普通高等教育"十一五"规划教材

大学数学教学丛书

微积分（上册）

主编 罗瑞平
编者 闫厉 高海龙
马秋红 李海龙

经管类

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书由一线数学教师结合多年的教学实践编写而成. 全书把微积分和相关经济学知识有机结合, 内容的深度广度与经济类、管理类各专业微积分教学要求相符.

全书分上、下两册, 共12章. 本书是上册, 内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用. 各节均配有一定量的习题, 章末附有自测题, 书后附有习题答案.

本书可供普通高等院校经济类、管理类各专业及相关专业教学使用, 也可供学生自学.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(经管类)上册/罗瑞平主编. —北京: 科学出版社, 2010

普通高等教育“十一五”规划教材·大学数学教学丛书

ISBN 978-7-03-028168-5

Ⅰ. 微… Ⅱ. 罗… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2010) 第123312号

责任编辑: 张中兴 于俊杰 / 责任校对: 张怡君

责任印制: 张克忠 / 封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

明辉印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年8月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2010年8月第一次印刷 印张: 36 3/4

印数: 1—3 000 字数: 738 000

定价: 55.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

丛　书　序

本丛书是为普通高等院校本科学生所编写的数学系列教材，是由长春地区五所普通高校具有丰富教学和科研经验的教师联合编写的，是集体智慧的结晶. 本丛书从酝酿到出版经历了近十年的时间，几经修改终于成稿. 在教材内容的编排上，我们一方面借鉴了国内一些品牌教材的先进模式，另一方面结合新形势下的新要求，并根据五所普通高校本科学生的特点，先后编写了逾百万字的教材与讲义，在多年使用过程中不断提炼修订，逐步趋于完善. 应该说，本套教材凝聚着五所高校几代数学教师的心血和汗水，希望能培养出更多的创新性人才.

本套教材包括《微积分(经管类)》、《概率论与数理统计》(两本)、《线性代数》、《计算方法简明教程》、《数学建模》、《复变函数与积分变换》. 编者在取材上着眼于本科生未来的发展和当今世界科学技术的发展，充分反映国内外教学前沿信息和最新学术动态，本着“夯实基础、适当延伸，注重应用、强化实践”的原则，大胆摆脱了普通高等院校教材编写的传统套路，使这套教材具有很强的实用性、一定的可读性、较高的艺术性和丰富的实践性；同时还保持了数学知识的系统性、严密性、连贯性等特点，内容翔实，清晰易读，便于教学与自学. 另外,本套教材充分考虑了有志报考研究生同学的需要，每一本教材都配备了丰富的、梯度配置的例题与习题，紧扣学生学习和报考研究生复习的需要，既具有明显的启发性，又具有典型的应用意义，可供普通高校理工科各专业使用.

本套教材从选题、大纲、组织编写到编辑出版，自始至终得到了科学出版社数理出版分社的支持，同时也得到了长春工业大学、吉林建筑工程学院、长春大学、长春工程技术师范学院、长春建筑学院教务处及数学系各位领导的支持和帮助，在此，我们一并表示衷心的感谢.

编　者

2010 年 3 月

前　言

21 世纪, 随着社会经济的迅猛发展, 社会中各个行业及大学的各个专业都对微积分提出了更高更新的要求. 微积分的理论与方法已广泛地应用于自然科学、工程技术甚至社会科学等各个领域, 它提供给人们的不仅是一种高级的数学技术, 更是一种人类进步所必需的文化素质和修养. 学习和掌握一定程度的微积分知识, 不仅是对理工类学生的要求, 也是对经济管理、人文科学等各类学生的基本要求. 但数学符号语言和抽象形式给微积分的学习带来了一定的障碍, 也给大学的微积分教学增加了许多困难.

《微积分 (经管类)》是根据教育部最新颁布的本科层次的普通高等教育教学要求编写的. 全书把微积分和经济学相关知识有机结合, 内容的深度广度与经济类、管理类各专业微积分教学的基本要求相符.

根据经济管理、人文科学等各类学生的认知习惯、特点, 本书在编写中力求简练易懂、由浅入深, 例题选取得当, 习题搭配适量, 潜移默化地教授知识、培养能力, 旨在提高学生的数学素质和数学修养.

教材编写在遵循 “逻辑性、系统性和科学性” 原则的基础上, 尽可能用实际问题引出相关概念和要点知识, 逐渐展开. 采用典型例子使学生加深对知识要点及相关应用的理解, 内容上尽量减少繁琐的理论论证, 注意结合实际, 注重培养学生分析问题、解决问题及运算的能力. 本书中加 “*” 号章节, 可根据专业特点选择讲授.

本书分上下两册, 上册由罗瑞平 (吉林建筑工程学院)、闫厉 (长春工业大学)、高海龙 (吉林建筑工程学院)、马秋红 (长春大学)、李海龙 (吉林工程技术师范学院) 编写; 下册由张琴、朱立勋 (吉林建筑工程学院)、闫厉 (长春工业大学)、单国栋 (长春大学)、张志尚 (吉林工程技术师范学院) 编写. 全书最后由罗瑞平、张琴统稿修改定稿. 本书由吉林建筑工程学院刘伟教授审阅, 在此表示衷心的感谢.

在教材编写过程中, 得到了科学出版社和吉林建筑工程学院教务处的大力支持, 在此深表谢意.

由于我们水平有限, 书中难免出现不妥之处, 欢迎各位读者批评指正.

编　者

2010 年 3 月于长春

目　录

第 1 章　函数、极限、连续

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学. 数学不仅是一种工具, 而且是一种思维; 不仅是一种知识, 而且是一种素养; 不仅是一种科学, 而且是一种文化. 能否运用数学观念定量思维是衡量一个民族科学文化素质的一个重要标志. 数学意识是创造的源泉, 数学原理、数学方法是创造发明的基础.

函数是高等数学的主要研究对象, 极限概念是微积分的理论基础, 极限方法是微积分的基本分析方法. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和基本方法.

§1.1　函　　数

1.1.1　集合

集合是数学中一个原始的概念, 它不能用更简单的概念定义. 一般地说, 具有某种特定性质的事物的总体称为*集合*. 组成这个集合的事物称为该集合的*元素*.

集合的例子:

(1) 2005 年在广东地区出生的人;

(2) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的根;

(3) 全体实数;

(4) 曲线 $y=x^3$ 上所有的点;

(5) 某学校图书馆当前所有藏书.

集合通常用大写的拉丁字母 $A,B,C,D,\cdots$ 表示. 元素用小写的拉丁字母 $a,b,c,d,\cdots$ 表示.

表示集合的方法通常有以下两种:

一种是*列举法*, 就是把集合的全体元素一一列举出来表示. 例如, 由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A, 可表示成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

如: $A=\{1,2\}$.

另一种是*描述法*, 若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的, 就可表示成

$$M=\{x|x \text{ 的性质 } P\}.$$

如: $C=\{x\,|x^2-3x+2=0\}$.

一个集合, 若它只含有有限个元素, 则称为有限集; 不是有限集的集合称为无限集; 不含有任何元素的集合称为空集, 记作 $\varnothing$; 如 $\left\{x\left|x\in R, x^2+1=0\right.\right\}=\varnothing$.

元素与集合的关系:

如果 a 是集合 A 的元素, 就说 a 属于 A, 记作 $a\in A$; 如果 a 不是集合 A 的元素, 就说 a 不属于 A, 记作 $a\notin A$ 或 $a\bar{\in}A$.

对于数集, 有时我们在表示数集的字母的右上角标上 "*" 来表示该数集内排除 0 的集, 标上 "+" 来表示该数集内排除 0 与负数的集.

习惯上, 全体非负整数即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$, 即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体正整数的集合为

$$\mathbf{N}^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$, 即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$, 即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\middle|p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+\text{ 且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\};$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^*$ 为排除数 0 的实数集, $\mathbf{R}^+$ 为全体正实数的集.

集合与集合的关系: A, B 是两个集合, 如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A\subset B$. 如: $\mathbf{N}^+\subset\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

如果集合 A 与集合 B 互为子集, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A=B$.

例如, 设

$$A=\{2,\quad 3\}\quad B=\{\,x\mid x^2-5x+6=0\,\},\quad \text{则 } A=B.$$

若作 $A\subset B$, 且 $A\neq B$, 则称 A 是 B 的真子集.

规定空集为任何集合的子集.

1.1.2　集合的运算

集合的基本运算有以下几种: 并、交、差.

设 A, B 是两个集合, 由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的并集 (简称并), 记作 $A\cup B$, 即

$$A\cup B=\{x|x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的交集 (简称交), 记作 $A\cap B$, 即

$$A \cap B = \{x|x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的**差集** (简称**差**), 记作 $A-B$, 即

$$A - B = \{x\,|x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

我们研究某个问题时限定在一个大的集合 I 中进行, 所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 此时, 我们称集合 I 为**全集**或**基本集**, 称 $I-A$ 为 A 的 **余集**或**补集**, 记作 $C_I A$. 例如, 在实数集 $\mathbf{R}$ 中, 集合 $A=\{x|0<x\leqslant 1\}$ 的余集就是

$$C_I A = \{x|x \leqslant 0 \text{ 或 } x > 1\}.$$

当 A 对于哪个集合取余集是很显然的时候经常简记为 A^c.

集合的并、交、余运算满足下列法则:

设 A, B, C 为任意三个集合, 则有下列法则成立:

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
　　　　　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,
　　　　　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$,
　　　　　$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

以上这些法则都可以根据集合相等的定义来验证, 证明从略.

在两个集合之间还可以定义直积或笛卡儿 (Cartesian) 乘积. 设 A, B 是任意两个集合, 在集合 A 中任意取一个元素 x, 在集合 B 中任意取一个元素 y, 组成一个有序对 (x,y), 把这样的有序对作为新的元素, 它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的**直积**, 记为 $A\times B$, 即

$$A \times B = \{(x,y)|x \in A \text{ 且 } y \in B\}.$$

例如, $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)|x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合, $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

又如, 设集合 $A=${北京, 上海}, $B=${南京, 广州, 深圳}. 则 $A\times B=${(北京, 南京), (北京, 广州), (北京, 深圳), (上海, 南京), (上海, 广州), (上海, 深圳)};

$B\times A=${(南京, 北京), (南京, 上海), (广州, 北京), (广州, 上海), (深圳, 北京), (深圳, 上海)}.

1.1.3　区间和邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数, 且 $a<b$. 数集

$$\{x|a<x<b\}$$

称为**开区间**, 记作 (a,b), 即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的**端点**, 这里 $a\notin(a,b), b\notin(a,b)$. 数集

$$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为**闭区间**, 记作 $[a,b]$, 即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点, 这里 $a\in[a,b], b\in[a,b]$.

类似地可说明

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为**半开半闭区间**.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的**长度**. 从数轴上看, 这些有限区间是长度为有限的线段, 闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 在数轴上表示出来, 分别如图 1-1-1(a)、(b) 所示, 此外还有所谓无限区间, 引进记号 $+\infty$ (正无穷大) 及 $-\infty$ (负无穷大), 则可类似地表示无限区间, 例如

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\}.$$

这两个无限区间在数轴上分别如图 1-1-1(c)、(d) 所示,

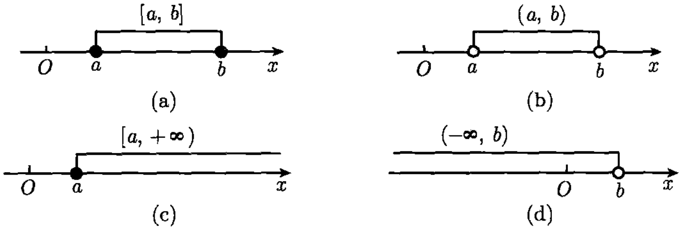

图 1-1-1

全体实数的集合 **R** 也可记作 $(-\infty,+\infty)$, 它也是无限区间.

以后在不需要辨明区间是否包含端点, 是有限区间还是无限区间的场合, 我们就简单地称它为 "区间", 且常用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a 是一个实数, $\delta>0$. 开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为**点 a 的 δ 邻域**, 记作 $U(a,\delta)$; 简称 a 的**邻域**, 记作 $U(a)$. 即

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}.$$

其中 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径. 如图 1-1-2 所示.

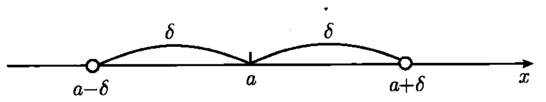

图 1-1-2

因为 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$, 所以邻域又可以记为

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离, 所以 $U(a,\delta)$ 表示: 与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

将邻域 $U\ (a,\delta)$ 的中心 a 点去掉后所得的集合称为 a 的去心邻域, 记为 $\overset{o}{U}(a,\delta)$. 即

$$\overset{o}{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

1.1.4　函数及其性质

我们在观察某一现象的过程中, 常常会遇到各种不同的量, 其中有的量在该过程中不起变化, 我们把其称之为**常量** (常用 a,b,c 等表示); 有的量在该过程中是变化的, 也就是可以取不同的数值, 我们把其称之为**变量** (常用 x,y,z 等表示). 如, 一天中的气温是随着时间变化而变化的变量; 在标准大气压下水的沸点就是个常量. 如果变量的变化是连续的, 则常用区间来表示其变化范围.

下面我们来谈什么是函数, 函数概念的形成与发展大致经历了三个阶段: "变量说", "对应说", "关系说". 时间至少在牛顿、莱布尼茨创立微积分之前, 其形成的历程是漫长与曲折的, 贯穿于整个近现代数学的发展过程.

1673 年, 德国数学家莱布尼茨在一篇手稿中用函数来表示任意一个随着曲线上点的变动而变动的量, 还引进了 "常量"、"变量"、"参变量" 等概念. 1714 年莱布尼茨在著作《微积分的历史与起源》中就用 "函数" 一词来表示 "依赖于一个变量的量 ".

如物理中的热胀冷缩表示一般物体体积当温度上升时增大, 当温度下降时变小, 这里物体体积的变化是温度的函数.

定义 1-1-1　设 x,y 是两个变量, D 是一个给定的数集, 如果对于每个数 $x\in D$, 变量 y 按照某种确定的对应规则总有确定的数值与之对应, 则称 y 是 x 的**函数**, 记作 $y=f(x), x\in D$. 其中数集 D 称为这个函数的**定义域**, x 称为**自变量**, y 称为**因变量**, $\{y|y=f(x), x\in D\}$ 称为函数的**值域**, 记作 $f(D)$.

表示对应关系的记号 f 也可以改用其他字母 "g", "F" 等.

需要注意的是当 x 是 D 中的一个具体的数值 x_0 时, $y_0=f(x_0)$ 表示的是 x_0 按照法则对应的固定数值. 称 $y_0=f(x_0)$ 为 x_0 的**函数值**. 注意 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 不同, 前者是变量, 后者是一个数.

如果对于定义域中的每一个数, 对应的函数值总是只有一个, 则称这种函数为**单值函数**. 否则称**多值函数**. 今后无特别声明时, 所提函数都指单值函数.

函数有三个要素: 定义域、对应法则及值域. 尤其在判别两个函数是否相等时常用这三个要素.

在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 例如, 圆的面积 A 与它的半径 r 有函数关系 $A=\pi r^2$, 其定义域 $D=(0,+\infty)$. 在数学中, 有时不考虑函数的实际意义, 而抽象地研究用算式表达的函数, 这时函数的定义域就是自变量使算式有意义的所能取的一切实数值. 例如, 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$, 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$.

1. **函数的表示法**

(1) **表格法**　以表格形式表示函数的方法称为函数的表格法.

例如, 某中学 2008 年二年级各班数学期末平均成绩如下表:

班级	一班	二班	三班
成绩 (分)	70.5	75.6	65.7

(2) **图示法**　以图形表示函数的方法称为函数的图示法.

例如, 发射卫星时火箭走过的轨迹可以通过计算机作图表示出来, 用图形表示更直观.

(3) **公式法**　用数学公式表示函数的方法称为函数的公式法, 也称为解析法.

例如, $y=x^3, y=\ln\sqrt{1+x}$ 等. 公式法是我们以后常用的表示方法.

函数 $y=f(x)$ 表示两个变量 y 与 x 之间的对应关系, 这种函数表达方式的特点是: 等号左端是因变量的符号, 等号右端是含有自变量的式子, 当自变量取定义域内任一值时, 由这式子能确定对应的函数值. 用这种方法表示的函数叫做**显函数**.

如果两个变量 y 与 x 之间的对应关系满足一个方程 $F(x,y)=0$, 在一定条件下, 当 x 取某区间内的任一值时, 相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在, 那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个**隐函数**.

例如, 方程 $x+y^3=4$ 表示一个隐函数.

把一个隐函数化成显函数, 叫做隐函数的显化.

例如, 从方程 $x^2+y^3=4$ 解出 $y=\sqrt[3]{4-x}$, 就把隐函数化为了显函数. 隐函数的显化有时是有困难的, 甚至是不可能的.

若变量 x 与 y 之间的函数关系是通过参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\phi(t) \end{cases}, \quad t\in T$$

给出的, 这样的函数称为由参数方程确定的函数, 简称**参数式函数**, t 称为**参数**.