高校经典教材同步辅导丛书
配套高教版·华东师大数学系编

九章丛书

数学分析

（第四版·上册）

同步辅导及习题全解

SHUXUEFENXITONGBUFUDAOJIXITIQU

主　编　焦艳芳

新版

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

数学分析（第四版·上册）同步辅导及习题全解

主　编　焦艳芳

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是为了配合华东师范大学数学系出版的《数学分析》（第四版·上册）教材而编写的配套辅导书。

全书按教材内容，对各章的重点、难点做了较深刻的分析。针对各章节全部习题给出详细解题过程，并附以知识点窍和逻辑推理，思路清晰、逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，各章还附有典型例题与解题技巧，以及历年考研真题评析。

本书可作为工科各专业、本科学生、《数学分析》课程教学辅导材料和复习参考用书，也可作为工科考研强化复习的指导书及《数学分析》课程教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析（第四版·上册）同步辅导及习题全解 / 焦艳芳主编. -- 北京 ： 中国水利水电出版社，2011.1
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-8326-9

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①焦… Ⅲ. ①数学分析－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第008141号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：杨元泓　加工编辑：杨　谷　封面设计：李佳

书　名	高校经典教材同步辅导丛书 数学分析（第四版·上册）同步辅导及习题全解
作　者	主编　焦艳芳
出版发行	中国水利水电出版社（北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　格	170mm×227mm　16开本　17印张　376千字
版　次	2011年1月第1版　2011年1月第1次印刷
印　数	0001—6000册
定　价	21.80元

前　言

《数学分析》是数学系最重要的一门专业基础课。大学本科乃至研究生阶段的很多后继课程在本质上都可以看作是它的延伸、深化或应用，至于它的基本概念、思想和方法，更可以说是无处不在。数学专业后继专业课程如微分方程、实变函数和复变函数、概率论、统计及泛函分析、微分几何等课程都要以数学分析为基础。同时数学分析也是数学专业各个方向上考研必考的专业基础课。

本书是华东师范大学数学系编写的《数学分析》(第四版·上册)配套的学习辅导书，主要由如下几个部分组成：

1. 内容提要：对每章知识点做了简练概括，梳理了各知识点之间的脉络联系，突出各章主要定理及重要公式，使读者在各章学习过程中目标明确，有的放矢。

2. 课后习题全解：教材中课后习题丰富、层次多样，许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促其掌握基本解题方法。我们对教材课后的全部习题给了详细的解答。

由于时间较仓促，编者水平有限，难免书中有疏漏之处，敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2010 年 11 月

目　录

第一章　实数集与函数

本章在高中函数有关概念的基础上，进行了适当的复习与拓展，难点在于 §2 数集·确界原理部分，区间与邻域都是新引入的概念，有界性是继函数单调性、周期性、奇偶性之后引入的又一重要性质，确界原理则是微积分极限理论的基础，应注意全面把握，灵活应用.

内容摘要

§1　实数

1.1　实数及其相关定义

名称	定义	备注
实数	有理数和无理数统称为实数	任何实数都可用一个确定的无限小数来表示
两个实数的大小	给定两个非负实数 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots, y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$. 其中 a_0, b_0 为非负整数，a_k, b_k 为整数，$0 \leqslant a_k \leqslant 9, 0 \leqslant b_k \leqslant 9$，若有 $a_k = b_k (k = 0,1,2,\cdots)$，则称 x 与 y 相等，记为 $x = y$；若 $a_0 > b_0$ 或存在非负整数 l，使得 $a_k = b_k (k = 0,1,2,\cdots,l)$ 而 $a_{l+1} > b_{l+1}$，则称 x 大于 y	对于负实数，分别有 $-x = -y$ 与 $-x > -y$
n 位过剩近似	设 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为非负实数，称有理数 $x_n = a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 为实数 x 的 **n 位不足近似**，而有理数 $\overline{x}_n = x_n + \frac{1}{10^n}$ 称为 x 的 **n 位过剩近似**，$n = 0,1,2\cdots$	实数 x 的不足近似 x_n 当 n 增大时不减，即有 $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots$，而过剩近似 $\overline{x}_n$ 当 n 增大时不增，即有 $\overline{x}_0 \geqslant \overline{x}_1 \geqslant \overline{x}_2 \geqslant \cdots$
命题	设 $x = a_0.a_1a_2\cdots$ 与 $y = b_0.b_1b_2\cdots$ 为两实数，则 $x > y$ 的等价条件是：存在正整数 n，使得 $x_n > \overline{y}_n$	因为 x_n 当 n 增加时是递增的，即对任何 n，$x_{n+1} \geqslant x_n$，而 $\overline{y}_n$ 是递减的，即对任何 n，$\overline{y}_{n+1} \leqslant \overline{y}_n$，于是 $x_n - \overline{y}_n$ 是递增的，而且随着 n 的增大与 $x - y$ 越来越接近. 若 $x > y > 0$，则必定存在正整数 n，使得 $x_n > \overline{y}_n$

1.2 实数的性质

性质	
封闭性	实数集 $\mathbf{R}$ 对加、减、乘、除(除数不为 0) 四则运算是封闭的,即任意两个实数的和、差、积、商仍是实数
有序性	实数集是有序的,即任意两实数 a,b 必满足下述三个关系之一:$a<b,a>b,a=b$
传递性	实数的大小关系具有传递性,即若 $a>b,b>c$,则有 $a>c$
阿基米德性	实数具有阿基米德性,即对任何 $a,b\in\mathbf{R}$,若 $b>a>0$,则存在正整数 n,使得 $na>b$
稠密性	实数集 $\mathbf{R}$ 具有稠密性,即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数,且既有有理数也有无理数
一一对应关系	实数集 $\mathbf{R}$ 与数轴上的点有着一一对应关系

§2 数集·确界原理

区间	有限区间	开区间	设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,则称数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 为**开区间**,记作 (a,b)
		闭区间	数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a,b]$
		半开半闭区间	数集 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 都称为**半开半闭区间**,分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$
	无限区间		$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\},(-\infty,a)=\{x\mid x<a\},(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\}$ $(-\infty,+\infty)=\{x\mid-\infty<x<+\infty\}$ 这几类数集称为**无限区间**
邻域	邻域		设 $a\in\mathbf{R},\delta>0$,满足绝对值不等式 $\lvert x-a\rvert<\delta$ 的全体实数 x 的集合,称为**点 a 的 δ 邻域**,记作 $U(a;\delta)$ 或 $U(a)$ 即有 $U(a;\delta)=\{x\mid \lvert x-a\rvert<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$
	空心邻域		**点 a 的空心邻域为** $U^{\circ}(a;\delta)=\{x\mid 0<\lvert x-a\rvert<\delta\}$
	右邻域		**点 a 的 δ 右邻域为** $U_{+}(a;\delta)=[a,a+\delta)$,记为 $U_{+}(a)$
	左邻域		**点 a 的 δ 左邻域为** $U_{-}(a;\delta)=(a-\delta,a]$,记为 $U_{-}(a)$
邻域	上确界		设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集,若数 η 满足: ① 对一切 $x\in S$,有 $x\leqslant\eta$,即 η 是 S 的上界; ② 对任何 $\alpha<\eta$,存在 $x_0\in S$,使得 $x_0>\alpha$,即 η 又是 S 的最小上界,则称 η 为数集 S 的**上确界**,记作 $\eta=\sup S$
	下确界		设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集,若数 ξ 满足: ① 对一切 $x\in S$,有 $x\geqslant\xi$,即 ξ 是 S 的下界; ② 对任何 $\beta>\xi$,存在 $x_0\in S$,使得 $x_0<\beta$,即 ξ 又是 S 的最大下界,则称 ξ 为数集 S 的**下确界**,记作 $\xi=\inf S$
(**确界原理**)设 S 为非空数集,若 S 有**上界**,则 S 必有**上确界**;若 S 有**下界**,则 S 必有**下确界**			

§3　函数概念

名称	定义	重点	备注
函数	给定集合 X，若存在某种对应规则 f，对于 $\forall x \in X$，存在唯一 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应，称 f 是从 x 到 $\mathbf{R}$ 的一个函数，记为 $y=f(x)$；X 称为**定义域**，x 称为**自变量**，y 为**因变量**，$\{f(x) x \in X\}$ 为**值域**	对应规则；定义域	
复合函数	设函数 $y=f(u)$ 的定义域包含 $u=g(x)$ 的值域，则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y=f[g(x)]$，即为 g 与 f 的**复合函数**，记作 $y=f[g(x)]$ 或 $y=f\circ g$	对应规则；定义域；值域	结合律成立，$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$，但没有交换律
反函数	设 $y=f(x)$ 在 X 上是**一一对应的**，值域为 Y，$\forall y \in Y$，有满足 $f(x)=y$ 的唯一确定的 $x \in X$ 与之对应，由这样的关系所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$，就称为原函数 $y=f(x)$ 的**反函数**		$f: X \to Y$ $f^{-1}: Y \to X$ $f^{-1}(f)=I_X: X \to X$ $f(f^{-1})=I_Y: Y \to Y$ $(f^{-1})^{-1}=f: X \to X$ I_X 表示 X 上恒同变换
初等函数	基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算后得到的函数	有限次复合	

§4　具有某些特性的函数

有界函数	设 $f(x)$ 为定义 D 上的函数，若存在正数 M，使得每一个 $x \in D$ 有 $$\mid f(x) \mid \leqslant M$$ 则称 $f(x)$ 为 D 上的**有界函数**	$\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x) \leqslant \inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$， $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\} \leqslant \sup\limits_{x\in D} f(x)+\sup\limits_{x\in D} g(x)$
单调函数	设 $f(x)$ 为定义在 D 上的函数，若对任何 $x_1, x_2 \in D$，当 $x_1 < x_2$ 时，总有 ① $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的**增函数**，特别当成立严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ 时，称 $f(x)$ 为 D 上的**严格增函数**； ② $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的**减函数**，特别当成立严格不等式 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的**严格减函数**	严格单调函数必有反函数
奇函数和偶函数	设 D 为对称于原点的数集，$f(x)$ 为定义在 D 上的函数，若对每一个 $x \in D$ 有　$f(-x)=f(x)$　$(f(-x)=-f(x))$，则称 $f(x)$ 为 D 上的**偶(奇)函数**	
周期函数	设 $f(x)$ 为定义在数集 D 上的函数，若存在 $\sigma>0$，使得一切 $x \in D$，有 $f(x \pm \sigma)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，σ 称为 $f(x)$ 的一个**周期**	周期函数不一定有**基本周期**，如 $\mathbf{R}$ 上的狄利克雷函数

课后习题全解

§1 实数(教材上册 P4)

1. 设 a 为有理数，x 为无理数，证明：

(1)$a+x$ 是无理数； (2) 当 $a\neq 0$ 时，ax 是无理数.

解 (1) $a+x$ 是无理数.

假设 $a+x$ 是有理数，则存在整数 $p_1,q_1,q_1\neq 0$，使得

$$a+x=\frac{p_1}{q_1} \quad ①$$

a 是有理数，则存在整数 $p_2,q_2,q_2\neq 0$，使得

$$a=\frac{p_2}{q_2} \quad ②$$

将式 ② 代入式 ① 得

$$x=\frac{p_1q_2-p_2q_1}{q_1q_2}$$

$p_1q_2-p_2q_1,q_1,q_2$ 均为整数，$q_1q_2\neq 0$，因此 x 是有理数，与题设矛盾.

所以，$a+x$ 是无理数.

(2) 当 $a\neq 0$ 时，ax 是无理数.

采用与(1) 类似方法，$a=\frac{p_2}{q_2}$，$ax=\frac{p_1}{q_1}$，p_2,q_2,q_1 均不为零.

得
$$x=\frac{p_1q_2}{p_2q_1}$$

p_1q_2,p_2q_1 均为整数，且 $p_2q_1\neq 0$，因此 x 是有理数，与题设矛盾.

所以，ax 是无理数.

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解：

(1)$x(x^2-1)>0$； (2) $|x-1|<|x-3|$； (3) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{3x-2}$.

解 (1) 分解因式得
$$x(x+1)(x-1)>0$$

考虑方程 $x(x+1)(x-1)$ 的零点 $0,-1,1$，将数轴分为 4 部分，分别考虑 $x<-1,-1<x<0,0<x<1,x>1$.

经检验，$-1<x<0$ 或 $x>1$ 满足不等式.

因此该不等式的解为

$$\{x\in\mathbf{R}\mid -1<x<0 \text{ 或 } x>1\}$$

在数轴上表示，如图 1-1 所示.

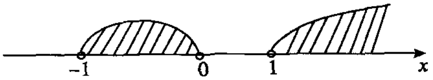

图 1-1

(2) 两边同时平方，得
$$(x-1)^2<(x-3)^2$$

化简得　　$x<2$

因此该不等式的解为　　$\{x\in\mathbf{R}\mid x<2\}$

在数轴上表示,如图 1-2 所示

图 1-2

(3) 由原不等式应有 $\sqrt{3x-2}\geqslant 0,\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant 0$,从而对原不等式两端平方,有

$$x-1+2x-1-2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\geqslant 3x-2$$

因此有 $2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\leqslant 0$,所以 $\sqrt{(x-1)(2x-1)}=0$,由此得 $x=1$,或 $x=\frac{1}{2}$.但检验知 $x=1$ 和 $x=\frac{1}{2}$ 均不符合原不等式.

所以原不等式的解集为 $\varnothing$.

3. 设 $a,b\in\mathbf{R}$,证明:若对任何正数 ε 有 $|a-b|<\varepsilon$,则 $a=b$.

解　假设 $a\neq b$,则根据实数集的有序性,有 $a>b$ 或 $a<b$,从而必有 $|a-b|>0$,令 $\varepsilon=|a-b|$,则 ε 为正数且满足 $|a-b|=\varepsilon$,这与假设 $|a-b|<\varepsilon$ 矛盾,从而必有 $a=b$ 成立.

4. 设 $x\neq 0$,证明 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2$,并说明其中等号何时成立.

证明　因 $0\leqslant(|x|-1)^2=x^2+1-2|x|$,则 $x^2+1\geqslant 2|x|$,所以

$$\frac{x^2+1}{|x|}=\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant 2$$

当且仅当 $|x|=1$,即 $x=\pm 1$ 时,等号才成立.

5. 证明:对任何 $x\in\mathbf{R}$ 有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$;(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

证明　(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant|(x-1)-(x-2)|=1$

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant|x-1|+|x-3|$

$$\geqslant|(x-1)-(x-3)|=2$$

6. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ ($\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数的集合).证明

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$$

你能说明此不等式的几何意义吗?

证明　欲证 $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$,

只需证 $(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2})^2\leqslant(b-c)^2$.即证 $2a^2-2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\leqslant-2bc$,

只需证 $a^2+bc\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$,即 $(a^2+bc)^2\leqslant(a^2+b^2)(a^2+c^2)$,

即证　　$2a^2bc\leqslant a^2(b^2+c^2)$.

由于 $a、b、c\in\mathbf{R}^+$,所以 $2bc\leqslant b^2+c^2,a^2>0$,所以有 $2a^2bc\leqslant a^2(b^2+c^2)$ 成立.

所以原不等式成立.

几何意义:二维平面上两点 $A(a,b),B(a,c)$,A,B 到原点的距离分别为 $\sqrt{a^2+b^2},\sqrt{a^2+c^2}$,$A$,$B$ 两点间距离为 $|b-c|$,原不等式等价于 $|OA-OB|\leqslant|AB|$,即两边之差小于第三边.

在坐标系中表示,如图 1-3 所示.

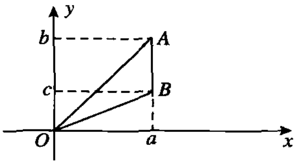

图 1-3

7. 设 $x>0,b>0,a\neq b$. 证明 $\dfrac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\dfrac{a}{b}$ 之间.

证明 若 $a<b$,因 $x>0,b>0$

所以 $\begin{cases} a+x<b+x, \\ ax<bx, \end{cases}$

由此可得 $\begin{cases} a+x<b+x, \\ ab+ax<ab+bx, \end{cases}$

变形得 $\begin{cases} \dfrac{a+x}{b+x}<1, \\ \dfrac{a+x}{b+x}>\dfrac{a}{b}, \end{cases}$

即 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+x}{b+x}<1$;

若 $a>b$,因 $x>0,b>0$.

所以 $\begin{cases} a+x>b+x, \\ ab+ax>ab+bx, \end{cases}$

即得 $1<\dfrac{a+x}{b+x}<\dfrac{a}{b}$;

综合上述结果,结论成立.

点评 本题可推广到一般情况

$b_i>0,(i=1,2,\cdots,n)$,则 $\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_n}$ 在 $\dfrac{a_1}{b_1},\dfrac{a_2}{b_2},\cdots,\dfrac{a_n}{b_n}$ 的最大值与最小值之间.

8. 设 p 为正整数,证明:若 p 不是完全平方数,则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

证明 假设 $\sqrt{p}$ 是有理数,则存在整数 $m,n,mn>0,m,n$ 互素,使得 $\sqrt{p}=\dfrac{m}{n}$,于是 $p=\dfrac{m^2}{n^2}$.

p 是正整数,可见 m^2 可被 n^2 整除,由于 m 与 n 互素,从而它们的最大公约数为 1. 这与 m,n 互素矛盾,所以 $\sqrt{p}$ 是无理数.

9. 设 a,b 为给定实数. 试用不等式符号(不用绝对值符号)表示下列不等式的解:

(1) $|x-a|<|x-b|$; (2) $|x-a|<x-b$; (3) $|x^2-a|<b$.

逻辑推理 分情况讨论,去掉绝对值符号,化为一般不等式.

解 (1) 不等式两边同时平方得

$$(x-a)^2<(x-b)^2$$

化简得 $2(b-a)x<b^2-a^2$

当 $b=a$ 时,得 $0<0$,无解;

当 $b>a$ 时,两边同除以 $2(b-a)$,不变号,$x<\dfrac{b+a}{2}$;

当 $b<a$ 时,两边同除以 $2(b-a)$,变号,$x>\dfrac{b+a}{2}$.

(2) 利用(1)题结论,

当 $b>a$ 时,$x<\dfrac{b+a}{2}$ ①

当 $b<a$ 时,$x>\dfrac{b+a}{2}$ ②

$$x-b>0 \Rightarrow x>b \qquad ③$$

所以综上所述,当 $b>a$ 时,结合 ①③,由 $\frac{b+a}{2}<b$,无解;

当 $b<a$ 时,结合 ②③,$x>\frac{b+a}{2}$;

当 $b=a$ 时,由(1) 知无解.

(3) 当 $b \leqslant 0$ 时,原不等式的解集为 $\varnothing$.

当 $b>0$ 时,原不等式等价于:$a-b<x^2<a+b$. 因此有

① 当 $a+b \leqslant 0$ 时,不等式的解集为 $\varnothing$;

② 当 $a+b>0$ 时,

(i) 如果 $a>b$,则解为 $\sqrt{a-b}<|x|<\sqrt{a+b}$

即 $\sqrt{a-b}<x<\sqrt{a+b}$ 或 $-\sqrt{a+b}<x<-\sqrt{a-b}$;

(ii) 如果 $a<b$,则解为 $|x|<\sqrt{a+b}$,

即 $-\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b}$.

§2 数集·确界原理(教材上册 P9)

1. 用区间表示下列不等式的解:

(1) $|1-x|-x \geqslant 0$; (2) $\left|x+\frac{1}{x}\right| \leqslant 6$;

(3) $(x-a)(x-b)(x-c)>0$(a,b,c 为常数,且 $a<b<c$); (4) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

解 (1) 当 $1-x \geqslant 0$ 时,不等式化为 $1-x \geqslant x$,解为 $x \leqslant \frac{1}{2}$;

当 $1-x<0$ 时,不等式化为 $x-1 \geqslant x$,无解.

综上所述,原不等式的解为 $x \leqslant \frac{1}{2}$.

用区间表示为 $x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$.

(2) 两边同时平方,得 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \leqslant 36$

化简,得 $x^2+\frac{1}{x^2}-34 \leqslant 0$

分解因式得

$$\left[x-(17+12\sqrt{2})\frac{1}{x}\right]\left[x-(17-12\sqrt{2})\frac{1}{x}\right] \leqslant 0$$

即 $\frac{1}{x^2}[x^2-(17+12\sqrt{2})][x^2-(17-12\sqrt{2})] \leqslant 0$

$$17-12\sqrt{2} \leqslant x^2 \leqslant 17+12\sqrt{2}$$

$$-3-\sqrt{8} \leqslant x \leqslant -3+\sqrt{8} \text{ 或 } 3-\sqrt{8} \leqslant x \leqslant 3+\sqrt{8}.$$

用区间表示为 $x \in [-3-\sqrt{8}, -3+\sqrt{8}] \cup [3-\sqrt{8}, 3+\sqrt{8}]$.

(3) 作函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$,$x \in \mathbf{R}$. 则由 $a<b<c$ 知

$$f(x)\begin{cases}<0, \text{当 } x\in(-\infty,a)\cup(b,c);\\ =0, \text{当 } x=a,b,c;\\ >0, \text{当 } x\in(a,b)\cup(c,+\infty).\end{cases}$$

因此 $f(x)>0$，当且仅当 $x\in(a,b)\cup(c,+\infty)$.

故原不等式的解集为

$$x\in(a,b)\cup(c,+\infty).$$

(4) 该不等式的解为 $\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

用区间表示为

$$x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3}{4}\pi\right], k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

2. 设 S 为非空数集，试对下列概念给出定义：

(1) S 无上界； (2) S 无界.

解 (1) S 无上界可表示为：设 S 为非空数集，对任意正数 $M\in\mathbf{R}$，都存在 $x\in S$，使得 $x>M$.

(2) 设 S 为非空数集，若对任意的 $M>0$，总存在 $x_0\in S$，使 $|x_0|>M$，则称数集 S 无界.

3. 试证明由(3)式所确定的数集 S 有上界而无下界.

解 (1) 对任何 $x\in\mathbf{R}$，$y=2-x^2\leqslant2$，任何一个大于 2 的实数都是 S 的上界，故数集 S 有上界.

(2) 对任意的 $M>0$，取 $x_0=\sqrt{3+M}\in\mathbf{R}$，存在 $y_0=2-x_0^2=2-3-M=-1-M\in S$ 而 $y_0<-M$，因此数集 S 无下界.

4. 求下列数集的上、下确界，并依定义加以验证：

(1) $S=\{x\mid x^2<2\}$； (2) $S=\{x\mid x=n!, n\in\mathbf{N}_+\}$；

(3) $S=\{x\mid x$ 为 $(0,1)$ 上的无理数$\}$； (4) $S=\{x\mid x=1-\frac{1}{2^n}, n\in\mathbf{N}_+\}$.

解 (1) $\sup S=\sqrt{2}$. 因 $\forall x\in S$，有 $x^2<2$，等价于 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$，故 $\sqrt{2}$ 是 S 的上界.

对 $\forall\alpha<\sqrt{2}$，由有理数的稠密性，$\exists r\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cap(\alpha,\sqrt{2})$，即 $r>\alpha$ 且 $r\in S$.

依定义 $\sup S=\sqrt{2}$；类似可证：$\inf S=-\sqrt{2}$.

(2) S 无上界，但 $\inf S=1$.

① 对 $\forall M>0$，取 $n=[M]+1\in\mathbf{N}_+$，而 $x=n!\geqslant n>M$，故 S 无上界，所以 $\sup S=+\infty$，

② 对 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，均有 $x=n!\geqslant1$，且对 $\forall\beta>1$，$\exists 1\in\mathbf{N}_+$ 及 $x_0=1!=1\in S$，有 $x_0<\beta$.

故 $\inf S=1$.

(3) $\sup S=1$，$\inf S=0$.

因对 $\forall x\in S$，有 $0<x<1$，且对 $\forall\beta>0$，由无理数的稠密性，$\exists r\in S$，使 $0<r<\beta$. 故 $\inf S=0$.

同理可证：$\sup S=1$.

(4) $\sup S=1$，$\inf S=\frac{1}{2}$，下面依定义验证. 对任意的 $x\in S$，有 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$，所以 1、$\frac{1}{2}$ 分别是 S 的上、下界，对任意的 $\varepsilon>0$，必有正整数 $n_0\in\mathbf{N}_+$，使得 $\frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon$，则存在 $x_0=1-\frac{1}{2^{n_0}}\in S$，使 $x_0>1-\varepsilon$，所以 $\sup S=1$. 又存在 $x_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\in S$，使 $x_1<\frac{1}{2}+\varepsilon$，所以 $\inf S=\frac{1}{2}$.

5. 设 S 为非空有下界数集，证明：$\inf S=\xi\in S\Leftrightarrow\xi=\min S$.

证明　充分性：设 $\xi=\inf S\in S$，则对一切 $x\in S$，有 $x\geqslant\xi$，而 $\xi\in S$，故 ξ 是数集 S 中最小的数，即 $\xi=\min S$.

必要性：设 $\xi=\min S$，则 $\xi\in S$，下面验证 $\xi=\inf S$：

(1) 对一切 $x\in S$，有 $x\geqslant\xi$，即 ξ 是 S 的下界；

(2) 对任何 $\beta>\xi$，只须取 $x_0=\xi\in S$，则 $x_0<\beta$，从而 $\xi=\inf S$.

6. 设 S 为非空数集，定义 $S^-=\{x\mid -x\in S\}$. 证明：

(1) $\inf S^-=-\sup S$；　(2) $\sup S^-=-\inf S$.

证明　(1) 令 $\xi=\inf S^-$，根据下确界的定义知 ξ 满足下列性质：

(ⅰ) 对一切 $x\in S^-$，有 $x\geqslant\xi$；

(ⅱ) 对任何 $\beta>\xi$，存在 $x_0\in S^-$，使得 $x_0<\beta$.

由(ⅰ)知 $S^-=\{x\mid -x\in S\}$，$x\geqslant\xi$，即 $-x\leqslant-\xi$. 即对 S 中的任意元素 $-x$，有 $-x\leqslant-\xi$，即 $-\xi$ 是 S 的上界；

由(ⅱ)，对任何 $-\beta<-\xi$，存在 $-x_0\in S$，使得 $(-x_0)>(-\beta)$，即 $-\beta$ 是 S 的最小上界.

因此，$-\beta=\sup S$，即

$$\beta=-\sup S$$

由上可得

$$\inf S^-=\beta=-\sup S$$

(2) 同理可证.

7. 设 A、B 皆为非空有界数集，定义数集 $A+B=\{z\mid z=x+y,x\in A,y\in B\}$. 证明：

(1) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$；　(2) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

证明　(1) 用定义直接验证：

① 对一切 $z\in A+B$，显然有 $z=x+y\leqslant\sup A+\sup B$，即 $\sup A+\sup B$ 是 $A+B$ 的上界；

② 对任何 $\alpha<\sup A+\sup B$，存在分解 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，使得 $\alpha_1<\sup A$，$\alpha_2<\sup B$. 对 α_1，由定义，存在 $x_0\in A$，使得 $x_0>\alpha_1$；对 α_2，由定义，存在 $y_0\in B$，使得 $y_0>\alpha_2$. 则对 α，存在 $z_0=x_0+y_0\in A+B$，使得 $z_0>\alpha_1+\alpha_2=\alpha$. 即 $\sup A+\sup B$ 是 $A+B$ 的上确界.

(2) 与(1)方法完全相仿，同理可证.

§3　函数概念(教材上册 P15)

1. 试作下列函数的图像：

(1) $y=x^2+1$；　(2) $y=(x+1)^2$；　(3) $y=1-(x+1)^2$；

(4) $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$；　(5) $y=\begin{cases}3x, & |x|>1\\ x^3, & |x|<1.\\ 3, & |x|=1\end{cases}$

解　利用描点作图法，各函数的图像如图 1-4 至图 1-8 所示

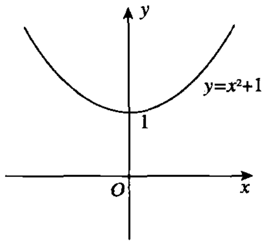

图 1-4

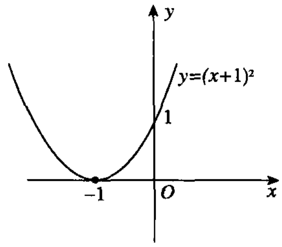

图 1-5

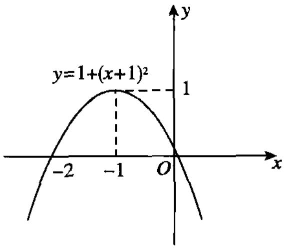

图 1-6

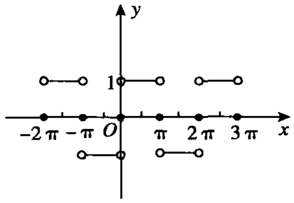

图 1-7

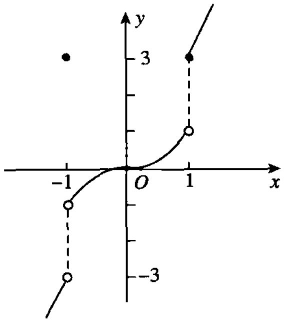

图 1-8

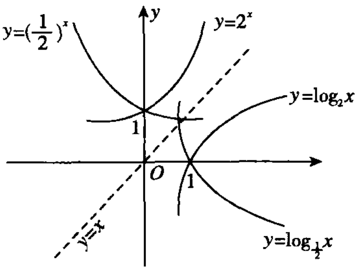

图 1-9

2. 试比较函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 分别当 $a=2$ 和 $a=\frac{1}{2}$ 时的图像.

解 如图 1-9 所示,$\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$

所以,$y=a^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图像关于 y 轴对称;

$$\log_{\frac{1}{a}}x=-\log_a x$$

所以,$y=\log_a x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$ 的图像关于 x 轴对称;

$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数.所以其图像关于直线 $y=x$ 对称.

3. 根据图 1-10 写出定义在[0,1]上的分段函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的解析表达式.

解 如图 1-10 所示,利用直线的两点式方程或点斜式方程容易得到