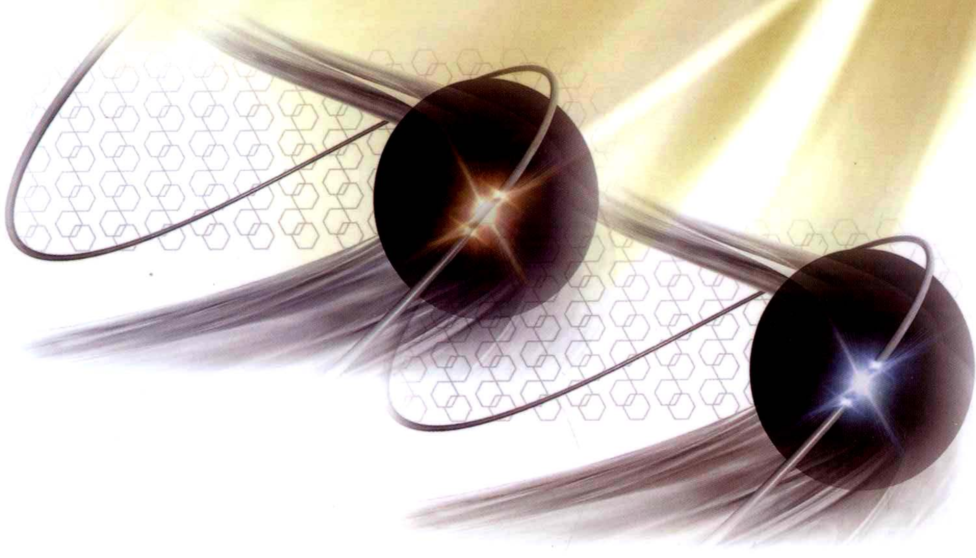
21世纪高等学校规划教材

主编　秦万广

Daxue Wuli

大学物理（下）



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21世纪高等学校规划教材

大学物理

（下）

主　编　　秦万广
副主编　　赵　岩　林　蔺

北京邮电大学出版社
·北京·

内容提要

本书是根据2004年教育部颁发的"非物理类理工学科大学物理课程教学基本要求",结合作者多年的教学实践经验而编写的.全书分为上、下两册,其中上册包括质点运动学、质点运动定律与守恒定律、刚体的定轴转动、狭义相对论、机械振动、机械波、气体动理论、热力学基础;下册包括真空中的静电场、静电场中的导体和电介质、稳恒磁场、电磁感应、电磁场和电磁波、光学、量子物理基础、近代物理的应用.

物理学是工科院校开设的重要基础课,它的理论和方法已成为科学研究及处理各领域工程技术问题的有利工具.本书是作者在总结多年教学经验的基础上,充分吸收现有同类教材的优点及教学成果编写而成.理论叙述严谨、精炼,概念明确、系统性强.

本书可以作为普通高等教育理工科院校教材,也可以供其他相关专业人士参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理.下/秦万广主编.—北京:北京邮电大学出版社,2010.1
ISBN 978-7-5635-1919-4

Ⅰ.大… Ⅱ.秦… Ⅲ.物理学-高等学校-教材 Ⅳ.O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第050394号

书　　名	大学物理(下)
主　　编	秦万广
责任编辑	沙一飞
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真	010-62282185(发行部)　010-62283578(传真)
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京忠信诚胶印厂
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	14.5
字　　数	293千字
版　　次	2010年1月第1版　2010年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-1919-4　　定价:27.00元

前　　言

21世纪是充满生机和活力、富于竞争和挑战的时代，是经济全球化、知识多元化的时代，是科学技术突飞猛进和经济迅速发展的时代.在新的历史时代，培养有创新精神、有发展潜力，胜任国际竞争的挑战，适应社会和经济建设需要的人才，是大学教育的一个重要目标.而在工科大学教育中，物理课程既是基础理论课程，又是在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力诸方面起着特殊重要的作用.

本书是充分考虑了培养21世纪工程技术人才对物理学的要求，吸取多年来本科物理学教学改革的经验而编写的.本书在编写过程中，注重课程内容的有机结合，强调对基本理论、解题方法的严谨精炼阐述，力求例题和习题的选取丰富、具有综合性和实际应用性，重视对学生分析问题、解决问题及创新能力的培养.

为适应不同教学对象和不同专业类别的教学需要，本书在满足教学基本要求必学内容的基础上，还编入了一些供选学的内容.为方便读者，选学内容均冠以“*”号.这些选学内容可以拓展读者的知识面，使读者能更广泛地了解物理学的新成就和新技术等，它们大到章，小到节与段.所有选学内容均自成体系，可选讲或指导学生自学，跳过不读也不影响全书的系统性.

本书由秦万广主编，赵岩、林蔺为下册副主编，参加下册编写的人员还有王巍然、宋更新.在编写本书的过程中，得到了东北电力大学理学院物理教学部韩宝亮教授的指导；此外，北京邮电大学出版社有关人员在本书的编辑出版过程中付出了大量的劳动，在此一并致谢.

由于编者水平有限，编写时间较仓促.书中错误之处在所难免.我们衷心希望广大读者提出宝贵意见.

编　者

目　　录

第9章　真空中的静电场

现代物理研究把自然界各种各样的物质形态划分为实物和场两大类.场是确实存在的,比如引力场、电磁场、核力场等.场和一切实物一样,也具有能量、动量和质量等重要性质,但场又与其他实物不同,几个场可以同时占有同一空间,所以,场是一种特殊物质.

实验指出,运动电荷会同时激发电场和磁场,这就揭示了电场和磁场具有相互关联的性质.而电量不变的电荷相对参考系静止时所激发的电场,我们称之为静电场.

本章只研究真空中静电场的基本性质.我们将由库仑定律出发,引入描述电场的基本概念——电场强度矢量;研究静电场的两条基本规律——静电场中的高斯定理和环路定理;并引入电势能和电势的概念.本章将不涉及电场与导体、电介质的相互作用问题.

9.1　电荷的量子化　电荷守恒定律

电荷是古代对电的一种称呼,古代人们认为电是附着在物体上的,因而称其为“电荷”.

用摩擦的方法使物体带电的现象,叫**摩擦起电**.例如,用丝绸摩擦过的玻璃棒就带有电,会表现出吸引羽毛、小纸片等轻小物体的现象.这时,我们就说丝绸和玻璃棒都处于带电状态.处于带电状态的物体,我们称其为**带电体**.18世纪中期,美国科学家富兰克林对大量试验结果分析研究后,提出自然界只有两种性质不同的电荷,分别叫做**正电荷**和**负电荷**.科学上规定:与用丝绸摩擦过的玻璃棒所带的电相同的,叫做**正电**;与用毛皮摩擦过的橡胶棒带的电相同的,叫做**负电**.同种电荷互相排斥,异种电荷互相吸引.

近代科学告诉我们:宏观物体都是由微观粒子构成的.任何化学元素的原子,从微观看,都是由带正电的原子核和绕着原子核运动的带负电的电子所组成.在通常情况下,原子核带的正电荷总数跟核外电子带的负电荷总数相等,原子对外不显电性,所以整个原子是呈电中性的.原子核里正电荷总数很难改变,而核外电子却能摆脱原子核的束缚,转移到其他物体上,从而使核外电子带的负电荷总数发生改变.那么,当物体失去电子时,它核外电子带的负电荷总数就要比原子核的正电荷总数少,对外就显示出带正电;相反,本来是电中性的物体,当得到电子时,它对外就显示出带负电.摩擦起电就是电子转移的一种现象.两个物体互相摩擦时,其中一个物体失去一些电子,而另一个物体得到多余的电子.如用丝绸摩擦玻璃棒时,玻璃棒的一些电子转移到丝绸上,玻璃棒因失去电子而带正电,丝绸因得到电子而带等量负电;用毛皮摩擦橡胶棒,毛皮的一些电子转移到橡胶棒上,毛皮带正电,而橡胶棒带等量

的负电.

一、电荷的量子化

物体所带电荷的多少叫做**电量**,电量用符号 Q 或 q 表示. 在国际单位制(SI)中,电量的单位是库仑,符号为 C. 库仑是一个导出单位,我们知道,单位时间内通过截面的电量就是电流,电流单位为安培(A). 若 1 s 内流过某截面的电量为 1 C,则流过该截面的平均电流即为 1 A,因此库仑和安培的关系为 1 C=1 A·1 s.

1897 年,剑桥大学卡文迪许实验室的约瑟夫·汤姆孙(J. J. Thomson)在研究阴极射线时发现了电子,并且测出了电子的荷质比(即电荷与质量的比值). 电子是目前实验观察到的带有最小负电荷的粒子. 1913 年,密立根从实验中测出其电量大小为 $e=1.602\ 177\ 33\times 10^{-19}$ C,并且测出任何带电体所带有的电量都是电子电量绝对值 e 的整数倍. 这种电量只能取分立的、不连续的量值的性质,称为**电荷的量子化**.

近代物理从理论上预言,存在具有分数电荷的粒子——夸克,它们所带电荷的绝对值是 e 的 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$ 倍,但是实验尚未发现单独存在的夸克.

由于电子电量是一个非常小的数值,使得宏观电现象很难表现出电荷的量子化,因此我们在计算时经常把带电体上的电荷当做连续分布来处理,并认为电荷变化也是连续的.

二、电荷守恒定律

摩擦起电现象告诉我们,摩擦使物体带电的过程其实是使物体所带正、负电荷分离或转移的过程. 在这种过程中,电荷并没有被消灭,也没有被创造,只是从一个物体转移到另外一个物体上,或从物体的一部分转移到另外一部分. 再结合其他的起电实验,我们不难总结出以下的**电荷守恒定律:在一个孤立系统中,系统所具有的正、负电荷电量的代数和保持不变.** 电荷守恒定律同能量守恒定律、角动量守恒定律一样,是自然界的基本定律之一.

在高能粒子相互作用的实验中,电子是可以产生或者消失的. 例如,一对正负电子相遇,会同时消失产生光子:

$$e^{+}+e^{-}\rightarrow 2\gamma.$$

而一个高能光子和一个重核相互作用时,该光子就可以转化成一个正电子和一个负电子:

$$2\gamma\rightarrow e^{+}+e^{-}.$$

但是在相互作用过程中,系统的正负电荷的代数和并没有发生改变,因此电荷守恒定律依然有效.

大量实验还证明,电荷的电量与它的运动状态无关. 例如,用加速器把带电粒子加速到接近光速时,粒子的质量会变化,但它们所带电荷的电量却没有任何改变. 所以,电荷的电量与其运动状态是无关的,在不同的参考系观察,同一带电粒子的电量也是不变的. 电荷的这

个性质叫做**电荷的运动不变性**.

9.2　电场强度

一、库仑定律

带电体之间存在力的相互作用,我们把这种力称为**电场力**.电场力是电荷的一种对外表现,它与带电体所带电的正负、电量的多少、带电体本身的大小和形状、电荷分布情况以及它们之间的距离有关.当带电体本身的线度与它们之间的距离相比足够小时,我们可以忽略带电体的大小和形状,认为带电体所带电量都集中在一个"点"上,我们称其为**点电荷**.点电荷是电学中的一个重要的物理模型,它类似于力学中的质点,只是一个理想模型.

1785 年法国物理学家库仑(C. A. Coulomb)通过扭秤实验,总结出真空中两个静止点电荷间相互作用力的基本规律,即**真空中的库仑定律**,简称**库仑定律**.

库仑定律可以表述为:**真空中的两个静止点电荷间的相互作用力,其方向沿两个点电荷的连线,同种电荷相斥,异种电荷相吸;其大小与两点电荷的电量乘积成正比,与它们之间距离的平方成反比.**

库仑定律的矢量表示式为

$$\boldsymbol{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_{r_{21}}. \tag{9-1}$$

式中,$\boldsymbol{F}_{21}$ 为点电荷 q_2 对点电荷 q_1 的作用力;r 为两个点电荷之间的距离;$\boldsymbol{e}_{r_{21}}$ 为从电荷 q_2 指向电荷 q_1 的单位矢量;k 为比例系数.如图 9-1 所示.

点电荷所带的电量 q_1、q_2 为标量,有大小和正负.当 q_1 和 q_2 同号时,$\boldsymbol{F}_{21}$ 与 $\boldsymbol{e}_{r_{21}}$ 同方向,表示电荷 q_1 受到 q_2 的排斥作用.而当 q_1 和 q_2 异号时,$\boldsymbol{F}_{21}$ 与 $\boldsymbol{e}_{r_{21}}$ 反方向,表示电荷 q_1 受到 q_2 的吸引作用.

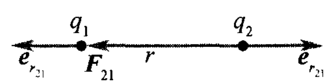


图 9-1　真空中两个静止点电荷之间的作用力

在 SI 中,当距离用 m、力用 N、电量用 C 作单位时,由实验测得的比例系数值为

$$k = 8.988\,0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}.$$

为了更方便地表达电磁学公式,人们引入另一个常量 ε_0,使 $k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.这样,我们得到了库仑定律的常用形式

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_{r_{21}}. \tag{9-2}$$

这里引入的 ε_0 称为**真空介电常数**(又称**真空电容率**),在 SI 中,它的数值和单位是

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.854\ 1 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N \cdot m^2)}. \tag{9-3}$$

库仑定律只适用于真空中两个点电荷之间的相互作用，而不能用于直接求解多个点电荷或连续带电体之间的相互作用力.

如图 9－2 所示，当空间同时存在多个点电荷时，多个点电荷作用在 P 点处点电荷 q 的总电场力就等于其他点电荷单独存在时对它作用的电场力的矢量和．这就是**电场力叠加原理**. 用公式表达为

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{qq_i}{r_i^2} \boldsymbol{e}_{r_i}. \tag{9-4}$$

式中，r_i 和 $\boldsymbol{e}_{r_i}$ 为第 i 个点电荷 q_i 到 q 的距离和单位矢量.

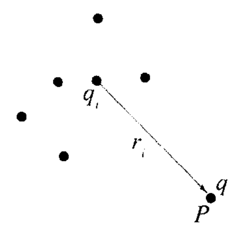


图 9－2　电场力叠加原理

库仑定律和电场力叠加原理是电学的基本规律，原则上讲，我们可以用它们解出任何带电体之间的相互作用力. 例如，我们求两个连续带电体之间的作用力，若两个带电体不能被看做点电荷，我们就无法直接应用库仑定律式(9－1)来求解. 但是，按照叠加原理，我们可以把连续带电体划分成许多带有电荷的小块，使每个小块都可以看作点电荷. 按照库仑定律求出连续带电体上的每个点电荷对另一个带电体上每个点电荷的相互作用力，再根据电场力叠加原理求它们的矢量和，即可得两个连续带电体之间相互作用的电场力.

二、静电场

库仑定律给出了两个静止点电荷之间相互作用力的表达式，那么电场力是如何从一个点电荷作用到另一个点电荷上的呢？对于这个问题，早期电磁理论曾认为，电荷之间的相互作用是一种“超距作用”，即两个点电荷突然出现在真空中，它们之间不需通过任何介质传达，也不需要时间，而能够立即发生相互作用. 而现代的理论和实验都表明，电荷之间的相互作用实际上是通过电场作为中间介质传递的，而电场在真空中以光速 c 向前传播. 产生电场的电荷称为**源电荷**. 电量不变的源电荷相对参考系静止时，产生的电场就称为**静电场**.

电场具有这样的性质，即处于电场中的任何带电体都将受到力的作用，而且带电体在电场中移动时，电场对带电体做功.

电场力有以下几个基本特性：

①通常说来，带电体之间相互作用的电场力远大于带电体间的万有引力，因此，除非特别说明，通常我们不考虑带电体间万有引力的相互作用.

②电场力有引力、斥力两种基本形式，因此我们可对电场力进行屏蔽.

下面，我们来学习如何描述一个静电场.

三、电场强度

由于场是特殊物质，不能像一般实物那样直接看得见、摸得着．那我们要如何研究它的性质呢？我们说过，处于电场中的任何带电体都将受到力的作用．这样，我们不妨把一个小电荷放到由点电荷产生的电场中的不同点，分别去测小电荷在不同点受到的作用力．我们发现，小电荷在电场中的位置不同，它受到的电场力的大小和方向是不一样的．因此，小电荷所受的电场力可以用来显示电场的性质．那么，如果我们要描述任意一个带电体在真空中产生的静电场，我们可以用其他电荷在该电场中所受的作用力来定量描述．

我们引入一个试验电荷 q_0，它的电量很小，不会影响周围空间的电场分布．将试验电荷置于一点电荷产生的电场中，它将受到电场力的作用．实验表明，q_0 所受的电场力 $\boldsymbol{F}$ 与试验电荷 q_0 的大小和正负有关，但比值 $\boldsymbol{F}/q_0$ 与试验电荷无关，是一个能反应电场性质的物理量．

我们定义比值 $\boldsymbol{F}/q_0$ 为**电场强度矢量**，简称**电场强度**，用符号 $\boldsymbol{E}$ 表示．电场中任一点的电场强度由下式表示为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}, \tag{9-5}$$

即电场中某点的电场强度的大小等于单位正电荷在该点所受电场力的大小，方向与单位正电荷在该点所受电场力的方向一致．

电场强度的 SI 单位是 N/C(牛顿每库仑)或 V/m(伏特每米)．

需要注意的是，电场是一个客观实体，只要有电荷存在，就有电场存在．电场的存在与否和是否引入试验电荷无关．试验电荷的引入只是为了检验电场的存在和讨论电场的性质而已．

式(9－5)描述的是电场中某点的电场强度，它由静电场的基本性质推出，但适用于所有电场．

四、点电荷的电场强度

我们先讨论一下一个点电荷 q 在真空中所形成的电场中某点的电场强度．我们引入一试验电荷 q_0，如图 9－3 所示．根据库仑定律，当试验电荷位于电场中某点 P 时，若 P 距源电荷距离为 r，试验电荷受到的源电荷给它的电场力为

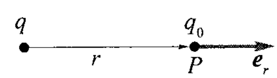


图 9－3　点电荷的电场强度

$$\boldsymbol{F}=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r.$$

根据电场强度的定义式，我们有

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r. \tag{9-6}$$

式中，e_r 为由源电荷指向场点 P 的单位方向矢量. 式(9-6)即**点电荷的电场强度计算公式**.

根据公式，点电荷在周围空间产生的电场呈球对称分布. 电场强度大小与到点电荷的距离 r^2 成反比. 距离相同处，电场强度相同. 同时我们注意到，当 $r=0$ 时，$E\to\infty$，这似乎是一个无意义的数值. 实际上，点电荷只是一个理想模型，当场点无限靠近点电荷时，点电荷将变成一有几何尺寸的带电体，其电场强度不能简单地用式(9-6)直接求解.

电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是一个矢量，对于带正电的点电荷，其方向以点电荷为中心向外辐射；而对于带负电的点电荷，其方向则以点电荷为中心向内辐射.

五、电场强度的叠加原理

当场源电荷是由 n 个点电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 构成的电荷系时，如图 9-4 所示，在电场中某点 P 处的电场强度可由作用在试验电荷 q_0 上的电场力按叠加原理得到.

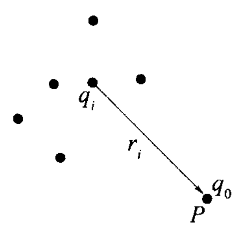


图 9-4 点电荷系的电场强度

q_0 所受的总的电场力为 $\boldsymbol{F}=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$. 按照电场强度的定义，我们求出 P 点处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\boldsymbol{F}_i}{q_0}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}_i. \qquad (9-7)$$

其中，$\frac{\boldsymbol{F}_i}{q_0}$为该点电荷系中第 i 个点电荷在 P 处产生的电场强度. 式(9-7)表明，**点电荷系在某点产生的电场强度，等于点电荷系中每个点电荷单独存在时在该点所产生的电场强度的矢量和**. 这一结果称为**电场强度叠加原理**. 电场强度叠加原理由电场力叠加原理推得，但由于其表明了电场的基本性质，故应用更为广泛.

若电荷连续分布在某个区域，我们要求出该连续带电体在空间某点产生的电场强度，就要先将其分成许多无限小的带电微元 dq，并把每个带电微元当做点电荷来处理，如图 9-5 所示.

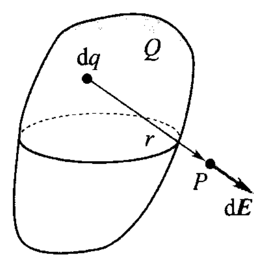


图 9-5 连续带电体的电场强度

带电微元 dq 在电场中 P 点产生的电场强度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r.$$

其中，r 为 dq 到场点 P 的距离，$\boldsymbol{e}_r$ 为单位方向矢量，其方向由 dq 指向场点，二者均随所取的带电微元 dq 不同而改变.

再根据电场强度叠加原理，我们可以得到整个带电体在 P 点产生的电场强度

$$\boldsymbol{E}=\int \mathrm{d}\boldsymbol{E}=\int_Q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r. \qquad (9-8)$$

根据电荷分布情况，我们通常会遇到如下三种带电体：

(1)若电荷分布在一条曲线上，我们定义单位长度上所含有的电荷电量为**电荷线密度**，

用符号 λ 表示，则有

$$\lambda = \frac{dq}{dl},$$

即所取的带电微元 dq 为

$$dq = \lambda dl. \tag{9-9}$$

(2)若电荷分布在一个曲面上，我们定义单位面积所含有的电荷电量为**电荷面密度**，用 σ 表示，有

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

即

$$dq = \sigma dS. \tag{9-10}$$

(3)若电荷分布在一个空间区域里，我们定义单位体积所含有的电荷电量为**电荷体密度**，用 ρ 表示，有

$$\rho = \frac{dq}{dV},$$

即

$$dq = \rho dV. \tag{9-11}$$

实际计算时，要根据带电体的电荷分布情况，写出相应的带电微元 dq 的表达式，再代入式(9-8)中计算电场强度.

例 9-1　一均匀带电直线，长为 L，总带电量为 Q. 现求线外任一场点 P 处的电场强度. 设 P 点距直线的垂直距离为 d，P 点和直线两端的连线与直线之间所夹的内角分别为 θ_1 和 θ_2，如图 9-6 所示.

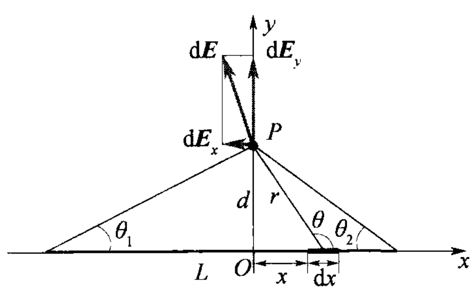


图 9-6　均匀带电直线在真空中某点产生的电场强度

解　如图 9-6 建立坐标系，由于电荷分布为线分布，可取带电荷微元 dx，设其坐标为 x，其所带电量为

$$dq = \lambda dl = \frac{Q}{L}dx.$$

dx 在 P 点产生的电场强度大小为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

电场强度是一个矢量. 对于线上不同带电微元，其在 P 点产生的场强方向不同. 因此，我们需要写出电

场强度在坐标系中的分量，即

$$dE_x = dE\cos\theta,$$
$$dE_y = dE\sin\theta.$$

进行积分运算得

$$E_x = \int dE_x = \int dE\cos\theta = \int_0^L \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta dx,$$
$$E_y = \int dE_y = \int dE\sin\theta = \int_0^L \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta dx.$$

这两个积分中有 3 个变量：x,θ,r. 利用图中所示的几何关系，把它们化成同一个变量再积分. 例如，全化为 θ，即

$$r = \frac{d}{\sin\theta},\quad x = -d\cot\theta,\quad dx = \frac{d}{\sin^2\theta}d\theta.$$

代入以上两个积分，并确定积分上下限得

$$E_x = \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\cos\theta d\theta = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 dL}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1),$$
$$E_y = \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\sin\theta d\theta = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 dL}(\cos\theta_2 + \cos\theta_1).$$

写成矢量形式为

$$\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j}.$$

用积分方法计算电场强度时，要注意式(9－8)是矢量积分，不可直接用标量的积分公式求解. 积分前，应选择合适的坐标系，并将每个带电微元产生的电场沿坐标系进行投影，之后，用数学公式分别求出每个电场强度分量的表达式，最后再写出总电场强度的矢量表达式.

下面我们来讨论两种特殊情况，如图 9－7 所示.

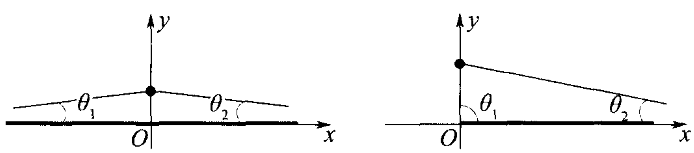


图 9－7　无限长和半无限长带电直线

(1)若均匀带电直线可看作无限长，取 $\theta_1=\theta_2=0$，代入电场公式中有

$$E_x = 0,\quad E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}.$$

此时，电场强度只有沿 y 轴方向的分量.

(2)若均匀带电直线可看作半无限长，取 $\theta_1=\frac{\pi}{2}$，$\theta_2=0$，代入电场公式中有

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d},\quad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}.$$

例 9－2　一均匀带电圆环，半径为 R，总带电量为 Q. 求其轴线上一点 P 处的电场强度矢量. 设 P 点距其中心 O 的距离为 x.

解　由于带电圆环具有轴对称性，可知其上所有带电微元产生的电场强度分布亦具有对称性，即同样以轴线为轴对称. 如图 9－8 所示，在环上取对称电荷元 dq 及电荷元 dq'，二者在 P 点产生的电场相对于 x

轴对称，电场强度在 yOz 平面上的投影彼此抵消，只有沿 x 轴方向的合电场强度. 因此，整个圆环在轴线上任一点产生的合电场强度只能是沿轴线方向.

电荷元 $\mathrm{d}q$ 的电量为

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \frac{Q}{2\pi R}\mathrm{d}l$$

电荷元 $\mathrm{d}q$ 在 P 点产生电场强度的大小为

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q/2\pi R}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)}\mathrm{d}l = \frac{Q}{8\pi^2\varepsilon_0 R(R^2+x^2)}\mathrm{d}l$$

根据刚才的分析，我们知道 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的非轴线分量都将相互抵消，其轴线分量为

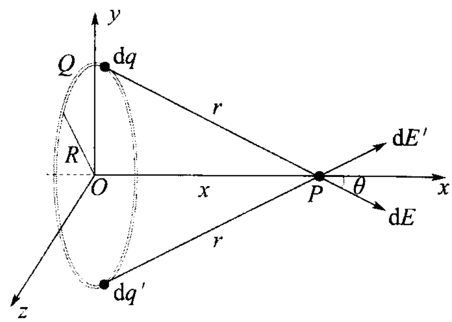


图 9－8　均匀带电圆环轴上一点的电场强度

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\theta = \frac{Qx}{8\pi^2\varepsilon_0 R(x^2+R^2)^{3/2}}\mathrm{d}l.$$

因为被积函数中除了 $\mathrm{d}l$ 以外均为常量，故有如下积分

$$E = E_x = \int_0^{2\pi R}\frac{Qx\,\mathrm{d}l}{8\pi^2\varepsilon_0 R(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}.$$

讨论：

(1)若 $x=0$，则 $E=0$，即圆环中心处电场强度为 0.

(2)若 $x \gg R$，则 $E \approx \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$，由此我们知，一个有限分布的电荷系，在无限远处的电场强度分布与点电荷相似.

根据以上两点讨论，我们知道，当场点距离圆环很远 $x\to\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，按照点电荷的电场强度公式，电场强度 $E\to 0$，而环心处电场强度也为 0. 因此，电场强度在环面两边至少各有一处极大值，电场强度对距离求导数，有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 0,$$

即
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}\right] = 0.$$

解得
$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}R.$$

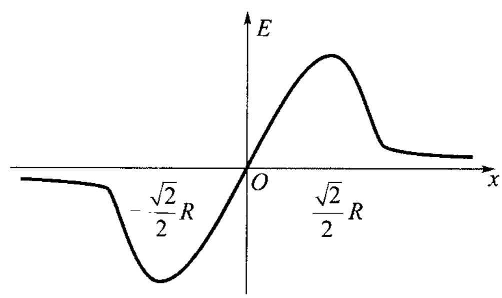


图 9－9　均匀带电圆环轴线上电场强度的 $E-r$ 图

我们可以画出均匀带电圆环轴线上 $E-x$ 的分布图，如图 9－9 所示.

例 9－3　利用上题结论，求均匀带电圆盘轴线上任意一点电场强度. 已知，圆盘电荷面密度为 σ，半径为 R.

解　圆盘是平面型带电体，我们可以任取带电微元，写出它所带电荷为 $\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S$，并对所有带电微元在场点产生的电场强度进行矢量积分. 但正如我们所看到的，圆盘是个平面，积分将是一个二重积分. 为了使我们计算方便，如图 9－10 所示，我们将圆环分成许多同心带电环带，其中半径为 r，宽为 $\mathrm{d}r$ 的环带面积为

$$\mathrm{d}S = 2\pi r\mathrm{d}r.$$

其带电量为

$$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi r\mathrm{d}r.$$

根据例 9－2 的结论，半径为 r，带电量为 dq 的圆环，在轴线上一点产生的电场强度沿轴线方向，大小为

$$dE=\frac{x\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}}.$$

因为每个环带在场点产生的电场强度方向都沿轴线，所以总电场强度为

$$E=\int_0^R\frac{x\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}}=\frac{x\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{3/2}}.$$

可以看出，这只是一重积分，积分后得

$$E=\frac{x\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right).$$

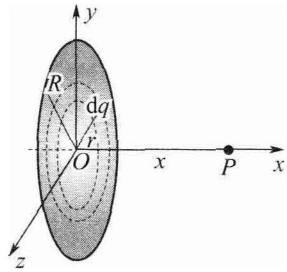


图 9－10　均匀带电圆盘轴线上的电场强度

讨论：若 $x\ll R$，则圆盘可以看做是无限大的均匀带电平面，上面的积分限就要从 0 到∞，得到无限大均匀带电平面附近的电场强度大小为$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. 这表明，无限大平面附近的电场是匀强电场.

9.3　电场强度通量　高斯定理

上一节我们学习了描述电场性质的一个重要的物理量——电场强度矢量，并学习了用点电荷的电场强度公式和电场强度叠加原理求解带电体在真空中的电场强度. 本节我们将学习反映静电场性质的一个重要定理——高斯定理. 在学习高斯定理之前，我们要先介绍电场线及电场强度通量的概念.

一、电场线

在任何电场中，任一点的电场强度都有一定的大小和方向. 为了能直观地描述任一点处电场强度的大小和方向，即电场强度的分布，我们可以在电场中画出一系列曲线，用它来确定电场中某点的电场强度情况，这些曲线就叫做**电场线**. 规定：**电场中某点的电场强度方向为该点电场线的正切线方向，而大小则等于该点的电场线密度**. 如图 9－11 所示.

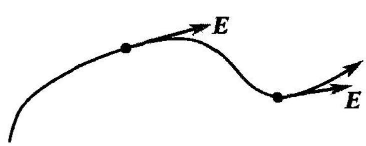


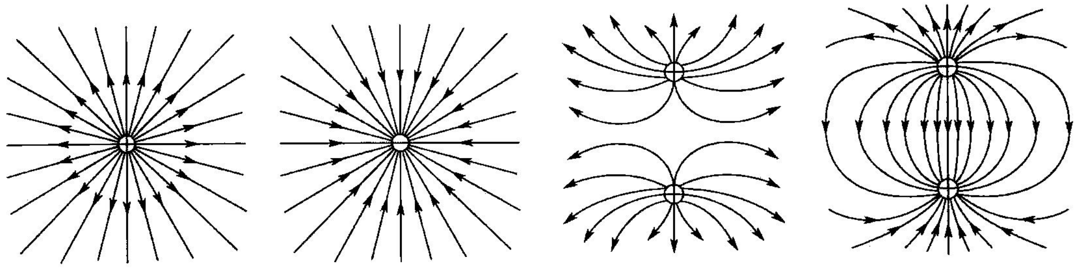
图 9－11　电场线

其中，电场线密度定义如下：在电场中某点附近，垂直于电场方向取面积元 $dS_\perp$，设穿过该面元的电场线根数为 dN，则我们定义 $dN/dS_\perp$ 为该点的电场线密度，即

$$E=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S_\perp}. \tag{9-12}$$

图 9－12 画出了几种典型电荷的电场线分布，根据电场线的规定，电场线的方向是电场强度的方向，而电场线的疏密则反应了电场强度的大小. 需要注意的是，电场线实际上并不

存在，它只是为形象描绘电场的电场强度分布而使用的一种几何方法.



(a) 正电荷　(b) 负电荷　(c) 两个等值正电荷　(d) 两个等值异号电荷

图 9－12　几种典型电荷的电场线分布

从图中我们可以得到电场线的几点性质：

(1)电场线始于正电荷，止于负电荷，在没有电荷的地方不会中断.

(2)电场线是不闭合的.

(3)任意两条电场线不会相交.

第(3)点性质是因为电场中任一点都只能有一个确定的电场强度方向，第(1)点性质在我们学习高斯定理后可以简单证明. 而第(2)点性质将在环路定理中得到证明.

二、电场强度通量

通过电场中任一给定面积的电场线数，称为**通过该面积的电场强度通量**，简称**电通量**，用符号 Φ_e 表示. 下面我们来研究电通量的计算方法.

1. 匀强电场

如图 9－13 所示，平面 S 的法线方向 $\boldsymbol{e}_n$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 之间的夹角为 θ，$S_\perp$ 为平面 S 在垂直电场强度方向的投影. 根据电场线的规定可知，匀强电场中任一点的电场线密度都相等，即

$$\frac{N}{S_\perp} = E.$$

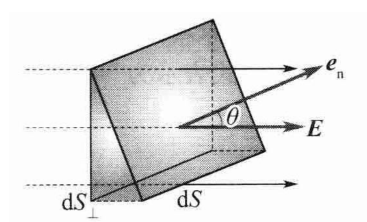


图 9－13　匀强电场中穿过平面的电通量

式中，N 为穿过 $S_\perp$ 的电场线根数，也就是穿过 $S_\perp$ 面的电通量，即

$$\Phi_e = N = ES_\perp.$$

从图 9－13 中可以看出，穿过 S 面的电通量与穿过 $S_\perp$ 面的电通量是相等的，因此

$$\Phi_e = ES_\perp = ES\cos\theta$$

式中，θ 角为平面法线方向与电场强度方向的夹角.

我们用矢量形式表示通过面积 S 的电通量，则有