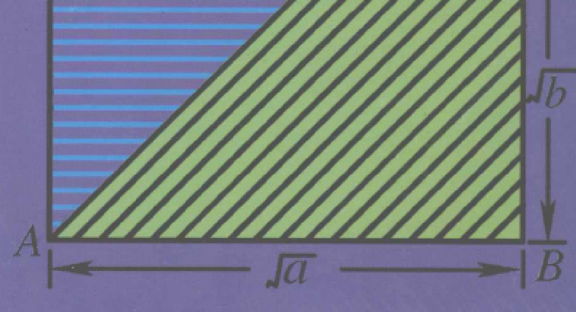
经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准

实验教科书

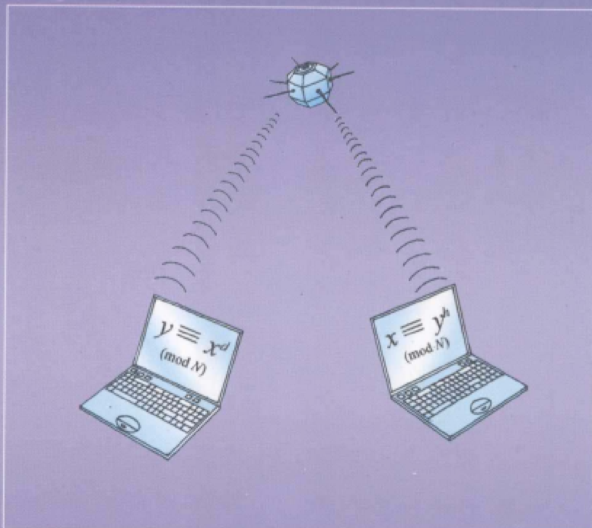
选修系列4－5

不等式选讲



$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle AFM}-S_{\text{矩形}ABEF}\geqslant 0$

湖南教育出版社



ISBN 7-5355-4608-0

9 787535 546081 >

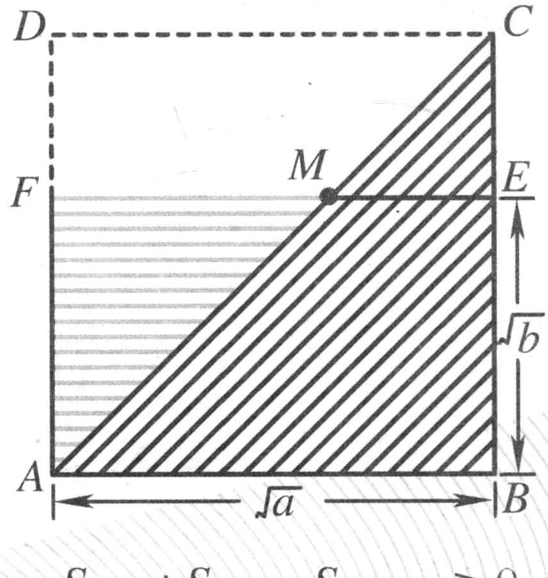
G · 4603 定价:7.05 元

普通高中课程标准

实验教科书

选修系列 4–5

不等式选讲



$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle AFM}-S_{矩形ABEF}\geqslant 0$

主　　编　张景中　陈民众
执行主编　李尚志
本册主编　王树禾
编　　委　郑志明　查建国
　　　　　蒋星耀　孟实华

普通高中课程标准实验教科书
选修 4—7
优选法与试验设计初步
责任编辑：孟实华　邹伟华
　　　　　甘　哲　蒋　芳
美术编辑：肖　毅
技术插图：徐　航
湖南教育出版社出版发行（长沙市韶山北路 443 号）
网　　址：http://www.hneph.com
电子邮箱：postmaster@hneph.com
湖南省新华书店经销
湖南新华印刷集团有限责任公司(邵阳)印刷
890×1240　16 开　印张：4.5　字数：110000
2005 年 8 月第 1 版　2006 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 7—5355—4607—2/G·4602
定　价：6.05 元

探寻现实生活中的不等关系

自来水管的横截面为什么总是圆的，而不是方的？

圆柱体容器的容积一定时，怎样的圆柱体容器用料最省？

表面积一定时，怎样的长方体容积最大？

晚上在灯下做功课时，怎样选择灯的高度，才能使桌子边缘处最亮？

亲爱的同学，这类问题在现实生活中随处可见，你也许会感兴趣吧. 它们都与不等式有关，可以利用不等式来解决.

不等式是数学的重要内容，是研究数量的大小关系的必备知识，是我们进一步学习数学和其他学科的基础和工具.

在本专题中，我们将回顾和复习不等式的基本性质和基本不等式，介绍一些重要不等式（绝对值不等式、平均不等式、柯西不等式、排序不等式、贝努利不等式）和证明不等式的基本方法（比较法、分析法、综合法、反证法、放缩法），以及数学归纳法和它的简单应用.

同学们通过本专题的学习，不仅要掌握不等式涉及的基本知识和基本技能，还要主动地探寻现实生活中存在的不等关系，逐步形成和努力增强数学应用意识，走进数学应用的天地！

作 者

2004 年 12 月

目录

第1章　基本不等式和证明不等式的基本方法　1

数学实验　π的近似值　2

1.1　实数可以比较大小　5

习题　1　6

1.2　比较法证不等式　7

习题　2　9

1.3　基本不等式　9

习题　3　12

1.4　基本不等式实际应用举例　13

习题　4　14

阅读与思考　算术平均数与几何平均数　16

1.5　分析法与综合法　18

习题　5　21

1.6　反证法和放缩法　22

习题　6　24

第2章　绝对值不等式　25

2.1　含有绝对值的不等式　26

习题　7　28

2.2　解含绝对值的不等式举例　29

习题　8　32

阅读与思考　距离的性质　33

第3章　数学归纳法与不等式证明　36

3.1　数学归纳法　37

习题　9　40

3.2 数学归纳法证不等式 40

习题 10 43

第4章 平均不等式 44

4.1 三个正数的平均不等式 45

习题 11 47

4.2 三个正数平均不等式的实际应用举例 47

习题 12 49

阅读与思考 n 个正数的平均不等式 50

数学建模 洗衣服的数学 52

第5章 三个重要不等式 57

5.1 柯西不等式 58

习题 13 61

5.2 排序不等式 61

习题 14 66

5.3 贝努利不等式 67

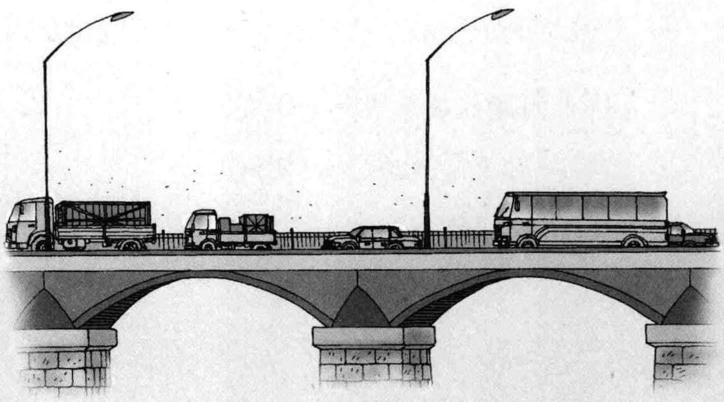
数学建模 增设汽油中转站 69

课程总结报告参考题 72

附录 数学词汇中英文对照表 73

第 1 章

基本不等式和证明不等式的基本方法



比较法、分析法、综合法、反证法、放缩法是证明不等式的基本方法，本章将复习不等式的基本性质和基本不等式，通过一些简单问题学习证明不等式的基本方法.

数学实验

π的近似值

我国古代著名数学家祖冲之用$\frac{355}{113}$作为π的近似值，如果要找比$\frac{355}{113}$更接近π的分数，而且想让分母尽可能地小，怎么办呢？

这个问题的数学表达，就是：

“找一对正整数p，q，使满足

(1) $\frac{q}{p}$比$\frac{355}{113}$更接近π，也就是

$$\left|\pi-\frac{q}{p}\right|<\left|\frac{355}{113}-\pi\right|;$$

(2) 要求p尽可能小.”

这就看到，要把问题说清楚，要用不等式来表达.

可以想到，取一个一个分数来试验，找到一个满足上述条件的就可以了.

分母为p的正分数很多，要有限制. 若$\frac{q}{p}\leqslant 3$，不用考虑；若$\frac{q}{p}\geqslant 3.2$，也不用考虑. 用不等式估计分子q的范围：

由$\frac{q}{p}>3$，得$q>3p$；

由$\frac{q}{p}<3.2$，得$q<3.2p$.

这又用到**不等式** (inequality) 的基本性质.

对于p，由3开始一个比一个大的来试，用计算机搜索，可以找到一个分数，看看分母有多大.

用手算或计算器算太慢了. 使用“Z+Z超级画板”的程序工作区要方便得多.

把下列程序键入“Z+Z超级画板”的程序工作区：

```
z=355/113;
pi=3.14159265358979;
d=z-pi;
>>(3014435373)/(1130000000000000) #
a=z;
for(p=3;p<1000;p=p+1)
{
for(q=floor(p*(pi-d));q<floor(p*(pi+d))+1;q=q+1)
        {
        if((q/p-pi)^2<(z-pi)^2)
            {a=q/p;}
        else{a;}
        }
}
```

把光标放在最后的花括弧左边，按住 ctrl 键单击 Enter，程序开始运行. 不久，结果出现：

≫355/113#

这表明，分母不超过 1 000 的所有分数中，最接近 π 的是$\frac{355}{113}$.

注意程序中有一行

for (p=3; p<1000; p=p+1).

这一行中的 3 改成 1 000，1 000 改成 2 000，再运行，结果仍是$\frac{355}{113}$.

可见，分母不超过 2 000 的所有分数中，最接近 π 的仍是$\frac{355}{113}$.

耐心地做下去，你会看到，分母不超过 16 000 的分数中，最接近 π 的仍是$\frac{355}{113}$.

下面再做，把这一行改成

for (p=16000;p<16700;p=p+1),

你会找到一个分母为16 604的分数，算一算就知道它确实比$\frac{355}{113}$更接近π.

在16 000～16 604之间，有没有比$\frac{355}{113}$更接近π的分数呢，只要把这一行改成：

```
for(p=16000;p<16604;p=p+1).
```

运行一下就知道了：没有.

我们找到了比$\frac{355}{113}$更接近π的分数是$\frac{52\ 163}{16\ 604}$.

实际上，如果多用点不等式知识，工作量可以小得多，能大大简化计算，甚至得到更漂亮的结果.

1.1 实数可以比较大小

我们知道，实数集与数轴上的点集是一一对应的. 在数轴上不同的两点中，右边的点所表示的实数比左边的点表示的实数大. 如图1－1所示，点 A 表示实数 a，点 B 表示实数 b，点 A 在点 B 右边，那么 $a>b$. 从图 1－1 中，我们还可以看到：

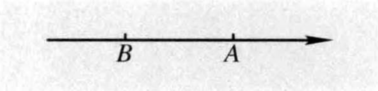


图 1－1

如果 $a>b$，那么 $a-b$ 是正数；反之，$a-b$ 是正数，则 $a>b$.

类似地，如果 $a<b$，那么 $a-b$ 是负数；如果 $a=b$，那么 $a-b=0$. 它们的逆命题也都正确.

这里表明了

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0;$$

$$a=b \Leftrightarrow a-b=0;$$

$$a<b \Leftrightarrow a-b<0.$$

由此可见，实数可以比较大小，要比较两个实数的大小，可通过考察它们的差与 0 的大小关系来完成.

例 1 比较 $(a-1)(a+4)$ 与 a^2+3a 的大小.

解 $(a-1)(a+4)-(a^2+3a)$

$=(a^2+3a-4)-(a^2+3a)$

$=-4<0$,

$\therefore$ $(a-1)(a+4)<(a^2+3a)$.

例 2 比较 x^2+3 与 $3x$ 的大小.

解 $(x^2+3)-3x$

$=x^2-3x+3$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,

$\therefore$ $(x^2+3)>3x$.

例 3 甲、乙两人同时同地沿同一路线走到同一地点，甲有一半时间以速度 a 行走，另一半时间以速度 b 行走；乙有一半路程以速度 a 行走，另一半路程以速度 b 行走．如果 $a\neq b$，问甲、乙两人谁先到达指定地点.

解 设从出发地点至指定地点的路程是 s，甲、乙走完这段路程所用的时间分别为 t_1，t_2，依题意，有

$$\frac{t_1}{2}a+\frac{t_1}{2}b=s,$$

$$\frac{s}{2a}+\frac{s}{2b}=t_2.$$

从而 $t_1=\dfrac{2s}{a+b}, t_2=\dfrac{s(a+b)}{2ab}$. 于是

$$\begin{aligned} t_1-t_2 &=\frac{2s}{a+b}-\frac{s(a+b)}{2ab} \\ &=\frac{s[4ab-(a+b)^2]}{2(a+b)ab} \\ &=-\frac{s(a-b)^2}{2ab(a+b)}, \end{aligned}$$

其中 s，a，b 都是正数，且 $a\neq b$，于是 $t_1-t_2<0$，即

$$t_1<t_2.$$

从而知甲比乙先到达指定地点.

习题 1

1. 已知 $x\neq 0$，比较 $(x^2+1)^2$ 与 x^4+x^2+1 的大小.

2. 设 $a\neq b$，比较下列各式的大小：

(1) $a^2(a+1)+b^2(b+1)$ 与 $a(a^2+b)+b(b^2+a)$；

(2) a^3+b^3 与 a^2b+ab^2.

3. 设 $a>b>0$，比较 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ 与 $\dfrac{a-b}{a+b}$ 的大小.

4. 若 $c\geqslant 1$，求证：$\dfrac{x^2+c+1}{\sqrt{x^2+c}}\geqslant\dfrac{c+1}{\sqrt{c}}$.

5. 某收购站分两个等级收购小麦，一等小麦每千克为 a 元，二等小麦每千克为 $b(b<a)$元，现有一等小麦 x kg，二等品小麦 y kg，若以两种价格的平均数收购，是否公平合理？

1.2 比较法证不等式

一个不等式实际上表示的就是不等式两边的大小比较. 从上一节我们知道两实数大小的比较可通过考察两数的差与 0 的大小关系来实现，因此，我们要证明一个不等式也就可以如同进行实数大小比较一样，采用作差、变形、确定符号的方式进行，我们将这种方法称之为**比较法**(comparison method).

以下我们利用比较法证明不等式的基本性质.

1. 若 $a>b$，$c\in\mathbf{R}$，则 $a+c>b+c$.

证明 $\because$ $(a+c)-(b+c)=a-b$,

又由 $a>b$，知 $a-b>0$，

$\therefore$ $a+c>b+c$.

2. 若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$.

证明 $\because$ $a>b$，$b>c$，

$\therefore$ $a-b>0$，$b-c>0$.

$\therefore$ $a-c=(a-b)+(b-c)>0$.

$\therefore$ $a>c$.

3. 若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$.

（证明由同学们自己完成.）

4. (1) 若 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$；

(2) 若 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$.

证明 (1) $ac-bc=(a-b)c$.

因 $c>0$，故 $ac-bc$ 与 $a-b$ 同号.

$\because$ $a>b$， $\therefore$ $a-b>0$.

$\therefore$ $ac-bc>0$.

根据性质 4，可得：

若 $b>0$，则 $\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$.

这里为我们提供了比较法证明不等式的另一种方式：作比（注意 $b>0$!）变形，与 1 比较大小.

∴ $ac>bc$.

(2)（证明由同学们自己完成.）

5. 若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$.

（证明由同学们自己完成.）

6. 若 $a>b>0$，$n\in\mathbf{N}_+$，$n\geqslant 2$，则

(1) $a^n>b^n$；　　(2) $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

证明　(1) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$，　①

因 $a>0$，$b>0$，故①中第二个括号内各项和为正数，a^n-b^n 与 $a-b$ 同号.

∵ $a>b$，　∴ $a-b>0$.

∴ $a^n-b^n>0$，

即 $a^n>b^n$.

(2) 用 $a^{\frac{1}{n}}$，$b^{\frac{1}{n}}$ 代替①中的 a，b，由①知 $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ 与 $a-b$ 同号，

因此 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

比较法是证明不等式最基本的方法，下面我们利用比较法来证明不等式.

例 1　求证：$x^2+3>3x$.

证明　∵ $(x^2+3)-3x$

$$=x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3$$

$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}>0,$$

∴ $x^2+3>3x$.

例 2　已知 a，b 是正数，且 $a\neq b$，求证：

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2.$$

证明　$(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)$

$$=(a^3-a^2b)-(ab^2-b^3)$$

$$=a^2(a-b)-b^2(a-b)$$

$$=(a^2-b^2)(a-b)$$

$$=(a+b)(a-b)^2.$$

∵ a，b 是正数，

∴ $a+b>0$.

又因为 $a\neq b$，

∴ $(a-b)^2>0$，

∴ $(a+b)(a-b)^2>0$，

即 $(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)>0$.

∴ $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

习题 2

1. 用“>”、“<”号填空：

(1) 如果 $a>b$，那么 $-a$ ____ $-b$；

(2) 如果 $a<b<0$，那么 $\frac{1}{a}$ ____ $\frac{1}{b}$；

(3) 如果 $a>b>0$，那么 $\frac{c}{a}$ ____ $\frac{c}{b}$；

(4) 如果 $0<a<b<1$，$n\in\mathbf{N}_+$，那么 $\frac{1}{a^n}-\frac{1}{b^n}$ __ 1.

2. 求证：

(1) 如果 $a>b$，$e>f$，$c>0$，那么 $f-ac<e-bc$；

(2) 如果 $a>b>c$，$c<d<0$，那么 $ac<bd$.

3. 求证：$a^2+3b^2\geqslant 2b(a+b)$.

4. 求证：$\frac{4a}{4+a^2}\leqslant 1$.

5. 已知 a，b，m 都是正数，且 $a<b$，求证：

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}.$$

6. 已知 $a>b>c$，求证：$a^2b+b^2c+c^2a>ab^2+bc^2+ca^2$.

7. 已知 $f(x)=ax^2+bx$，且满足 $-1\leqslant f(1)\leqslant 2$，$-2\leqslant f(2)\leqslant 4$. 求 $f(3)$的范围.

1.3 基本不等式

现在我们用比较法来证明不等式

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\quad(a,b\in\mathbf{R}_+).\qquad ①$$

证明 $\because$ $a>0$，$b>0$，

$\therefore$
$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$$
$$=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0.$$

$\therefore$ $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）.

我们将$\dfrac{a+b}{2}$称为两个正数 a，b 的**算术平均**（arithmetic mean）数，$\sqrt{ab}$则称之为 a，b 的**几何平均**（geometric mean）数.

①式告诉我们，两个正数的算术平均数不小于几何平均数，当且仅当这两个正数相等时等号成立.

利用①可以很快地写出一些不等式：

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab,$$
$$a^2+b^2\geqslant2ab,\qquad ②$$
$$a^2+b^2\geqslant2|a||b|,$$
$$a^2+b^2-ab\geqslant ab$$

等等.

同学们还可以作进一步的探索.

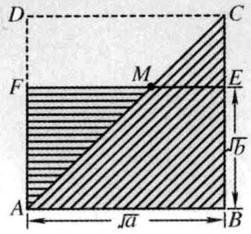
不等式①，②我们称之为**基本不等式**（basic inequalities）. 现在，我们可以从①，②这两个不等式出发，利用不等式的基本性质得到一连串的不等式. 例如：

1. 由②得

$$a^2+b^2+2ab\geqslant2ab+2ab,$$

即
$$(a+b)^2\geqslant4ab.$$

2. 将
$$a^2+b^2\geqslant2ab,$$
$$b^2+c^2\geqslant2bc,$$



这里是运用比较法结合几何图形给出的另一证明：正方形 $ABCD$ 中，$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle AFM}-S_{矩形ABEF}\geqslant0$，即 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}\geqslant\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$. 由此得出①.

对实数 x，有 $x^2\geqslant0$. 这是配方法的基础. 在运用比较法证明不等式过程中，常为我们提供了赖以确定符号的关键理由.

“几何平均数”这个名词的来源可以从下述简单的几何事实中得到解释. 如左图中表示长与宽的长度分别为 a，b 的矩形. 右图表示的则是与矩形具有相同面积的正方形，那么它的边长就是 a，b 的几何平均数.