香樟书库系列

数学卷

教育部高等学校特色专业建设教材

数学分析方法

◎ 郑庆玉　郭　政　主编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

香樟书库系列　数学卷

教育部高等学校特色专业建设教材

数学分析方法

郑庆玉　郭　政　主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内容简介

本书对数学分析的基本概念、基本结论、重要方法及证明、计算技巧进行了总结和归纳，对重要内容进行了全面细致的讨论。收集了大量数学分析习题，对历届不同学校的考研试题进行了有益的总结和归纳，整理了常用的解题方法、技巧和经验。本书在内容上全面系统，深入浅出，对于提高分析和解决数学分析中的问题的能力有很大帮助。

本书按照传统的教学内容顺序安排，共分9章，分别是极限、连续、一元函数微分学、定积分、级数理论、多元函数微分学、广义积分、含参变量积分和多元函数积分学。每章节都有两部分内容，一是基本内容、基本概念和方法、常见问题等；二是典型例题，包括典型例题解析，方法总结和重点分析讲解。本书注重解题思路的讲解和规律的揭示与方法技巧的归纳，突出知识的综合运用和解题能力的训练，以求达到举一反三、见微知著、融会贯通的目的。

本书可作为报考数学各专业硕士研究生复习数学分析的参考书，以及理工科大学生课程学习或复习的指导书，还可作为有关教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析方法/郑庆玉，郭政主编. —北京:电子工业出版社，2010.11
教育部高等学校特色专业建设教材
ISBN 978-7-121-11929-3

Ⅰ.①数… Ⅱ.①郑… ②郭… Ⅲ.①数学分析-分析方法-高等学校-教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第190632号

策划编辑:张贵芹
责任编辑:周宏敏　特约编辑:李云霞
印　　刷:北京丰源印刷厂
装　　订:三河市鹏成印业有限公司
出版发行:电子工业出版社
　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编100036
开　　本:787×1092　1/16　印张:13　字数:333千字
印　　次:2010年11月第1次印刷
印　　数:4 000册　定价:26.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888

《香樟书库》总序

临沂师范学院院长　韩延明

2006年8月，由我校教师主编的首批立项资助教材——《香樟书库》系列校本教材由山东大学出版社正式出版。在此基础上，根据教学计划和课程建设的实际需要，我们又很快启动了第二批立项教材的编撰工作。在学校教材建设指导委员会的组织、指导与协调下，教材编著者们夜以继日地辛勤劳作，如今已顺利完成了第二批教材的编撰工作，即将付梓面世。这批教材的编撰出版，既是我校校本教材建设工作步入规范化、系统化、科学化轨道的一种重要标志，也是我校认真贯彻落实教育部、山东省教育厅高等院校质量建设工程、促进学校内涵发展的一项重大举措。

我认为，对今日之高校而言，思路决定出路，就业决定专业，能量决定质量，质量决定力量。办学质量始终是一所学校的声誉之源、立校之本、发展之基，是高等学校的一条生命线。提高教学质量，理应是高校矢志不渝所追寻的永恒主题和永远高奏的主旋律，这就是我们常讲的“教学为本，质量立校”。而众所瞩目的高校办学质量又始终贯穿于实现“人才培养、知识创新和服务社会”三大职能的各个具体环节之中，其中既有人才培养的质量问题，也有科技成果和社会服务的质量问题，但人才培养质量是核心和旨归。孔子曰：“君子务本，本立而道生。”培养高质量人才是大学责无旁贷的神圣使命，而人才培养的主渠道又相对集中于课堂教学。课堂教学的基本要素是教师、学生和教材。

教材即教学材料的简称。细言之，它是指依据教学大纲和教学实际需要为教师、学生选编的教科书、讲义、讲授提纲、参考书目、网络课程、图片、教学影片、唱片、录音、录像及计算机软件等。古人云：“书山有路勤为径，学海无涯苦作舟。”在漫漫求学路途上，千辛苦、万劳累，呕心沥血、夜以继日，书总会一直忠诚地陪伴着学习者，承前启后、继往开来，输送知识、启迪智慧，成为学习者解疑释难的知心朋友和指点迷津的人生导师，而学生之“书”的主体是教材。教材是教学内容和教学方法的知识载体，是教师实施课堂教学的依据和工具，是学生最基本的学习参考材料，是师生互动、教学相长、顺利完成教学任务的必要基础。“教本教本，教学之本。”教材建设水平是衡量一所高校教学质量与学术水平的重要标志之一。临沂师范学院历来重视教材建设工作，曾多次对教材建设工作进行专题研究。几年前，为了督导教师选用优质教材，提高教学质量，强化教学管理，优化教学环境，学校曾严格规定：全部本科教材均使用教育部、教育厅统编教材或获奖教材，禁止使用教师自编教材，从而保证了教材质量，为规范、完善本科教学工作奠定了良好的基础。

近年来，伴随着我国高等教育大众化的迅速推进和高校本科教学工作水平评估的深入进行，临沂师范学院实现了超常规、跨越式发展，其中之一是卓有成效地开展了“四大建设”，即“深化课程建设，优化专业建设，亮化学科建设，强化师资队伍建设”，使

专业学科建设水平与教师教学水平不断提高，课程体系建设与课程开出能力不断增强，课堂教学改革与课外活动革新不断深入，相继涌现出一批质量上乘、优势明显、特色突出的优质课程和爱岗敬业、授课解惑、教书育人的优秀教师，因而启动自编教材工作的条件日臻成熟。古人云："临渊羡鱼，不如退而织网。"2006 年，学校正式启动了首批立项教材建设工作，紧紧围绕人才培养目标，密切联系教学改革及课程建设实际，配合学校课程体系构建、教学内容改革及系列选修课程建设，在确保质量的基础上，正式出版了第一批校本教材，并于当年投入使用，得到了师生的普遍认可和同行专家的高度评价。在认真总结第一批立项教材建设经验的基础上，2007 年，学校又启动了第二批立项教材的编撰与出版工作。

我校的教材建设是有计划、有组织、有步骤进行的，经过教材建设指导委员会专家们的精心论证和严格审核，确定了校本教材建设的重点和选题范围：一是解决教学急需的，填补学科、专业、课程空白的新教材；二是体现我校教师在某一学科、专业领域独具优势或特色的专业基础课和选修课教材；三是针对我校作为区域性院校特点，结合地方社会政治、经济、科技、文化需求所开设的地方课程教材。

常言道：意识决定形态，细节决定成败。在教材编撰原则上，我们强调：一是注重知识性与思想性相辅相成；二是注重学术性与可读性融为一体；三是注重科学性与学科性彼此糅合；四是注重理论性与实践性相得益彰；五是注重统一性与多样性有机结合；六是注重现实性与前瞻性有效拓展。记得我国著名教育家张楚廷教授曾提出了教材编写的"五最"准则，即最佳容量准则、最广泛效用准则、最持久效应准则、最适于发展准则、最宜于传授准则，我深表赞同。

在教材编写内容上，我们要求：既重视对国内外该领域经典的基本理论问题进行透彻的解析，又对当前教育现实中所面临的新现象、新理论、新方法给予必要的回应；既考虑到如何有利于教师的课堂讲授与辅导，又顾及到如何有助于学生的课后复习和思考；既能反映我校教学内容和课程体系改革的基本方向，又要展示我校教材建设及学术研究的最新成果，适应我校创建精品课程、优质课程和品牌课程的实际需要。在教材教法改革上，我们倡导：秉持素质教育理念，坚持课堂讲授与课堂讨论相结合、教师讲授与学生自学相结合、理论学习与案例分析相结合、文本学习与网络学习相结合，"优化课内，强化课外"，重视教师启发式、研讨式、合作式等教学方式方法的科学运用，重视学生思维能力、创新能力、实践能力与创业能力的培养和训练，力图为学生知识、能力、素质的协调发展创设条件。可喜的是，这些方面都在教材编写中得到了充分体现。同时，所有教材均是在试用多年的成熟讲义的基础上经编著者精心修改和委员会严格审定后出版的，保证了教材的思想性、科学性、系统性、适用性、启发性和相对稳定性。作者所撰章节，都是自己多年来多次授教与潜心研究的内容，在阐述上颇有真知灼见，能够引领和推动学生对有关基本理论和基本技能问题产生独特的理解和感悟，最终进入学与习、学与辑、学与思、学与行、学与创相结合的学人境界。学校对所有立项出版教材均给予经费资助。

临沂师范学院《香樟书库》系列立项校本教材的编撰出版，饱含了编著者们的辛勤

劳动和指导委员会成员的热情支持。“香樟”为常绿乔木，树冠广展，枝叶茂密，香气浓郁，长势雄伟，乃优质行道树及庭荫树。我们之所以命名为“香樟书库”，乃在于香樟树根系发达，材质上乘，耐贫瘠，能抗风，适应性广，生命力强。它茁壮、清新、芳香，代表健康、温馨、希望，寓意我们的校本教材建设一定也会像2001年首批由南方移植于我校校园，如今已是根深叶茂、枝繁冠阔的香樟树一样，生机勃勃，充满希望和力量。然而，由于此项工作尚处于尝试、探索阶段，疏漏、偏颇甚或错误之处在所难免，正所谓“始生之物，其形必丑”，敬请各位同仁和同学批评指正，以期再版时予以修订。

最后，摘录俄国著名文学家托尔斯泰的一句名言与同学们共勉：“选择你爱的，爱你选择的!”

2010年8月26日

草于羲之故里

前　言

本书是在编者二十多年讲授数学分析课程及十多年辅导本科生和青年教师数学分析课程考研讲稿的基础上写成的。本书总结了数学分析中的基本概念、基本结论和典型方法，介绍了数学分析中各种类型的问题和解题技巧，对其中的重要内容和典型问题进行了全面、深入的讨论。

本书内容按数学分析知识结构体系编排，书中所选习题，大部分是各院校历年的研究生入学考试题。本书在这些典型例题的分析讲解上，讲解示法，以题示理，注重解题思路的分析、解题规律的总结和方法技巧的提炼，突出知识的综合运用和重点、难点、考点的解析。这一切旨在起到解难释疑、开阔思路、触类旁通之效。

本书的目的是使学生对数学分析的基本理论有全面、系统、深入的理解，对数学分析的基本技巧、主要结论和重要思想有基本的把握。本书对数学专业学生准备研究生考试有重要参考价值，同时也可作为有关教师的教学参考书。在本书的编写过程中，得到了理学院领导的大力支持，对此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中所述难免有一定的局限性，不妥和错误之处敬请同行、专家批评、指正，更希望广大读者不吝赐教，多提宝贵意见。

本书得到国家特色专业“数学与应用数学”经费资助。

郑庆玉

2010 年 6 月于临沂

目　录

第 1 章　极　　限

1.1　基本理论

1.1.1　基本概念

1. 数列极限定义

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$：任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

等价定义：任给 $\varepsilon>0$，若在 $U(a;\varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项至多只有有限个，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于极限 a，其中，$U(a;\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$：存在 $\varepsilon_0>0$，对任意正整数 N，存在 $n_0>N$，使

$$|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0.$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ 发散：任何实数 a 都不是 $\{a_n\}$ 的极限.

2. 函数极限定义

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$：任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$：存在 $\varepsilon_0>0$，对任意 $\delta>0$，存在 x_1：$0<|x_1-x_0|<\delta$，使

$$|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$：任给 $\varepsilon>0$，存在 $M>0$，当 $|x|>M$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$：任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

(5) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$：任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$：任给 $\varepsilon>0$，存在 $M>0$，当 $x>M$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$：任给 $\varepsilon>0$，存在 $M>0$，当 $x<-M$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

1.1.2　基本性质

1. 唯一性

若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它只有一个极限.

2. 有界性

若数列$\{a_n\}$收敛，则数列$\{a_n\}$为有界数列，即存在正数M,使得对一切正整数n有

$$|a_n|\leq M.$$

局部有界性：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则$f$在$x_0$的某空心邻域$U^0(x_0)$内有界.

3. 保号性

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$(或$<0$)，则对任何正数$a'<|a|$，存在正整数$N$，使得当$n>N$时有$a_n>a'>0$（或$a_n<a'<0$).

局部保号性：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$(或$<0$)，则对任何正数$r<|A|$存在$x_0$的空心邻域$U^0(x_0)$，使得对一切$x\in U^0(x_0)$有

$$f(x)>r>0(\text{或}f(x)<-r<0).$$

4. 不等式性质

设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均为收敛数列，若存在正整数N_0，使得当$n>N_0$时有$a_n\leq b_n$，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n\leq\lim_{n\to\infty}b_n.$$

5. 迫敛性

设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均以a为极限，数列$\{c_n\}$满足：存在正整数N_0，使得当$n>N_0$时有

$$a_n\leq c_n\leq b_n,$$

则数列$\{c_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

6. 四则运算法则

设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均为收敛数列，则$\{a_n\pm b_n\}$，$\{a_n\cdot b_n\}$也都是收敛数列，且

$$\lim_{n\to\infty}a_n\pm b_n=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n,\lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$

1.1.3 基本结论

(1) 当$n\to\infty$时，$\dfrac{\log_a n}{n^k}$、$\dfrac{n^k}{c^n}$、$\dfrac{c^n}{n!}$、$\dfrac{n!}{n^n}$的极限都是零(其中$a>0$、$k>0$、$c>1$).

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1$；$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$(其中$a>0$、$|q|<1$).

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$；$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(4) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

(5) 若$a_n>0$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$(其中$a$可以为零).

(6) 若$a_n>0$且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{a_n}=l$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$.

(7) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$.

(8) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 反之不一定成立(逆命题仅当$a=0$时成立).

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$(其中$a_i\geq0,i=1,2,\cdots,m$).

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=a$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=a$；
数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：数列 $\{a_{2n-1}\}$ 与 $\{a_{2n}\}$ 都收敛且极限相等.
(11) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的充要条件是：$a_n=a+\varepsilon_n$（其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$）.
(12) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的充要条件是：对数列 $\{a_n\}$ 中的任一个子列 $\{a_{n_k}\}$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}a_{n_k}=a.$$

(13) 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.
(14) 任一有界数列都存在收敛的子列.
(15) $\max\{a,b\}=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{|a-b|}{2}$，$\min\{a,b\}=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{|a-b|}{2}$.
(16)（归结原则）
$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是：对任何 $x_n\to x_0(n\to\infty),x_n\neq x_0$，有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是：对任何 $x_n\to x_0(n\to\infty),x_n\neq x_0$，$\{f(x_n)\}$ 收敛于同一极限.
(17) 柯西(Cauchy)准则
$\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n,m>N$ 时，有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon.$$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是：$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x',x''\in U^0(x_0,\delta)$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

1.2 典型例题

求极限的主要方法有：①极限定义；②迫敛性；③罗必达法则；④两个重要极限；⑤单调有界定理；⑥压缩映射原理；⑦Taylor 公式；⑧Stolz 定理；⑨级数收敛的必要条件；⑩定积分定义等.

1.2.1 用定义证明极限

用定义证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 存在性的一般方法是：

(1) 求最小的 N. 从不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 中解出 n，即证明 $|a_n-a|<\varepsilon$ 等价于 $n>N(\varepsilon)$，因此取 $N=N(\varepsilon)$.

(2) 放大法. 将不等式放大为 $|a_n-a|\leqslant h(n)$，只要 $h(n)<\varepsilon$ 即可. 注意放大后的 $h(n)$ 必须能够任意小.

(3) 分步法. 需要对 n 作出某些限制，即不妨设 $n>N_1$，然后再通过放大解出 N_2，取 N 为 N_1 与 N_2 中最大的：$N=\max\{N_1,N_2\}$.

对 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，有类似的 $\varepsilon-\delta$ 方法.

例 1.2.1 若 $p_k>0(k=1,2,\cdots,n)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{p_1+p_2+\cdots p_n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a.$$

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，所以有：

(1) $\{a_n\}$有界，因此$\exists M>0$，使对任意自然数 n，有 $|a_n|\leqslant M$；

(2) $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

因此

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}-a\right|\\
\leqslant&\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}(p_1|a_n-a|+p_2|a_{n-1}-a|+\cdots+p_n|a_1-a|)\\
=&\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}(p_1|a_n-a|+p_2|a_{n-1}-a|+\cdots\\
&+p_{n-N}|a_{N+1}-a|+p_{n-N+1}|a_N-a|+\cdots+p_n|a_1-a|)\\
\leqslant&\frac{p_1+p_2+\cdots+p_{n-N}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\varepsilon+\frac{p_{n-N+1}+p_{n-N+2}+\cdots+p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}M\\
\leqslant&\varepsilon+M\varepsilon=(1+M)\varepsilon.
\end{aligned}$$

(其中上式最后一个不等号成立的理由是：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$ 知，对固定的 N，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n-N+1}+p_{n-N+2}+\cdots+p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0\,)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a.$$

例 1.2.2 用定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{3n^2+2n-3}=\frac{1}{3}.$$

证 因为

$$\left|\frac{n^2-n+1}{3n^2+2n-3}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{-5n+6}{3(3n^2+2n-3)}\right|.$$

当 $n>2$ 时，$5n-6>0$，此时 $3n^2+2n-3>3n^2-3n>0$，

$$\left|\frac{n^2-n+1}{3n^2+2n-3}-\frac{1}{3}\right|\leqslant\frac{5n-6}{3(3n^2-3n)}<\frac{5n-5}{9(n^2-n)}=\frac{5}{9n}<\frac{1}{n}$$

所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{2,\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{n^2-n+1}{3n^2+2n-3}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{3n^2+2n-3}=\frac{1}{3}.$$

例 1.2.3　已知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{x_n}=\sqrt[3]{a}$.

证　(1) $a=0$ 时，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，所以

$$\forall\varepsilon>0, \exists N, \text{当 } n>N \text{ 时}, |x_n|<\varepsilon^3.$$

从而
$$\left|\sqrt[3]{x_n}\right|<\varepsilon.$$

(2) $a\neq 0$ 时，因为

$$(\sqrt[3]{x_n})^2+(\sqrt[3]{x_n})(\sqrt[3]{a})+(\sqrt[3]{a})^2=\left(\sqrt[3]{x_n}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{a}\right)^2+\frac{3}{4}(\sqrt[3]{a})^2\geqslant\frac{3}{4}(\sqrt[3]{a})^2>0.$$

记 $M=\frac{3}{4}(\sqrt[3]{a})^2$.

则有
$$\left|\sqrt[3]{x_n}-\sqrt[3]{a}\right|=\frac{|x_n-a|}{(\sqrt[3]{x_n})^2+(\sqrt[3]{x_n})(\sqrt[3]{a})+(\sqrt[3]{a})^2}\leqslant\frac{|x_n-a|}{M}.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<M\varepsilon$. 因此，当 $n>N$ 时，

$$\left|\sqrt[3]{x_n}-\sqrt[3]{a}\right|\leqslant\frac{|x_n-a|}{M}<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{x_n}=\sqrt[3]{a}.$$

注　用类似方法可以证明：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{A}$ 以及 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$.

例 1.2.4　用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$.

证　令 $\sqrt[n]{n+1}-1=h$，则 $h>0$，且

$$1+n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n\geqslant 1+\frac{n(n-1)}{2}h^2$$

所以

$$h\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}}, \text{因此} \forall\varepsilon>0, \text{取} N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right], \text{当 } n>N \text{ 时，有}$$

$$\left|\sqrt[n]{n+1}-1\right|=h\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1.$$

例 1.2.5　用定义证明 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}=1$.

证

$$\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}-1\right|=\left|\frac{\frac{7}{16x^2-9}-1}{\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}+1}\right|\leqslant\left|\frac{7}{16x^2-9}-1\right|=\frac{16|1+x|\,|1-x|}{|4x+3|\,|4x-3|}$$

不妨设 $|x-1|<\frac{1}{8}$，则

$$|x+1|=|x-1+2|\leqslant|x-1|+2<3,$$

$$|4x+3|=|4(x-1)+7|\geqslant 7-4|x-1|>7-\frac{4}{8}>4,$$

$$|4x-3|=|4(x-1)+1|\geqslant 1-4|x-1|>\frac{1}{2},$$

所以

$$\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}-1\right|\leqslant\frac{16\cdot 3\cdot|x-1|}{4\cdot\frac{1}{2}}<24|x-1|$$

因此 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{24},\frac{1}{8}\right\}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有

$$\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}-1\right|<\varepsilon$$

即

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}=1.$$

例 1.2.6 用定义证明

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{x-3}=0.$$

证 不妨设 $|x-1|<1$，则 $|x-2|=|x-1-1|\leqslant|x-1|+1\leqslant 2.$

$$|x-3|=|x-1-2|\geqslant 2-|x-1|>2-1=1.$$

所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{2}\right\}$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{(x-2)(x-1)}{x-3}-0\right|\leqslant 2|x-1|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{x-3}=0.$$

1.2.2 用罗必达法则求极限

例 1.2.7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-\frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^x+xe^x+\frac{1}{(1+x)^2}}{2}=\frac{3}{2}.$$

例 1.2.8　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2\,dt}{\sin^{10}x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2\,dt}{\sin^{10}x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2\,dt}{x^{10}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2x\cos x^4}{10x^9}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^4}{5x^8}=\frac{1}{10}.$$

这里第一个等号应用了等价无穷小代换 $\sin^{10}x\sim x^{10}(x\to 0)$，第二个及第三个等号应用了罗必达法则，最后的等式利用了下式：

$$\frac{1-\cos x}{x^2}\to\frac{1}{2}(x\to 0).$$

例 1.2.9　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

解

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x}$$

令　$t=\dfrac{1}{x}$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=-\frac{1}{2}$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

例 1.2.10　已知 $a>0,b>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

解　考虑函数 $f(x)=\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ 当 $x\to 0$ 时的极限.

因为

$$f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}.$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}=\frac{\ln a+\ln b}{2}=\ln\sqrt{ab}.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}.$$

因此由归结原则知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}.$$