高等学校教材

EXERCISES COURSE OF

高等数学习题课教程

HIGHER MATHEMATICS

-2 0 1 2 3 · · · · · · · · · ·

（第2版）

彭斯俊 主编

武汉理工大学出版社
WUTP Wuhan University of Technology Press

高等数学习题课教程

（第2版）

主　编　彭斯俊
副主编　陈晓江　杨爱芳
主　审　张小柔

武汉理工大学出版社

内 容 提 要

本书是按照理工科高等数学课程的基本要求和通用教材的顺序编写的。全书共24讲，并附有相关阅读材料和综合练习。每讲包括知识要点、疑难解析、典型例题、习题与答案。

本书是高等数学习题课教材，也可作为理工科大学生学习高等数学以及备考研究生的复习资料。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程/彭斯俊主编. —2版. —武汉：武汉理工大学出版社，2009. 11

ISBN 978-7-5629-3095-2

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 彭…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-习题　Ⅳ. O13-44

中国版本图书CIP数据核字(2009)第212944号

出版者：武汉理工大学出版社(武汉市武昌珞狮路122号　邮编：430070)

印刷者：武汉理工大印刷厂

发行者：武汉理工大学发行部

开　本：787×1092　1/16

印　张：23.25

字　数：580千字

版　次：2009年11月第2版

印　次：2010年3月第7次印刷

定　价：36.00元

前　言

高等数学习题课是高等数学课程的重要组成部分，加强高等数学习题课的教学是提高高等数学课程教学质量的重要环节。根据教育部批准制定的《高等数学课程教学基本要求》的精神，我们结合教学中的实践经验，在大量收集资料的基础上，集多年教学研究的成果编成此书。

全书共分 24 讲，每讲由以下部分构成。

一、知识要点——包含本讲的所有知识点，条理清晰，重点突出；部分知识点采取形象直观的讲解，容易接受和理解，有助于树立读者学好高等数学的信心。

二、疑难辨析——对学习中遇到的难点与似是而非的问题进行辨析，纠正常犯的错误，帮助读者更好地理解基本概念、公式、定理。

三、典型例题——着重对数学方法进行归纳总结，分析解题思路，揭示解题规律，引导读者思考问题，培养读者逻辑思维的能力以及分析问题和解决问题的能力。在大多数例题之后加以评注，开拓思路，以期达到举一反三的效果。

四、习题与答案——对习题进行选配时，我们遵循由浅入深、循序渐进的原则，分基础训练和综合提高两部分编制。综合提高部分纳入数学考研试题，具有一定的难度，能够增加读者的学习兴趣。

阅读材料和综合练习将全书整体上分为两个分部，而作为局部的每一部分都体现了学习的全过程，结构严谨；用清晰简明的语言表述较深刻的数学问题，书写流畅，方便读者自学；同时也为教师精讲习题课提供了非常有利的条件，从而完善整个高等数学的教学过程。

根据实际教学情况的反馈，我们在第一版的基础上进行了重新修订，特别是在例题和习题方面都做了较大程度的改进，使之更符合当前实际教学的需要。本书可作为高等理工科院校的高等数学习题课教材，也可作为理工科大学生学习高等数学的参考书，同时对于准备报考硕士研究生的广大考生，本书也是他们理想的应考复习资料。

本书由彭斯俊任主编，陈晓江、杨爱芳任副主编。参加第一版编写工作的有：彭斯俊、杨爱芳、陈晓江、刘道海、王梦东、朱慧颖等，参加第二版编写工作的有：彭斯俊、陈晓江、赵维锐、黄明芳、胡荣、薛琼、尹强、姜伟峰等。需要特别感谢的是吴传生教授、朱勇教授，他们为本书的出版倾注了大量心血。本书由张小柔教授主审，蔡新民教授、王卫华教授审阅了全稿，并提出了许多宝贵的意见。武汉理工大学出版社对本书的编审、出版给予了热情的支持，在此一并致谢！

由于编者水平所限，加之时间比较仓促，书中难免有不妥之处，诚请专家、同行、读者批评指正。

编　者
2009.10

目　录

1　极限的概念与计算

1.1　知 识 要 点

1.1.1　极限的概念

(1)数列的极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，总有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

(2)函数的极限

①$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

②$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3)单侧极限

① 左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$(或 $f(x_0-0)=A$)$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

② 右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$(或 $f(x_0+0)=A$)$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

1.1.2　极限的性质

(1)(极限的局部保号性)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且 $A>0$(或 $A<0$)，那么就存在着点 x_0 的某一去心邻域，当 x 落在该邻域内时，就有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

(2)如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant0$(或 $f(x)\leqslant0$)，而且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么 $A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$).

1.1.3　极限的运算法则

(1)极限的四则运算法则

如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

①$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim f(x)\pm\lim g(x)$.

②$\lim[f(x)\cdot g(x)]=AB=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$.

③$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\qquad(B\neq0)$.

(2)复合函数的极限运算法则

设函数 $u=\varphi(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在且等于 a，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，但在点 x_0 的某去心邻

域内 $\varphi(x)\neq a$，又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时的极限也存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$.

1.1.4 极限存在准则

准则Ⅰ （夹逼准则）设在点 x_0 的某邻域内（或 $|x|>M$）有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim g(x)=A$，$\lim h(x)=A$，那么 $\lim f(x)$ 存在且等于 A.

准则Ⅱ （单调有界准则）单调有界数列必有极限.

1.1.5 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

1.1.6 无穷小（量）与无穷大（量）

无穷小量是以零为极限的变量，但不能说无穷小量是很小的数，不能将变量混同于常数. 非零无穷小量的倒数为无穷大量，要注意无穷大量是没有极限的，$\lim f(x)=\infty$（$+\infty$ 或 $-\infty$）并不意味极限存在，只是一种记号.

1.1.7 函数极限与无穷小的关系

$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 为无穷小.

1.1.8 无穷小的运算性质

(1)有限个无穷小的代数和仍为无穷小.
(2)有限个无穷小的乘积仍为无穷小.
(3)无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小.

1.1.9 无穷小的比较

设 α,β 都是自变量在同一变化过程中的无穷小.

(1)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$.

(2)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是比 β 低价的无穷小.

(3)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c\neq 0$，则称 α 与 β 是同阶无穷小. 特别地，当 $c=1$ 时，称 α 与 β 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

(4)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta^k}=c\neq 0$（$k$ 为常数），则称 α 是 β 的 k 阶无穷小.

1.1.10 等价无穷小的代换

设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

常用的等价无穷小(当 $x\to0$ 时)：

(1) $\sin x\sim x$； (2) $\arcsin x\sim x$；

(3) $\tan x\sim x$； (4) $\arctan x\sim x$；

(5) $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$； (6) $e^x-1\sim x$；

(7) $\ln(1+x)\sim x$； (8) $(1+x)^\lambda-1\sim\lambda x(\lambda\neq0)$.

1.2 疑难辨析

【问题1】 在数列极限的定义中自然数 N 与正数 ε 是什么关系？N 是不是 ε 的函数？

【答】 在数列极限定义中，自然数 N 是根据不等式 $|x_n-a|<\varepsilon(\forall n>N)$ 确定的，所以 N 与 ε 有关，但不能说 N 是 ε 的函数. 这是因为，如果 N 是 ε 的函数，即 $N=f(\varepsilon)$，那么任意给定一个 ε，至多有有限个 N 满足不等式 $|x_n-a|<\varepsilon(\forall n>N)$. 但实际上不是这样的. 因为如果 N 使得不等式 $|x_n-a|<\varepsilon(\forall n>N)$ 成立，那么对于所有大于 N 的自然数 N_1，都有 $|x_n-a|<\varepsilon$ $(\forall n>N_1)$ 成立.

类似地，可以理解函数极限中正数 δ 与 ε 之间的关系.

【问题2】 数列极限与函数极限有什么关系？

【答】 数列极限与函数极限既有区别又有联系.

(1) 数列 $x_n=f(n)$ 的极限与函数 $y=f(x)$ 的极限是有区别的，它们之间的区别在于：数列 $x_n=f(n)$ 的自变量 n 的变化过程是间断的(只取正整数)，且只有一种变化过程 $n\to\infty$(即 $n\to+\infty$)；而函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 的变化过程是连续的，变化过程有六种：$x\to x_0$，$x\to x_0+0$，$x\to x_0-0$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$.

(2) 数列极限与函数极限之间也有一定的联系：

① 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 必定存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$；但当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 可以存在.

② (海涅定理) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对于任意数列 x_n，当 $x_n\to x_0$ 时都有 $f(x_n)\to A$.

【问题3】 无界量与无穷大量有什么区别？

【答】 首先需要指出的是，这里的无界量和无穷大量都是处在同一变化过程中的变量. 无穷大量一定是无界的，但无界变量不一定是无穷大量. 下面以数列为例解释这个问题.

称数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量，是指对于任意大的正数 M，都能够找到自然数 N，使得对于所有满足 $n>N$ 的自然数 n，$|x_n|>M$ 成立 . 也就是说，当 $n>N$ 之后，不可能再有任何的 n，使得 $|x_n|\leqslant M$.

称数列 $\{x_n\}$ 是无界的，则是另一种含义：对于任意大的正数 M，都存在自然数 n_0，使得 $|x_{n_0}|>M$. 但是在 $n>n_0$ 之后，还可能出现 $|x_n|\leqslant M$ 的情况.

例如数列 $\{n+(-1)^n\cdot n+1\}$ 是无界数列，但不是无穷大量.

【问题 4】 无穷多个无穷小之和是否仍是无穷小?

【答】 我们知道,有限多个无穷小之和仍然是无穷小,但是,把"有限多个"改为"无穷多个",结论就不一定成立了。我们可以从以下的三个例子中看出这一点.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}[1+2+\cdots+(n-1)]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^3}+\cdots+\frac{n-1}{n^3})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[1+2+\cdots+(n-1)]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=0.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^{3/2}}+\frac{2}{n^{3/2}}+\cdots+\frac{n-1}{n^{3/2}})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/2}}[1+2+\cdots+(n-1)]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=+\infty.$

【问题 5】 在求极限时,作为加减项的无穷小能否用与其等价的无穷小代换?

【答】 首先指出,在求极限的过程中,乘、除因子可以用与其等价的无穷小代替,这是以极限运算法则作为依据的. 但是,作为加减项的无穷小是不能随意用等价无穷小来代换的. 例如,考察$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$,分子中的两项 $\tan x$、$\sin x$ 都是与 x 等价的无穷小,但不能用 x 代替,否则就会得到错误的结果. 事实上,

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

1.3 典 型 例 题

1.3.1 求极限的基本方法

(1)利用极限四则运算法则求极限

极限四则运算法则本身比较简单,但在使用这些法则时首先要注意适用条件,即法则中参加运算的函数的极限都必须存在;其次要对函数作某些恒等变形或化简. 采用怎样的变形或化简,需要根据具体的算式确定. 常用的方法有分式的约分或通分,分式的分解,分子或分母的有理化,三角函数的恒等变形,某些求和公式与求积公式以及适当的变量替换等.

常见函数的极限:

① $\lim\limits_{x\to+\infty}a^{\frac{1}{x}}=1\quad(a>0)$

② $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0\quad(a>1)$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty\quad(a>1)$

④ $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0\quad(0<a<1)$

⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

⑥ $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

⑦ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arctan x=\pm\frac{\pi}{2}$

⑧ $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{k}{n}}=1\quad(k$ 为常数,$k>0)$

【例 1】 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

【分析】 此极限为$\dfrac{0}{0}$型未定式,须对分子有理化.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{x^2(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\dfrac{1}{4}$.

【例 2】 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\arctan x}{x-\cos x}$.

【分析】 此极限为$\dfrac{\infty}{\infty}$型,须先消去分子分母中的无穷大量,即将分子分母同除以 x.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}\arctan x}{1-\dfrac{1}{x}\cos x}=1$.

注 解题过程中用到了无穷小的性质,即“有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小”.

【例 3】 求极限$\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$.

【分析】 此极限为$\infty-\infty$型,将它化成$\dfrac{0}{0}$型再做处理.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-2}{x^2-x+1}=-1$.

【例 4】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$,其中$|a|<1$.

【分析】 由于积的极限等于极限的积这一法则只对有限个因子成立,因此要先用求积公式将其变形.

【解】 多次使用恒等式$(x-y)(x+y)=x^2-y^2$,

化简 $(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$

$=\dfrac{1}{1-a}\cdot(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$

$=\dfrac{1}{1-a}\cdot(1-a^{2^{n+1}})$.

当$n\to\infty$时,$2^{n+1}\to+\infty$,而$|a|<1$,故 $a^{2^{n+1}}\to0$,从而原式$=\dfrac{1}{1-a}$.

(2)利用两个重要极限求极限

重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 属于$\dfrac{0}{0}$型,而$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ 属于 1^∞ 型,利用它们求极限时,最重要的是对所给函数或数列作适当变形,使之具有相应的形式.有时也可以通过变量替换使问题简化.

【例 5】 求极限$\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{(\pi-\arccos x)^2}{1+x}$.

【分析】 极限中含有反三角函数,由于反三角函数的变形较不方便,故先作变量替换将其

化成三角函数，再利用重要极限求解.

【解】 令 $\arccos x=t$，则 $x=\cos t$；当 $x\to -1^+$ 时，$t\to\pi^-$.

$$\text{原式}=\lim_{t\to\pi^-}\frac{(\pi-t)^2}{1+\cos t}=\lim_{t\to\pi^-}\frac{(\pi-t)^2}{1-\cos^2 t}\cdot(1-\cos t)$$

$$=2\lim_{t\to\pi^-}\frac{(\pi-t)^2}{\sin^2 t}=2\lim_{t\to\pi^-}\frac{1}{\left[\frac{\sin(\pi-t)}{\pi-t}\right]^2}=2.$$

注 这里 $\lim\limits_{t\to\pi^-}\cos t=\cos\pi=-1$.

【例 6】 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x-1}$.

【分析】 先将函数变形，然后利用幂的极限等于极限的幂及重要极限计算.

【解】 $$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{2(x+1)-3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right]^2\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^3}=e^2.$$

(3)利用极限存在准则求极限

关于夹逼准则：夹逼准则不仅是判定极限存在的准则，而且也给我们提供了一个求极限的方法.

利用夹逼准则求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的方法：①将 x_n 适当放大为 z_n，适当缩小为 y_n；②验证极限 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

关于单调有界准则：该准则只能验证极限的存在性.

利用该准则验证极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在的方法：

① 验证数列 x_n 单调. 一般考虑 $x_{n+1}-x_n$ 的符号或由数学归纳法比较 x_{n+1} 与 x_n 的大小关系.

② 验证数列 x_n 有界. 对于单调增加的数列只考虑其上界，对于单调减少的数列只考虑其下界.

【例 7】 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$.

【证】 设 $\sqrt[n]{a}-1=r$，当 $a>1$ 时，$r>0$，$a=(1+r)^n>1+nr$，则 $0<r<\frac{a-1}{n}$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}=0$，据夹逼准则，有 $\lim\limits_{n\to\infty}r=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

当 $0<a<1$ 时，$\frac{1}{a}>1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1$；当 $a=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

综上所述，当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

注 本例的结论可以推广为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

【例 8】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$.

【解】 设 $x_n=\sqrt[n]{2^n+3^n}$，则 $3<x_n<3\sqrt[n]{2}$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，据夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=3$.

注 本例的结论可以推广为：

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$. 其中 $a_k>0(k=1,2\cdots,m)$.

【例 9】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n})$.

【分析】 当很难把无穷多项的和变为有限项时，可考虑使用夹逼准则.

【解】 设 $x_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}$,

当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时，$\frac{k}{(n+1)^2}<\frac{k}{n^2+k}<\frac{k}{n^2}$,所以

$\frac{1+2+\cdots+n}{(n+1)^2}<x_n<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$,即$\frac{n}{2(n+1)}<x_n<\frac{n+1}{2n}$.

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$,由夹逼准则知，原式$=\frac{1}{2}$.

【例 10】 设 $a>0,x_1>0,x_{n+1}=\frac{1}{4}(3x_n+\frac{a}{x_n^3})(n=1,2,\cdots)$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 由 $a>0,x_1>0$ 易知 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$.

$x_{n+1}=\frac{1}{4}(3x_n+\frac{a}{x_n^3})=\frac{1}{4}(x_n+x_n+x_n+\frac{a}{x_n^3})\geqslant\sqrt[4]{x_n\cdot x_n\cdot x_n\cdot\frac{a}{x_n^3}}=\sqrt[4]{a}$.

所以，数列$\{x_n\}$有下界$\sqrt[4]{a}$,即对一切 $n>1$,有 $x_n\geqslant\sqrt[4]{a}$.

又
$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{4}(3+\frac{a}{x_n^4})\leqslant\frac{1}{4}(3+\frac{a}{a})=1,$$

所以 $x_{n+1}\leqslant x_n$,即数列$\{x_n\}$单调减少. 由单调有界准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

现设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,由极限的保号性知 $A\geqslant\sqrt[4]{a}>0$. 对式子 $x_{n+1}=\frac{1}{4}(3x_n+\frac{a}{x_n^3})$两边同时取极限得

$$A=\frac{1}{4}(3A+\frac{a}{A^3}),$$

解得 $A=\sqrt[4]{a}$(负根舍去)，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[4]{a}$.

注 ① 对由递推公式给出的数列，在求极限时一般采用单调有界准则.

②本题的结果带有普遍性. 设 $a>0,x_1>0,\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 若 $x_{n+1}=\frac{1}{m}[(m-1)x_n+\frac{a}{x_n^{m-1}}]$,则 $A=\sqrt[m]{a}$.

(4)利用无穷小的性质求极限

无穷小的性质及常用的等价无穷小已在前面给出，读者应当熟记相关结论.

【例 11】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{x^2+1}(\sin x+\arctan x)$.

【分析】 由于$\lim\limits_{n\to\infty}(\sin x+\arctan x)$不存在，故不能用极限的四则运算法则，但要注意到函数$(\sin x+\arctan x)$的有界性特征.

【解】 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$,且$|\sin x+\arctan x|<1+\frac{\pi}{2}$. 根据“有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小”这一性质，原式$=0$.

【例 12】 求下列极限：

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{(\arctan x)^2}$　　　　② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

【解】 ①当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+\sin^2 x}-1\sim\dfrac{1}{2}\sin^2 x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\arctan x\sim x$.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

②当 $x\to 0$ 时，$e^{x-\sin x}-1\sim x-\sin x$，$e^{\sin x}\to 1$.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x}=1$.

1.3.2 无穷小的比较

【例 13】 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，(　　).

(A) $f(x)$是 x 的等价无穷小

(B) $f(x)$与 x 是同阶但非等价的无穷小

(C) $f(x)$是比 x 较低阶的无穷小

(D) $f(x)$是比 x 较高阶的无穷小

【分析】 比较两个无穷小 $f(x)$与 x，需考察极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

【解】 因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 2}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 3}{x}=\ln 2+\ln 3=\ln 6\neq 1.$$

所以 $f(x)$是 x 的同阶但非等价的无穷小，故应选(B).

【例 14】 若 $f(x)=\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$，试求常数 c 及 k，使得当 $x\to+\infty$时，$f(x)\sim\dfrac{c}{x^k}$.

【分析】 本题的关键在于选择适当的 k，使极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{1/x^k}$为常数，为此需要先对 $f(x)$进行根式有理化.

【解】
$$f(x)=(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{-(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$
$$=\frac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}$$
$$=\frac{-2}{\sqrt{x^3}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}.$$

故若取 $k=\dfrac{3}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{1/x^k}=-\dfrac{1}{4}$.

从而当 $k=\frac{3}{2}$，$c=-\frac{1}{4}$ 时，$f(x)\sim\frac{c}{x^k}(x\to+\infty)$.

1.3.3 求分段函数的极限

若分段函数在分段点处左右邻近两侧其表达式不同，则须利用左右极限来讨论，并注意到下面结论：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在且相等.

【例 15】 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0;\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & x<0.\end{cases}$$

讨论极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

【例 16】 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

讨论极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

【解】 当 $x\to 0^-$ 时，$e^{\frac{1}{x}}\to 0$；当 $x\to 0^+$ 时，$e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$. 从而 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

1.3.4 含参数的函数的极限

【例 17】 已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}(x\geqslant 0)$，求函数 $f(x)$ 的表达式.

【分析】 极限式中 x 与变量 n 无关，应视为常数，同时涉及极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n$，应根据前面的相关结论来展开讨论.

【解】 当 $0\leqslant x<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$，$f(x)=0$.

当 $x=1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}$.

当 $x>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$，