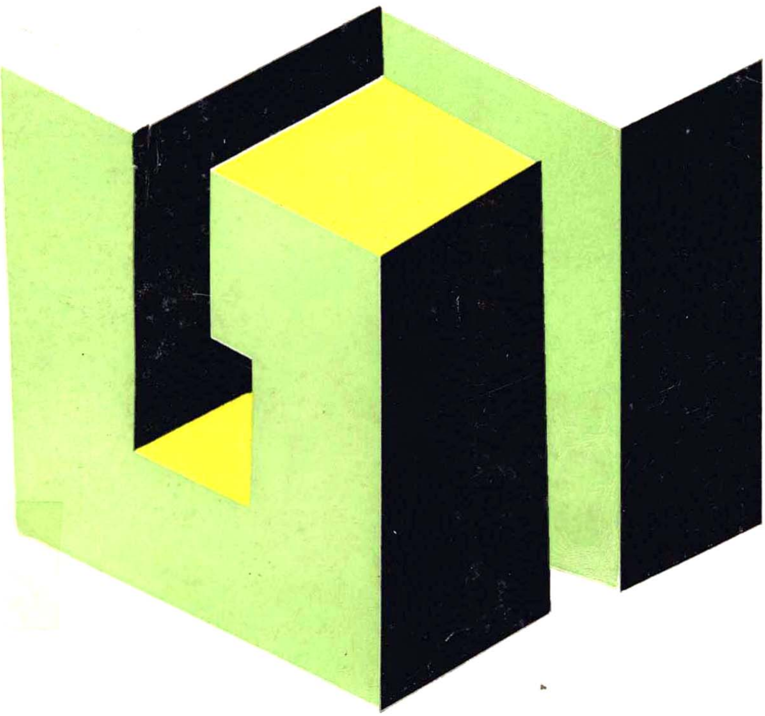
概率论与数理统计及在教育领域中的应用

配套教学参考书

梁　琼　黄江平　王岳宝
张春泳　张映姜　吴克俭
编　写



中国华侨出版社

高等师范院校数学专业试用教材

概率论与数理统计

及在教育领域中的应用

配套教学参考书

梁　琼　黄江平　王岳宝
张春泳　张映姜　吴克俭
编写

中国华侨出版社

（京）新登字 190 号

图书在版编目（CIP）数据
（中国文学星光丛书/郑竹青主编）
概率论与数理统计/王岳宝主编/北京．中国华侨出版社 1996.12
ISBN 7－80120－074－8

Ⅰ．概…Ⅱ．王…Ⅲ．中国教育—现代综合选集Ⅳ．Z124.I212
中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）12064 号

书　　名/概率论与数理统计—及其在教育领域中的应用
　　　　配套教学参考书
著　　者/王岳宝主编
出版发行/中国华侨出版社
　　　　（北京朝阳区西坝河东里 77 号楼底商 5 号）
经　　销/新华书店
印　　刷/新文化印刷厂
开　　本/850×1168 毫米　1/32
印　　张/8.82
字　　数/184 千字
版　　次/1996 年 12 月第一版
印　　次/1996 年 12 月第一次印刷
印　　数/1000 册
书　　号：ISBN 7－80120－074－8/G344.3
定　　价：16.00 元

内容提要

本书是与教材《概率论与数理统计及在教育领域中的应用》配套的教学参考书。本书分三部分：教材各章内容提要及习题解答，初等概率解题方法漫谈和微型计算器的使用。

本书可以作为高等师范院校数学专业本、专科概率统计课程，或者其它专业，其它院校概率统计课程的教学参考资料，也可以供师生作为概率课外活动小组的参考资料。

编 者 的 话

时有学生谈到，概率统计的题目难作. 从某种意义上讲，这是正常的. 从小学到大学，学生基本上学习的是必然现象的规律性，现在乍一接触偶然现象的规律性，是需要一段适应过程的，如何缩短这一过程，也只有在熟悉基本概念的基础上，多做题目多总结而已.

为了帮助学生缩短适应的过程，学好概率统计课，也为了方便教师备课，我们编写了这本与教材配套的教学参考书. 本书分三个部分：教材各章的内容提要及习题解答，初等概率解题方法漫谈及微型计算器的使用.

我们希望第一部分有助于学生明确各章的重点并对所学知识有一个系统的认识. 我们也希望学生能在独立完成作业的基础上，再对照第一部分的习题解答，进行比较对照，提高解题能力. 部分学有余力又有兴趣的学生在完成作业的基础上可以阅读第二部分，它或许有助于学生系统掌握解题方法，培养和提高自己发现问题和解决问题的能力. 最后，由于概率统计在现阶段的运算大多只要用到小型计算器，而中小学也在普及小型计算器的应用，所以我们编写了第三部分.

本书对一些问题的解答怕不是最佳的，有些讨论未必深刻，错误之处也在所难免，我们衷心希望广大使用本书的师生提出宝贵的批评和意见.

本书第一部分由参编者全体编写，第二部分由王岳宝编写，第三部分由张春泳编写.

目　　录

第一部分　内容提要和习题解答 …………………… (1)

第一章　随机事件及其概率…………………… (1)

(一)内容提要 …………………… (1)

(二)习题解答 …………………… (3)

第二章　随机变量及其概率分布…………………… (31)

(一)内容提要 …………………… (31)

(二)习题解答 …………………… (35)

第三章　随机变量的数字特征…………………… (75)

(一)内容提要 …………………… (75)

(二)习题解答 …………………… (81)

第四章　大数定律和中心极限定理 …………………… (116)

(一)内容提要 …………………… (116)

(二)习题解答 …………………… (119)

第五章　数理统计的基本概念 …………………… (130)

(一)内容提要 …………………… (130)

(二)习题解答 …………………… (133)

第六章　点估计 …………………… (143)

(一)内容提要 …………………… (143)

(二)习题解答 …………………… (147)

第七章　假设检验 …………………… (159)

(一)内容提要 …………………… (159)

(二)习题解答 …………………… (166)

第八章　方差分析 …………………… (195)

(一)内容提要 …………………… (195)

(二)习题解答 …………………… (198)

第九章　回归分析 …………………… (210)

(一)内容提要 …………………………………… (210)
(二)习题解答 …………………………………… (213)
第二部分　初等概率解题方法漫谈 …………… (231)
第三部分　袖珍电子计算器的使用 …………… (257)
附表 ………………………………………………… (277)
表 1　二项分布 $P(X \leqslant x)=\sum_{k=0}^{x}\binom{n}{k}P^{k}(1-P)^{n-k}$
的数值表 ……………………………………… (277)
表 2　普阿松分布 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^{K}}{K!}e^{-\lambda}$的数值表
…………………………………………………… (287)
表 3　正态分布函数 N(0,1)的数值表 ……… (289)
表 4　χ^2－检验的临界值表 ……………… (291)
表 5　F 检验的临界值表 ……………………… (293)
表 6　T 检验的临界值表 ……………………… (305)
表 7　符号检验表 ……………………………… (306)
表 8　秩和检验表 ……………………………… (307)
表 9　符号秩次检验表 ………………………… (308)
参考书目 …………………………………………… (309)

第一部分　内容提要与习题解答

第一章　随机事件及其概率

(一) 内容提要

1　概率空间

称三元总体$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间,其中

(1)　样本空间Ω是随机试验E的一切可能结果,即样本点的全体组成的集合.

(2)　σ域$\mathscr{F}$是Ω的某些子集组成的集类,满足条件:

1°　$\Omega\in\mathscr{F}$;　2°　若$A\in\mathscr{F}$,则$\bar{A}\in\mathscr{F}$;　3°　若$A_n\in\mathscr{F}$, $n=1,2,\cdots$,则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

称$\mathscr{F}$中的元$A,B,C,\cdots$为随机事件,简称事件.

(3) 概率P是定义在$\mathscr{F}$上的事件的函数,满足条件:

1°　$P(A)\geqslant 0, A\in\mathscr{F}$;　2°　$P(\Omega)=1$;　3°　若$A_n\in\mathscr{F}$, $n=1,2,\cdots$,且两两互斥,则$P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)$.

2　事件间的相互关系

(1)　两个事件A和B之间有包含,相等,互斥,互逆的关系.

(2)　两个事件A和B之间还有并(和)、交(积)、差的运算关系.这些运算都是集合的运算,满足集合运算的运算律,如交换律,

结合律，分配律及对偶律等.

(3) 两个事件 A 和 B 之间，当 $P(AB) = P(A)P(B)$ 时，称 A 与 B 相互独立.

互斥，互逆及相互独立都是不同的关系，两个事件间的运算及相互独立性均可推广到有限个事件，可列个事件，甚至一族事件中去.

3　概率的性质

(1)　$P(\Phi) = 0$;

(2)　若 $A_i \in \mathscr{F}; i = 1,\cdots,n$　且两两互斥，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$;

(3)　$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

(4)　若 $A \subset B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$;

(5)　若 $P(B) > 0$，称 $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为在事件 B 发生的条件下事件 A 的条件概率. 条件概率同样满足概率的 3 个基本要求.

4　概率的基本公式

(1)　乘法公式：若 $A_i \in \mathscr{F}, i = 1,\cdots,n$，则

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)\cdots P(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

(2)　加法公式：若 $A_i \in \mathscr{F}, i = 1,\cdots,n$，则

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

(3)　全概率公式：若 $A_i \in \mathscr{F}, i = 1,2,\cdots$，且是 Ω 的一个分割（完备事件组），又 $P(A_i) > 0, i = 1,2,\cdots$　则对任 $B \in \mathscr{F}$,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

(4) 贝叶斯公式：若 $A_i \in \mathscr{F}, i = 1,2,\cdots$ 且是 Ω 的一个分割，又 $P(A_i) > 0, i = 1,2,\cdots$ 则对任 $B \in \mathscr{F}$，只要 $P(B) > 0$，有

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(A_i)P(B \mid A_i)}.$$

5 基本概型

(1) 古典概型，指满足下列条件的随机试验：

1° 样本空间 Ω 只有有限个点；

2° $\mathscr{F}$ 是 Ω 的全体子集组成的 σ 域；

3° $P(A) = \dfrac{\# A}{\# \Omega}, \quad A \in \mathscr{F}.$

(2) 几何概型，指满足下列条件的随机试验：

1° 样本空间 Ω 是 $R^n, n = 1,2,\cdots$ 中的一个测度非零的区域；

2° $\mathscr{F}$ 是 Ω 中的一切子区域组成的 σ 域；

3° $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \quad A \in \mathscr{F}.$

(3) 贝努里概型，指满足下列条件的随机试验：

1° 做 n 次重复独立试验；

2° 每次试验只有或只关心两个结果 A 及 $\bar{A}$，且 $P(A) = p$.

这时，

$$P(\{A \text{ 发生 } k \text{ 次}\}) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0,1,\cdots,n, q = 1 - p.$$

(二) 习题解答

1.1 写出下列随机试验的样本空间及表示下列事件的样本点集合：

(1) 一个口袋中有2个白球，3个黑球和4个红球，从中任取一球，(ⅰ) 得白球；(ⅱ) 得红球；(ⅲ) 得黑球.

(2) 6件产品中有2件是不合格品，从中任取2件；(ⅰ) 恰有

1 件为不合格品；(ⅱ) 两件均为不合格品；(ⅲ) 两件均为合格品.

解 (1) 设白球为 1 - 2 号，黑球为 3 - 5 号，红球为 6 - 9 号，则

$$\Omega = \{i : i = 1,\cdots,9\},$$

$$\{任取一个得白球\} = \{1,2\},$$

$$\{任取一个得红球\} = \{6,7,8,9\},$$

$$\{任取一个得黑球\} = \{3,4\}.$$

(2) 将 6 件产品分别编号为 1,…,6，其中 5 - 6 为不合格品，则

$$\Omega = \{i,j: 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 6,\}$$

$$\{任取两件，恰有一件为不合格品\}$$
$$= \{(i,j) : i = 1,2,3,4, j = 5,6\};$$

$$\{任取两件，均为不合格品\}$$
$$= \{(5,6),(6,5)\};$$

$$\{任取两件，均为合格品\}$$
$$= \{(i,j) : 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4\}.$$

1.2 将一枚硬币抛三次，写出这一随机试验的样本空间，样本空间的点数，样本空间的全体子集数.

解 设 1 = "出现正面"，0 = "出现反面"，则

$$\Omega = \{(i_1, i_2, i_3) : i_j = 0,1, j = 1,2,3\},$$

$$\# \Omega = 2^3 = 8, \qquad 2^{\Omega} = 2^8.$$

1.3 在数学系的学生中任选一个学生，令 A = {被选学生是男生}，B = {被选学生是三年级学生}，C = {被选学生是运动员}.

(1) 叙述事件 $A \cap B \cap \bar{C}$ 的概率意义.

(2) 在什么条件下 $A \cap B \cap C = C$ 成立？

(3) 什么时候关系式 $C \subset B$ 是正确的？

(4)　什么时候 $\bar{A} = B$ 成立?

解　(1)　$A \cap B \cap \bar{C} = \{$被选学生是三年级的男生但不是运动员$\}$.

(2)　当且仅当 $A \cap B \supset C$ 时,即运动员全在三年级男生中时,$A \cap B \cap C = C$.

(3)　当且仅当运动员全在三年级时,$C \subset B$.

(4)　当女生全在三年级且三年级全是女生时 $\bar{A} = B$.

1.4　一个工人生产了 n 个零件,设 $A_i = \{$第 i 个零件是合格品$\}$, $i = 1,\cdots,n$. 用 $A_i, i = 1,\cdots,n$ 表示下列事件:

(1) 没有一个零件是不合格品;

(2) 至少有一个零件是不合格品;

(3) 仅仅只有一个零件是不合格品;

(4) 至少有两个零件不是不合格品.

这四个事件两两之间有什么关系?

解　设这四个事件为 A,B,C,D. 则

(1)　$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$;

(2)　$B = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$;

(3)　$C = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i \cap \left(\bigcap_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} A_j \right)$;

(4)　$D = \bigcup_{1 \le i \le j \le n} A_i \cap A_j$.

其中 A 与 B 是互逆关系,A 与 C 是互斥关系,余为相容关系.

1.5　证明下列各式:

(1)　$A \cup B = A \cup (B - A) = A \cup (B - (A \cap B))$;

(2)　$A - B = A - (A \cap B) = A \cap \bar{B}$;

(3)　$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} =$;

(4)　$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

证明 只证(3)，余类似.

设 $\omega \in \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i}$，则 $\omega \notin \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，反设 $\omega \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$，则 $\omega \notin \overline{A_i}, i = 1, \cdots, n$，即 $\omega \in A_i, i = 1, \cdots, n$，亦即 $\omega \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 矛盾，故必有 $\omega \in \bigcup\limits^{n} \overline{A_i}$.

另一方面，设 $\omega \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$，反设 $\omega \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$，则 $\omega \notin \overline{A_i}, i = 1, \cdots, n$，即 $\omega \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$，矛盾，从而 $\omega \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，即 $\omega \in \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}$.

综上所述，$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

1.6 在100件产品中有10件废品，10件次品，余全为正品.现从中任取3件，试求其中有2件正品，1件废品的概率.

解 设所求事件为 A，则

$$P(A) = \frac{C_{80}^{2} \cdot C_{10}^{1}}{C_{100}^{3}} .$$

1.7 一部四卷的文集，按任意次序放到书架上，问各卷自左向右或自右向左的卷号次序恰为1,2,3,4的概率是多少?

解 设所求事件为 A，则

$$P(A) = \frac{2}{P_{10}^{4}} .$$

1.8 一幢10层楼的楼房中的一架电梯，在底层登上7位乘客，电梯每一层都停，乘客从第二层起离开电梯，假设乘客在哪一层离开电梯是等可能的，求没有两位及两位以上乘客在同一层离开的概率.

解 设 A 为所求事件，则

$$P(A) = \frac{C_9^7 7!}{9^7} .$$

1.9 某市共有10^4辆自行车，其牌号从00000到9999，求{偶然

遇到的一辆自行车,其牌号中有数字 8} 这一事件的概率.

解 设该事件为 A,则

$\overline{A}$ = {偶然遇到的一辆自行车,其牌号中没有数字 8}. 因

$$P(\overline{A}) = \frac{9^4}{10^4},$$

故

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^4.$$

1.10 在中国象棋的棋盘上任意放上一只红"车"及一只黑"车",求它们正好可以互相"吃掉"的概率.

解一 设所求事件为 A,则红"车"有 90 种占位法,黑"车"有 89 种占位法,故 $\# \Omega = 90 \times 89$. 它们能相互"吃掉"必须在同一行或同一列中:在同一行中红"车"有 9 种占法,黑"车"对应有 8 种占法,行的选择有 10 种,共有 $10 \times 9 \times 8$ 种占法;在同一列中红"车"有 10 种占法,黑"车"对应有 9 种占法,列的选择有 9 种,共有 $9 \times 10 \times 9$ 种占法. 从而 $\# A = 10 \times 9 \times 8 + 9 \times 10 \times 9$,于是

$$P(A) = \frac{10 \times 9 \times 8 + 9 \times 10 \times 9}{90 \times 89} = \frac{17}{89}.$$

解二 任意固定红"车"的位置,黑"车"可占 $9 \times 10 - 1 = 89$ 个位置,故 $\# \Omega = 89$. 当黑"车"处于与红"车"同行或同列的 $9 + 8 = 17$ 个位置时它们可以互相"吃掉",故 $\# A = 17$. 于是

$$P(A) = \frac{17}{89}.$$

1.11 任取一正整数,求下列事件的概率:

(1) 该数的平方的末位数是 1;

(2) 该数的四次方的末位数是 1;

解 (1) 设所求事件为 A. 一数的平方的末位数取决于该数的末位数,故 $\# \Omega = 10$. 只有末位数为 1 和 9 的数的平方末位数

仍为 1,故 $\# A = 2$.从而

$$P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad .$$

(2) 设所求事件为 B,类似于(1),$\# \Omega = 10$;又该数末位数为 1,3,7 或 9 时,其四次方的末位数为 1,即 $\# B = 4$,从而

$$P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad .$$

1.12* 一个人把 6 根草紧握在手中,仅露出它们的头和尾.然后请另一个人把 6 个头两两相接,6 个尾也两两相接,求放开手以后 6 根草恰巧连接成一个环的概率.若是 $2n$ 根草情况又如何?

解一 设 A_{2n} 为所求事件.当 $n = 3$ 时,取定一个头,它可与其它 5 个头之一相连,再取一个头,它又可与其它 3 个头之一的相连,最后将剩下的两根相连,故对头而言有 $5 \times 3 \times 1$ 种连法,同样对尾也有 $5 \times 3 \times 1$ 种连法,所以 $\# \Omega = (5 \times 3 \times 1)^2$.在有利事件 A_3 中,对头而言仍有 $5 \times 3 \times 1$ 件连法,但对尾而言,任取一尾,它只能与和它的头未连的另 4 根草连接,再任取另一尾,它又只能和未与自己的头相连的另 2 根草的尾相连,最后再将剩余的尾相连,共有 4×2 种连法,即 $\# A_3 = 5 \times 3 \times 1 \times 4 \times 2$.于是

$$P(A_3) = \frac{5 \times 3 \times 1 \times 4 \times 2}{(5 \times 3 \times 1)^2} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3 \times 1} = \frac{8}{15} \quad .$$

解二 无论头如何连接,尾共有 $5 \times 3 \times 1$ 种连法;即 $\# \Omega = 5 \times 3 \times 1$.这时尾能连成环的方法 4×2 种,即 $\# A_3 = 4 \times 2$,故

$$P(A_3) = \frac{4 \times 2}{5 \times 3 \times 1} = \frac{8}{15} \quad .$$

类似地可知

$$P(A_{2n}) = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \quad .$$

1.13 某公共汽车站每隔五分钟有一辆汽车到达,乘客到达

汽车站的时刻是任意的，求一个乘客候车时间不超3分钟的概率.

解 设 A 为所求事件，x 为乘客到站时刻，则

$$\Omega = \{x : x \in [0,5]\}, \qquad \mu(\Omega) = 5 \quad ;$$

$$A = \{x : x \in [2,5]\}, \qquad \mu(A) = 3 \quad .$$

故

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{3}{5} \quad .$$

1.14 **两艘轮船都要停靠同一个泊位，它们可能在一昼夜的任意时刻到达，设两船停靠泊位的时间分别为1小时与2小时，求有一艘船停靠泊位时必须等待一段时间的概率.**

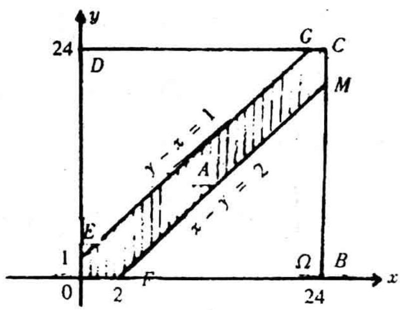
$$\Omega = \{(x,y) : 0 \leqslant x, y \leqslant 24\}, \quad \mu(\Omega) = 24^2;$$

$$A = \{(x,y) \in \Omega : 0 \leqslant x - y \leqslant 2 \text{ 或 } 0 \leqslant y - x \leqslant 1\}$$

$$\mu(A) = 24^2 - \frac{1}{2} \times 23^2 - \frac{1}{2} \times 22^2 \quad (\text{如图})$$

从而

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = 1 - \frac{23^2 + 22^2}{2 \times 24^2} \doteq 0.121 \quad .$$



1.15* 设 $\odot O$ 半经为 r，在下列不同的随机试验中，求事件{在 $\odot O$ 内由任作一弦 AB，其长度 l 大于 $\sqrt{3}r$} 的概率.

E_1：在 $\odot O$ 内任取一点作为弦 AB 的中点；

E_2：将 A 固定在 $\odot O$ 的圆周上，在圆周上再任取一点作为弦 AB 的另一端点 B；

E_3：在 $\odot O$ 的某一直径 EF 上任取一点作为弦 AB 的中点.

解　设三个试验中样本空间分别是 Ω_i，所求事件分别是 A_i，$i = 1,2,3$.

E_1：设弦 AB 中点的坐标为 (x,y)，则

$$\Omega_1 = \{(x,y): x^2 + y^2 \leqslant r^2\}, \quad \mu(\Omega_1) = \pi r^2.$$

如图 1，当且仅当 (x,y) 落入以 $\frac{r}{2}$ 的半径的同心圆 $\odot O'$ 中时，以 (x,y) 为中点的弦 AB 的长度 $l > \sqrt{3}r$，故

$$A_1 = \left\{(x,y): x^2 + y^2 \leqslant \left(\frac{r}{2}\right)^2\right\}, \quad \mu(A_1) = \pi\left(\frac{r}{3}\right)^2,$$

从而

$$P(A_1) = \frac{\mu(A_1)}{\mu(\Omega_1)} = \frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4} \quad .$$

E_2：设 A 点的极坐标为 $(r,0)$，B 点的极坐标为 (r,θ)，则

$$\Omega_2 = \{(r,\theta): \theta \in [0,2\pi]\}, \quad \mu(\Omega_2) = 2\pi \quad .$$

如图 2，当且仅当 (r,θ) 在 $\overset{\frown}{ED}$ 上时，AB 的长度 $l > \sqrt{3}r$，其中 E、F 的极坐标分别为 $(r,\frac{2}{3}\pi)$ 及 $(r,\frac{4}{3}\pi)$. 即

$$A_2 = \left\{(r,\theta): \theta \in \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right)\right\}, \quad \mu(A_2) = \frac{2}{3}\pi \quad .$$

从而

$$P(A_2) = \frac{\mu(A_2)}{\mu(\Omega_2)} = \frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi} = \frac{1}{3} \quad .$$

E_3：设 $\odot O$ 的直径 EF 在 x 轴上，O 为原点，设 x 为 AB 的中点 M 的坐标，则

$$\Omega_3 = \{x: x \in [-r,r]\}, \quad \mu(\Omega_3) = 2r \quad .$$

如图 3，显然当 M 在线段 GH 内时，AB 的长度 $l > \sqrt{3}r$，其中 G 的坐