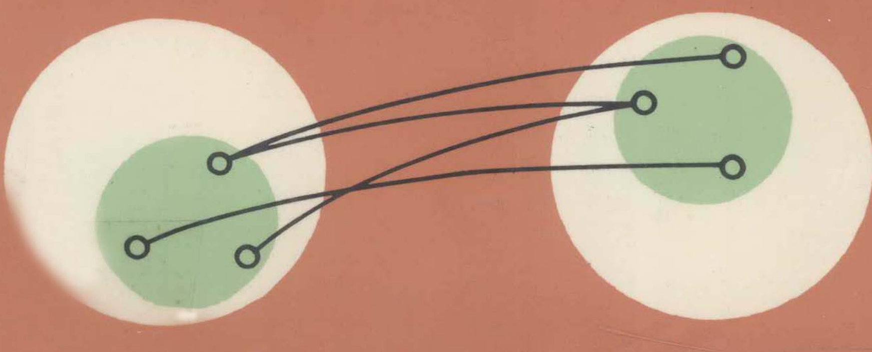
离散数学

王遇科 编



北京理工大学出版社

离散数学

王遇科 编

北京理工大学出版社

内 容 简 介

《离散数学》是计算机科学和信息科学的数学基础。全书共分七章，介绍了数理逻辑、集合、代数结构和图论等基本内容。本书叙述较为详细，针对性强，书中给出了较多实例，每一小节都附有习题，便于广大读者自学之用。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/王遇科编 .—北京：北京理工大学出版社，1986.1 (2002.3 重印)

ISBN 7-81013-186-9

Ⅰ.离… Ⅱ.王… Ⅲ.离散数学-高等学校-教材 Ⅳ.0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 17707 号

北京理工大学出版社出版发行
(北京市海淀区中关村南大街 5 号)
邮政编码 100081　电话(010) 68912824
各地新华书店经售
北京神剑印刷厂印刷

*

787 毫米×1092 毫米　32 开本　11.875 印张　255 千字
1986 年 1 月第 1 版　2002 年 3 月第 14 次印刷
印数：96001—102000 册　定价：14.00 元

前　言

计算机科学以空前的速度发展着，各种理论问题的研究，交错地使用着近代数学中的不同论题。为了便于掌握必备的数学工具和培养学生的抽象思考能力，在本书中，选定了一些必要的内容，如数理逻辑、集合论、代数结构和图论。同时，也为学习后续课程提供了数学基础。这些后续课程包括有：自动机理论、可计算性理论、人工智能、形式语言及语法分析、数据结构、数据库、信息管理与检索、高级程序设计语言、开关理论、逻辑设计和程序理论，等等。

在本书里，没有详尽地讨论计算机科学所涉及的全部数学内容，也没有对所选定的每一个论题作足够全面深入地阐述；相反，它仅仅提供一些基础性知识。本书的目的在于说明所选中的数学内容的基本术语、基本概念、基本定理、运算技巧，以及这些论题在计算机科学中的应用。对应用方面的讨论，会帮助了解数学中的抽象思想与计算机科学实践之间的内在联系，从而能够获得运用这些思想去解决实际问题的能力。

计算机科学与工程专业的学生，通过本书能够对“离散数学”有个基本了解。

在计算机科学和信息科学中，离散数学所研究的主要是离散对象之间的关系。无疑，离散数学将沿着在计算机科学

和信息科学中的应用的道路发展下去，其内容将会不断地扩充和发展，甚至会发展成具有自己特点的数学分支。

人工智能，是信息科学的一个重要领域。它的发展，对于提高计算机的功能和开拓计算机的应用范围，将会起着重大作用；另一方面，也会给离散数学的发展提供广阔的前景。

本书可供授课60～80学时之用。

北京工业学院人工智能研究所

王 遇 科

一九八六年一月

目　　录

第一章 命题逻辑

引 言

命题逻辑是数理逻辑的基本组成部分，是谓词逻辑的基础。数理逻辑又名符号逻辑，是一门用数学方法研究推理过程的科学。

逻辑学主要是研究各种论证。它可以是有意义的一般论证，也可以是科学理论中的数学证明或结论。建立逻辑学的主要目的在于探索出一套完整的规则，按照这些规则，就可以确定任何特定论证是否有效。这些规则，通常称为推理规则。

在逻辑学中，与其说注重的是论证本身，不如说注重的是论证形式。同其它科学理论一样，也可以把推理理论公式化。这样，依据各项规则并使用机械方法，不难确定论证的有效性。使用这种方法进行推理时，所遵循的规则一定不能具有二义性。

为了表述任何成套规则或者理论，都需要为它配置一种语言。具有二义性的自然语言，不可能正确地和充分地表述上述的规则或理论。为此，首先应该制定一种形式语言，或者称为客观语言。在这种形式语言中，必须明确地和严格地定义好它的语义和语法。

为了避免二义性，在形式语言中将使用一些符号，并给这些符号作出明确的定义。使用符号还有另外的意义，符号很容易书写和处理。由于在逻辑学中使用了符号，故数理逻辑也称为符号逻辑。

这一章的前半部分主要是叙述形式语言的制定和分析。在开关理论和计算机的逻辑设计中，这种形式语言得到了卓有成效的应用。

§1-1 命　　题

命题逻辑是数理逻辑的最基本部分。在本小节中，将阐明什么是命题，以及与命题相关的若干基本问题。

1-1.1 命题和联结词

所谓命题，就是指具有真假意义的语句。例如：

"计算机科学是一门新兴科学。"

因为陈述性语句，根据其内容能够辨别其真假；而疑问句、命令句、感叹句等都不能判断其真假，所以在一般情况下，命题都是些陈述性语句。因此，在形式语言中，除了陈述性语句之外，不允许其它类型的语句出现。命题可以是真的或者是假的，但不能同时为真又为假。也就是说，命题仅有两种可能的真值："真的"和"假的"，且只能选取其中之一。通常用大写英文字母T和F分别表示"真的"和"假的"真值；有时也用1和0分别表示它们。命题的真值具有客观性质。因为只有两种真值，所以这种逻辑有时称为二值逻辑。

形式语言是由基本单元组成。设想对陈述性语句进行分

解，若再也不能分解成更为简单的语句时，则这类最简单的语句就是些基本单元，通常称为本原命题或原子命题。下面将给出一些语句的实例，并结合实例说明上述的情况。

(1)十是一个整数。

(2)上海是一个村庄。

(3)今天是十五号。

(4)我们这个地区四季如春。

(5) $1+101=110$。

显然，语句(1)的真值是“真的”；而语句(2)的真值是“假的”。语句(3)的真值因时间而异，每年只有十二天是“真的”。语句(4)的真值因地区而异，只是在部分地区看是“真的”。虽然如此，语句(3)和(4)总是有一个真值，故它们也是命题。对于语句(5)来说，若语句中的数是十进制的，则它的真值是“假的”；若数是二进制的，则它的真值是“真的”。不难看出，语句(5)的真值依赖于文中的上下文关系。依据前后文关系，可以识别出数是属于何种进位制，从而能够判定其真假，故语句(5)也是个命题。下面再考察一些语句实例：

(6)向右看齐！

(7)再会！

(8)吃过饭了吗？

(9)时间过得多快呀！

(10)本命题是假的。

在上述语句中，语句(6)不是一个命题，而是一个口令。语句(7)是个祈使句，不能辨别其真值。语句(8)是个疑问句，而语句(9)是个感叹句，也都无法辨别其真假，故

都不是命题。对于语句(10)来说，因为无法给它指派适当的真值，所以语句(10)乃是一个有二义性的语句。如果给它指派“真的”真值，则语句(10)说明命题(10)是“假的”；若给它指派“假的”真值，则语句(10)暗指命题(10)是“真的”。

不难看出，语句(1)至语句(5)，都是些原子命题。统观上述的实例可以说，不在于要事先估计到命题的实际真值，而重要的是它有一个真值。

在形式语言中，有两类陈述性语句：第一类是本原语句或称为原子语句，也就是原子命题，常用大写英文字母A，B，C，…，P，Q，…表示它们；第二类语句是复合语句或称为分子语句。它是用称为联结词的符号和圆括号，把原子语句联结起来构成的语句。复合语句的“真”或“假”只与所含的原子语句的真值有关，与它们的含义无关。这种陈述性语句就是复合命题或分子命题。这就是说，使用适当的联结词，可以把原子命题组合成复合命题。

在现代汉语中，常使用一些联结词。有时在不同的意义上使用同一个联结词；与此相反，有些不同的联结词却具有同样的意义。因此，需要对联结词作出严格的定义，并用符号表示它们。

下面就来定义联结词。

定义1-1.1 用“P”表示一个命题，可以把“P”的否定写成“$\neg P$”，并读作“非P”。“非P”是真，当且仅当“P”是假。表1-1.1说明了否定的定义。

下面就来说明如何构成命题的否定。为此考察命题

P：天津是一个城市。

于是

$\neg P$：天津不是一个城市。

“否定”联结词，它只对单独的命题进行运算，从而生成新的命题。在这种意义上讲，否定是一个一元运算①。这里，用符号“$\neg$”表示了对命题的否定。在数理逻辑的书籍中，以及某些程序设计语言中，普遍地采用了这种表示法。例如，程序设计语言PL/1中的情形就是如此。

表1-1.1　否定的真值表

P	$\neg P$	P	$\neg P$
F	T	0	1
T	F	1	0

另外一个联结词是合取，用符号$\wedge$表示它。

定义1-1.2　给定两个命题P和Q。命题$P\wedge Q$，读作“P与Q”。P和Q的真值全是T当且仅当命题$P\wedge Q$的真值是T。

表1-1.2说明了联结词合取的定义。

表1-1.2　合取的真值表

P	Q	$P\wedge Q$	P	Q	$P\wedge Q$
F	F	F	0	0	0
F	T	F	0	1	0
T	F	F	1	0	0
T	T	T	1	1	1

① 在第五章中，将给出关于n元运算的确切定义。

例1. 试生成下列命题的合取：

P：我们去植树。

Q：房间里有一架电视机。

解：我们去植树与房间里有一架电视机。

例2. 将下列命题变换成符号形式的命题：

张明与李华在吃饭。

解：为了写成两个命题的合取，首先把上述命题改写成：

张明在吃饭与李华在吃饭。

再把两个原子命题分别表示成：

P：张明在吃饭。

Q：李华在吃饭。

于是，可把给定命题写成符号形式的命题$P\wedge Q$。

在日常语言中，常把合取"与"用于具有某种关系的两个命题之间；但是，在逻辑学中，则不然，完全允许用两个相互无关的原子命题，生成新的命题。例如，可以用原子命题"今天下大雨"和"三加三等于六"，生成新的命题：

今天下大雨与三加三等于六。

不难看出，所生成的命题是平淡无味的，但在逻辑学中却是允许的。

不难理解，可把符号$\wedge$看成是现代汉语中联结词"与"、"和"、"并"等词的翻译。然而，在现代汉语中，有时却又在各种不同的意义上使用联结词"与"，因此，不能一概用符号$\wedge$去翻译它们。为了说明这种区别，试考察命题：

(1)苹果是红的与香蕉是黄的。

(2)他打开箱子，并拿出一件衣服来。

(3)张小明与张小华是堂兄弟。

命题(1)中的合取“与”，和符号$\wedge$具有同样的意义。在命题(2)中，“拿出一件衣服来”所描述的行动，是发生在“他打开箱子”所描述的行动之后。因此，字词“并”是“于是”的意思，它与合取“与”的意义不同。命题(3)中的字词“与”不是一个合取“与”。就命题P和Q而论，由定义可知合取是对称的。也就是说，给P和Q指派真值，$P\wedge Q$和$Q\wedge P$的真值相同。因此，如果把命题(1)改写成：

香蕉是黄的与苹果是红的，

则不会改变该命题的真值。另一方面，绝不可以把命题(2)改写成：

拿出一件衣服来与他打开箱子。

这些实例表明，符号$\wedge$具有特定的意义。可以看出，在联结两个命题从而生成新的命题这个意义上说，合取是一个二元运算。

还有一个常用的联结词是析取，用符号$\vee$表示它。

定义1-1.3 给定两个命题P和Q。命题$P\vee Q$，读作“P或Q”。P和Q的真值全是F当且仅当命题$P\vee Q$的真值是F。

表1-1.3 析取的真值表

P	Q	$P\vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

P	Q	$P\vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表1-1.3说明了联结词析取的定义。

例3. 设原子命题P和Q分别为：

P：我选修人工智能。

Q：我选修算法理论。

试生成P和Q的析取。

解： P和Q的析取$P \vee Q$可表述成：

我选修人工智能或选修算法理论。

由析取联结词的定义可以看出，联结词$\vee$的意义并不总是和字词“或”的意义相同。在现代汉语中，联结词“或”实际上有“可兼或”和“排斥或”之分，“或”可用作“可兼或”或者“排斥或”。为了说明这种区别，试考察下列命题：

(1)灯泡有故障或开关有故障。

(2)通过电视看杂技或到剧场看这场杂技。

在命题(1)中，或者灯泡有故障，或者开关有故障，或者二者都有故障。这里的“或”，显然是指“可兼或”。命题(2)中的联结词“或”，是在排斥的意义上使用的。也就是说，存在一种可能性或者另一种可能性，但二者不能同时存在。这是说，或者在家里通过电视看杂技，或者是到剧场去看同一场杂技；但是，同一个人是不可能既在家里同时又在剧场。联结词“排斥或”，有时也称为“异或”。本书中，用符号$\overline{\vee}$表示“异或”，并在表1-1.4中给出了“异或”的定义。

比较表1-1.3和表1-1.4之后能够看出，析取的定义不同于“异或”的定义，显然，联结词$\vee$是“可兼或”。

在日常语言中，通常是在具有某种关系的两个命题之间