行方向。