

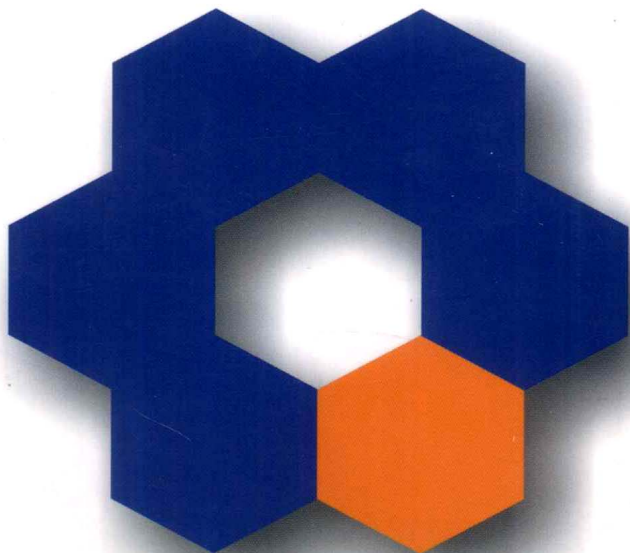
Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题集题解

(四)

费定晖	周学圣	编演
郭大钧	邵品琮	主审



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

(四)

费定晖	周学圣	编演
郭大钧	邵品琮	主审

山东科学技术出版社

Б.П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解
(四)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

*

山东科学技术出版社出版
(济南市玉函路16号 邮编250002)
山东科学技术出版社发行
(济南市玉函路16号 电话2064651)
山东旅游印务总公司印刷

*

787mm×1092mm 32开本 17印张 406千字

2003年2月第2版第14次印刷

印数: 221901—229900

ISBN 7—5331—0102—2
O·8 定价: 15.50元

出版说明

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自 50 年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,单变量函数的微分学,不定积分,定积分,级数,多变量函数的微分学,带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书 4462 题的所有解答汇编成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄

本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有周家云同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

图书在版编目(CIP)数据

Б.П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 (4)/费定
晖编. —2 版. —济南:山东科学技术出版社,1999.9
(2003.2 重印)

ISBN 7-5331-0102-2

I .Б… II .费… III .数学分析—高等学校—解题
IV .017—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43958 号

目 录

第五章 级 数	1
§ 1. 数项级数. 同号级数收敛性的判别法	1
§ 2. 变号级数收敛性的判别法	70
§ 3. 级数的运算	119
§ 4. 函数项级数	131
§ 5. 幂级数	216
§ 6. 福里叶级数	333
§ 7. 级数求和法	388
§ 8. 利用级数求定积分之值	439
§ 9. 无穷乘积	451
§ 10. 斯特林格公式	507
§ 11. 用多项式逼近连续函数	511

第五章 级数

§ 1. 数项级数. 同号级数收敛性的判别法

1° 一般概念 对于数项级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a^n, \quad (1)$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (级数的和)

存在, 式中 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则称级数(1)为收敛的. 反之, 则称级数(1)为发散的.

2° 哥西准则 级数(1)收敛的充分且必要的条件为对于任何的 $\epsilon > 0$, 都存在有数 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \epsilon$$

成立.

特别是, 若级数收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

3° 比较判别法 I. 设除级数(1)外, 还有级数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots. \quad (2)$$

若当 $n \geq n_0$, 不等式

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

成立, 则 1) 从级数(2)收敛可推得级数(1)收敛; 2) 从级数(1)发散可推得级数(2)发散.

特别是,当 $n \rightarrow \infty$ 若 $a_n \sim b_n$, 则正项级数(1)和(2)同时收敛或同时发散.

4° 比较判别法 II. 设

$$a_n = O * \left(\frac{1}{n^p} \right) \text{ ①},$$

则(a)当 $p > 1$ 时级数(1)收敛, (б)当 $p \leq 1$ 时级数(1)发散.

5° 达朗伯判别法 若 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$ 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

则(a)当 $q < 1$ 时级数(1)收敛, (б)当 $q > 1$ 时级数(1)发散.

6° 哥西判别法 若 $a_n \geq 0 (n=1, 2, \dots)$ 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

则(a)当 $q < 1$ 时级数(1)收敛, (б)当 $q > 1$ 时级数(1)发散.

7° 拉阿伯判别法 若 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$ 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p,$$

则(a)当 $p > 1$ 时级数(1)收敛, (б)当 $p < 1$ 时级数(1)发散.

8° 高斯判别法 若 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$ 及

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

式中 $|\theta_n| < C$ 而 $\varepsilon > 0$, 则(a)当 $\lambda > 1$ 时级数(1)收敛, (б)当 $\lambda < 1$ 时级数(1)发散; (в)当 $\lambda = 1$ 时, 若 $\mu > 1$ 则级数(1)收敛; 若 $\mu \leq 1$ 则级数(1)发散.

9° 哥西积分的判别法 若 $f(x) (x > 0)$ 是非负的不增函数, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

① 记号 O^* 的意义参阅第一章 § 6, 1°.

与积分

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

同时收敛或同时发散。

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和：

$$2546. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \cdots.$$

解 由于

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{(-1)^n}{2^n}}{1 + \frac{1}{2}},$$

故得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

即所给级数收敛, 且其和为 $\frac{2}{3}$. (以下有关各题省略这两句话)

$$2547. \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) + \cdots.$$

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

$$2548. \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} + \cdots.$$

解 由于

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n},$$

从而有

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{2n-3}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

并且

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + 1 + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right], \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

$$2549. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots.$$

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

$$2550. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$$

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right), \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

$$2551. (a) q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \cdots + q^n \sin n\alpha + \cdots \quad (|q| < 1);$$

$$(b) q \cos \alpha + q^2 \cos 2\alpha + \cdots + q^n \cos n\alpha + \cdots \quad (|q| < 1).$$

解 令 $z = q(\cos \alpha + i \sin \alpha) = qe^{i\alpha}$, 其中 $i = \sqrt{-1}$.

于是得 $|z| = |q| < 1$, 并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha + i \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha \quad (1)$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} z^n &= \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-q\cos\alpha - i q\sin\alpha} \\ &= \frac{(1-q\cos\alpha) + i q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

比较(1)、(2)两式的实部及虚部, 即得

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin \alpha = \frac{q \sin \alpha}{1 - 2q \cos \alpha + q^2};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos \alpha - 1$$

$$= \frac{1 - q \cos \alpha}{1 - 2q \cos \alpha + q^2} - 1 = \frac{q \cos \alpha - q^2}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}.$$

$$2552. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) \\ &\quad + (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) + (\sqrt{6} - 2\sqrt{5} \\ &\quad + \sqrt{4}) + \cdots + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \\ &= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = 1 - \sqrt{2} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}, \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \sqrt{2}.$$

$$2553. \text{研究级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \text{ 的收敛性.}$$

解 记 $x = k\pi$. 若 k 为整数, 则由 $\sin nx = 0$ 知级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 是收敛的, 且其和为零. 若 k 非整数, 我们以下

将证 $\sin nx$ 并不趋于零, 于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 发散. 可采用反证法. 假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx = 0,$$

则当 $n \rightarrow \infty$ 时也有 $\sin(n+1)x \rightarrow 0$. 但是

$$\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x,$$

由 $\sin(n+1)x \rightarrow 0$ 及 $\sin nx \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时) 知 $\cos nx \sin x \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 而 $\sin x = \sin k\pi \neq 0$, 故必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos nx = 0.$$

但

$$1 = \sin^2 nx + \cos^2 nx.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 两端取极限, 即得左端为 1 而右端为 0, 这就产生了 1 与 0 相等的谬论. 这个矛盾证明了此假设不真, 也即 $\sin nx \not\rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 的发散性获证.

2554. 证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则把该级数的项经过组合而不变更其先后次序所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ 其中 } A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i (p_1 = 1, p_1 < p_2 < \cdots)$$

也收敛且有相同的和. 反之不真. 举出例子.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的部分和叙列为

$$l_1, l_2, \dots, l_n, \dots,$$

$$\text{则 } l_n = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^{p_{n+1}-1} a_i.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故其部分和叙列 $\{S_n\}$ 趋于定值 S . 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{p_{n+1}-1} = S,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 是收敛的, 且与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的和.

反之不真. 例如, 级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

是发散的, 但按下述方法组成的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

却是收敛的.

2555. 证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项是正的, 而把这级数的项经过组合而得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 则原来的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 记其和为 S . 考虑原级数的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 并注意到 $a_k > 0 (k = 1, 2, \dots)$, 故存在 n_0 , 使

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{l=1}^{n_0} A_l < S.$$

显然 $S_n < S_{n+1}$ 对一切 n 成立. 于是, $\{S_n\}$ 单调上升且有界. 因此, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在有限, 即原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

研究下列级数的收敛性:

2556. $1-1+1-1+1-1+\cdots$.

解 由于通项 $a_n = (-1)^{n-1}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限不存在, 更不可能趋于零, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 发散.

2557. $0.001 + \sqrt{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \cdots$.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0.001} = 1 \neq 0,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0.001}$ 发散.

$$2558. \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) - 1 = e - 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛, 且其和为 $e - 1$.

$$2559. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots.$$

解 由于 $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} > 0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \text{ 也发散.}$$

$$2560. \frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \cdots + \frac{1}{1000n+1} + \cdots.$$

解 由于 $\frac{1}{1000n+1} \geq \frac{1}{1001n}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1001n}$ 发散,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$ 也发散.

$$2561. 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \cdots + \frac{n}{2n-1} + \cdots.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ 发散.

$$2562. 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots.$$

解 由于 $0 < \frac{1}{(2n-1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 也收敛.

$$2563. \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \cdots.$$

解 由于 $0 < \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ 也收敛.

$$2564. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \cdots.$$

解 由于 $\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} > \frac{1}{2n} > 0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$ 也发散.

2565. 证明, 由等差级数各项的倒数组成的级数是发散的.

证 设等差级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} [a + (n-1)d]$, 其中 d 为公差.

当 $d > 0$ 时, 总存在正整数 n_0 , 使 $a < (n_0-1)d$,
则当 $n \geq n_0$ 时, 总有 $a + (n-1)d < 2(n-1)d$. 于是,

$$\frac{1}{a + (n-1)d} > \frac{1}{2(n-1)d} > \frac{1}{2nd} > 0,$$

注意到级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2nd}$ 发散, 因而级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{a + (n-1)d}$

发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + (n-1)d}$ 也发散.

当 $d=0$ 时, a 不可能为零, 此时级数 $\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \cdots$