最新数学奥林匹克
专题讲座与解题技巧

初中·逻辑推理

中央民族大学出版社

最新数学奥林匹克专题讲座与解题技巧

初中　逻辑推理

张　程、章建跃　李　英
张秀平　刘仁权　朱文芳

中央民族大学出版社

责任编辑：凌　弘
封面设计：金　文

最新数学奥林匹克专题讲座与解题技巧
初中　逻辑推理
*
中央民族大学出版社出版
（北京西郊白石桥路27号）
（邮政编码：100081　电话：68472815）
新华书店北京发行所发行
北京京海印刷厂印刷

787×1092　32开　5.875印张　110千字
1997年6月第3次印刷
印数：19001—25000册

ISBN 7-81001—436-6/G・180
定价：5.50元

目　　录

一、常用的解题方法（上）

（一）分析与综合

在解答数学问题时，关键在于找到从已知条件到结论的通道，即解题的途径。为了找到解题的途径，根据思维推理过程的方向不同，思考方法分为分析法和综合法。

1. 综合法

综合法是从已知条件出发，运用公理、定理，通过一系列的正确推理，最终得出所需结论。简单地说，就是由因（条件）导果（结论）。

例1 已知 a，b，c 是非零实数，且 $a^2+b^2+c^2=1$，$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$，求 $a+b+c$ 的值。

解 $\because abc\neq0$，所以可用 abc 乘以已知中第二个式子的两边，得

$$a^2c+a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a=-3abc$$

即 $ab(b+a)+abc+bc(b+c)+abc+ca(a+c)+abc=0$

$$\therefore\quad (a+b+c)(ab+bc+ca)=0$$

$$\therefore\quad a+b+c=0 \text{ 或 } ab+bc+ca=0$$

若 $ab+bc+ca=0$， 则有 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$，所以 $a+b+c=\pm1$。

综合上述：$a+b+c=0$ 或 $a+b+c=\pm 1$。

例2 已知 a 和 b 为方程 $x^4+x^3=1$ 的根，且 $a\neq b$，求证：ab 为方程 $x^6+x^4+x^3-x^2-1=0$ 的根。

证 由于 a、b 为 $x^4+x^3=1$ 的根，则有

$$a^4+a^3=1 \qquad ①$$

$$b^4+b^3=1 \qquad ②$$

①×②得 $$a^3b^3(a+1)(b+1)=1$$

$$\therefore\quad a^3b^3(ab+a+b+1)=1$$

令 $a+b=p$，$ab=q$，上式变为

$$q^3(p+q+1)=1 \qquad ③$$

①－②得 $a^4-b^4+a^3-b^3=0$ 左边因式分解得

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3+a^2+ab+b^3)=0$$

$\because\quad a\neq b$，

$\therefore\quad a-b\neq 0$ 有

$$a^3+a^2b+ab^2+b^3+a^2+ab+b^2=0$$

$$\frac{1}{a}(a^4+a^3)+\frac{1}{b}(b^4+b^3)+ab(a+b+1)=0$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+ab(a+b+1)=0$$

即 $$\frac{p}{q}+q(p+1)=0$$

$\therefore\quad p=\dfrac{-q^2}{1+q^2}$ 代入③式化简得

$$q^6+q^4+q^3-q^2-1=0$$

即 ab 为方程 $x^6+x^4+x^3-x^2-1=0$ 的根。

例3 已知a，b，c都是正整数，a为素数，且$a^2+b^2=c^2$，求证：$a<b$，以及$b+1=c$。

证 $a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$，由于a是素数，因此a^2的正约数只有3个：1，a，a^2，又因为$c-b>0$，$c+b>0$，且$c-b<c+b$，所以必有$c-b=1$且$c+b=a^2$，所以$b+1=c$得证。

$a^2=c+b=2b+1$，所以a^2为奇数，则a也为奇数，令$a=2k+1$（k为自然数），则有$(2k+1)^2=2b+1$解出$b=2k+2k^2>2k+1=a$，所以$a<b$得证。

例4 A，B，C，D，E五个球队进行一场循环赛，当比赛进行到一定阶段时，统计4个队已赛过的场次为：A队4场；B队3场；C队2场；D队1场。问哪些队之间已互相赛过？其中E队已比赛过几场？

解 五个队的循环赛全部比赛应有十场，它们是，AB，AC，AD，AE，BC，BD，BE，CD，CE，DE。由于A已赛过4场，必是AB，AC，AD，AE；又由于D只赛过1场，只能是AD，所以，BD，CD，DE没有比赛；又因为B已赛了3场，而BD又没有赛，所以这3场为AB，BC，BE，而C已赛的两场也只能是AC，BC。

所以，已赛过的是AB，BC，AC，AD，AE，BE，其中E比赛过2场：AE和BE。

例5 沿江有A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6六个码头，相邻两码头间的距离相等，早晨有甲、乙两船从A_1码头出发，各自在这些码头之间多次往返运送货箱，傍晚，甲船停泊在A_6码头，而乙船返回到A_1码头，求证：无论如何，两船的航程总不相等。（假定船航行在相邻两码头之间的途中不改

变航向）

证　六个码头把 A_1 到 A_6 这一段水路等分为5小段，设每段长为 a。

由于乙早晨从 A_1 出发，傍晚又返回 A_1，因此乙往返的每小段水路的次数总是相同，因此乙的航程是 a 的偶数倍。

甲的航程是从 A_1 到 A_6，再加上各码头之间的往返路程，所以航程是 $5a+a$ 的偶数倍，是 a 的奇数倍。

因此，甲、乙的航程不会相等。

在上面几个例题的解答中，我们全是由已知条件出发，一步一步推演出结论的。运用综合法解题，叙述简明，容易使人理解解题过程，但是，综合法由条件出发，支路很多，可应用的定理、公理也多，往往不知应该从何处下手，所以当用综合法不易找到解题思路时，我们不妨改变一下思考的方向，运用分析法，倒过来从问题的结论出发来考虑。

2. 分析法

分析法是由问题的结论出发，承认它是正确的，寻求在什么情况下结论才是正确的，这样一步一步，逆而推之寻求结论成立的条件，一旦条件成立就可断言结论正确。简单地说，就是执果（结论）索因（条件）。

例6　在△ABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为a，b，c，A、B、C 三个角满足 $2B=A+C$，求证：$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{3}{a+b+c}$。

分析　由 $2B=A+C$ 及 $A+B+C=180^\circ$ 易知 $B=60$。

用综合法不易看出如何由 $B=60^\circ$ 推出结论，本题用分析法。

要证 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$，只需证 $\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$，即证 $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}=1$

这又需证 $c(b+c)+a(a+b)=(a+b)(c+b)$

需证
$$b^2=a^2+c^2-ac \tag{1}$$

由于 $\angle B=60^\circ$ 由余弦定理

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos 60^\circ=a^2+c^2-ac$$

即(1)式成立，又由于(1)式以上各步均可以逆推，所以原式成立。

例7 求证：不论 x，y 为什么整数，等式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$ 恒不成立。

证　要证 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\neq\frac{1}{x+y}$

只需证
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}=\frac{x^2+xy+y^2}{xy(x+y)}\neq 0$$

只需证
$$x^2+xy+y^2\neq 0$$

又需证
$$\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2\neq 0$$

$\because$ $x\neq 0$，且 $y\neq 0$，否则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$ 无意义

$\therefore$ 当 $x\neq 0$，$y\neq 0$ 时 $\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2\neq 0$，

$$\therefore \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\neq\frac{1}{x+y}.$$

例8 设 a 为任意的正奇数，证明：一定存在整数 x，y，使得 $5x^2+11y^2-1$ 为 a 的倍数。

证 要找出 x，y，使 $5x^2+11y^2-1$ 为 a 的倍数，而$5x^2+11y^2-1$ 不能分解因式。为此我们设 $x=y$，$5x^2+11y^2-1=16x^2-1=(4x+1)(4x-1)$

设 $a=2k+1$，只要选取适当的 x，使 $4x-1$ 是 $2k+1$的倍数即可，取 $x=k^2$，此时有

$$4x-1=4k^2-1=(2k-1)(2k+1)$$

$$\begin{aligned}16x^2-1&=(4k^2+1)(4k^2-1)=(4k^2+1)(2k+1)(2k-1)\\&=(4k^2+1)(2k-1)a\end{aligned}$$

所以取 $x=y=k^2$ 时，$5x^2+11y^2-1$ 为 $a=2k+1$ 的倍数。

例9 设 a，b，c 为三角形的三边，$m>0$，求证：$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$

证 先假设结论成立，寻找与原不等式等价的不等式。

$$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{a(b+m)+b(a+m)}{(a+m)(b+m)}>\frac{c}{c+m}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{2ab+m(a+b)}{ab+m(a+b)+m^2}>\frac{c}{c+m}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{ab+m(a+b)+m^2}{2ab+m(a+b)}<\frac{c+m}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\frac{m^2-ab}{2ab+m(a+b)}<1+\frac{m}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2c-abc<2mab+m^2(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2[c-(a+b)]<ab(2m+c)$$

即要证原不等式，只需证上面最后的不等式，而 $c<a+b$，故 $m^2[c-(a+b)]<0$，而 $ab(2m+c)>0$，所以最后的不等式成立，从而原不等式成立。

例10　证明：可以找到 n 个正整数 x_1，x_2，……，x_n，使得 $x_1+x_2+\cdots+x_n=x_1\cdot x_2\cdots x_n$ （$n\geqslant 2$）。

分析　直接找 x_1，x_2，……，x_n 不太容易，我们先假设等式成立，再找 x_1，x_2……，x_n，应满足的条件。

假设有 n 个正整数 x_1，x_2……，x_n （$n\geqslant 2$）使 $x_1+x_2+\cdots+x_n=x_1\cdot x_2\cdots x_n$ ①成立。由于若干个正整数的积一定应当大于它们的和，除非其中有一些正整数就是1。因此我们可以尝试着把 x_1，x_2，……x_n 中的若干取为1。显然 x_1，x_2，……x_n 不能都是1，也不能有 $n-1$ 个1，所以试着取 $x_3=x_4=\cdots=x_n=1$，由 ① 得

$$x_1+x_2+(n-2)=x_1x_2$$

从中解出　$$x_1=\frac{x_2+(n-2)}{x_2-1}=1+\frac{n-1}{x_2-1}$$

由于 x_1 是正整数，因此 x_2-1 必须整除 $n-1$，不妨取 $x_2-1=1$，$x_2=2$，得 $x_1=n$，得到一组正整数 $x_1=n$，$x_2=2$，$x_3=x_4=\cdots=x_n=1$，显然使 ① 成立。

上面求解过程是对$n\geqslant 3$做的，当$n=2$时可取$x_1=x_2=2$，则有$x_1+x_2=x_1\cdot x_2=4$成立，命题得证。

分析法先假设结论为真，倒推而上，容易启发思考，每一步推理都有较明确的目的，知道推理的依据，使人了解思索的过程，但在叙述上不如综合法简明，因此，一般在用分析法找到解题途径后，再将分析法探索的过程倒转过来用综合法写出。

最后要强调的是，对于给定的数学问题，一般并不单纯地用某一种方法去寻找解题途径，而是同时应用综合法和分析法去寻找。下面举两个例子。

例11　正整数a，b，c，d满足$ab=cd$，$a+b=c-d$，证明：存在一个直角三角形，各边的长都为正整数，且面积为ab。

分析　假设找到了一个直角三角形满足条件，两直角边为x，y，斜边为z。关键是x，y，z各是多少？题目中表明a，b，c，d与直角三角形三边长之间具体数值关系的只有“面积为ab”这一条，从这里入手，依假设，$\frac{1}{2}xy=ab$，即$2ab=xy$，而x，y为正整数，所以$2ab=xy$表明$2ab$可以分解成两个正整数之积，而这两个正整数就是两个直角边的长。我们寻找这个直角三角形三边的入手点就是根据条件$ab=cd$和$a+b=c-d$“分解$2ab$”。

证　$2ab=ab+cd=ab+d(a+b+d)$

$$=(b+d)(a+d)$$

如果以$b+d$，$a+d$为直角边构成的直角三角形，显然其面积为ab，且两直角边长均为正整数，那么斜边是否为

正整数呢？下面用勾股定理证明斜边长也确实是正整数。

$$\begin{aligned}(b+d)^2+(a+d)^2&=a^2+b^2+2bd+2ad+2d^2\\&=a^2+b^2+2d(a+b+d)\\&=a^2+b^2+2dc\\&=a^2+b^2+2ab\\&=(a+b)^2\end{aligned}$$

斜边为 $a+b$，也为正整数。

所以，以 $a+d$，$b+d$ 为直角边，$a+b$ 为斜边的直角三角形满足条件，问题得证。

例12 设正整数 n 的不同正因数的个数为 $N(n)$，例如：24 有正因数 1，2，3，4，6，8，12，24 共 8 个，所以 $N(24)=8$，试确定和 $N(1)+N(2)+\cdots+N(1993)$ 是奇数还是偶数？

分析 $N(1)$，$N(2)$，……$N(1993)$ 这1993 个数中偶数不影响和的奇偶性，关键是这 1993 个数中有多少个奇数？这又归结为 $N(n)$ 何时是奇数？何时是偶数？若 d 是 n 的因数，则 $\frac{n}{d}$ 也是 n 的因数，例如，4 是24的因数，$\frac{24}{4}=6$ 也是24的因数。一般情况下，d 与 $\frac{n}{d}$ 不相等，这样 n 的因数是成对出现的，而只有当 n 是平方数且 d 为 $\sqrt{n}$ 时，d 与 $\frac{n}{d}$ 表示 n 的同一个因数，例如，6 与 $\frac{36}{6}=6$ 是 36的同一个因数。因此，当 n 不是平方数时，“因数成对”，所以 $N(n)$ 为偶数，当 n 为平方数时，$N(n)$ 为奇数。

解 由于 $44^2<1993<45^2$，所以 1,2,……1993 中有 44

个平方数，又由于当n为平方数时，$N(n)$为奇数，否则$N(n)$为偶数，所以，$N(1), N(2), \cdots\cdots, N(1993)$中共有44个奇数，其余都为偶数，所以$N(1)+N(2)+\cdots+N(1993)$为偶数。

（二）归纳与猜想

1. 归纳法

归纳法是由一系列有限的特殊事例得出一般性结论的推理方法。用归纳法可以帮助我们从具体事例中发现一般的规律。归纳法又分完全归纳法和不完全归纳法。

(1) 完全归纳法

完全归纳法是列举所研究对象的一切特殊事例的前提下推出关于全部对象的一般性结论的一种推理方法。

由于完全归纳法是对所有的事例或情形全部观察、讨论之后才做出一般性结论，因此，所得结论是完全可靠的。所以完全归纳法可作为数学的严格推理方法。

例13 试证：6至100的每个偶数都可以表示为两个质数之和。

证 由于6到100只有$6, 8, \cdots, 98, 100$这48个偶数。下面对这48个偶数逐个观察，看是否可以表示为两个质数之和：

$$6=3+3,\ 8=3+5,\ 10=3+7\quad 12=5+7$$
$$\cdots\cdots\quad 98=19+79,\ 100=3+97.$$

这48个偶数每个都可以表示为两个质数之和，所以，6至

100的每个偶数都可以表示为两个质数之和，证毕。

说明 “任何大于4的偶数可以分解为两个质数之和”。这就是著名的“哥德巴赫猜想”。

例14 设a，b，c，d是正整数，且$a^2+b^2=c^2+d^2$，求证：$a+b+c+d$一定是合数。

证 由于a，b，c，d是自然数，且$a^2+b^2=c^2+d^2$，因此，a，b，c，d中奇数的个数只能是偶数个。

若a，b，c，d中没有奇数，即均为偶数，则$a+b+c+d$必为偶数且大于2，所以为合数。

若a，b，c，d中有2个奇数，即二奇二偶，则$a+b+c+d$也为大于2的偶数，是合数。

若a，b，c，d中有4个奇数，且都是正奇数，则$a+b+c+d$也为大于2的偶数，是合数。

综合上述3种情况有：$a+b+c+d$为合数。

(2) 不完全归纳法

不完全归纳法是根据一部分对象所具有的结论而作出全部对象都具有该结论这个一般性结论的推理方法。

由于不完全归纳法的根据不充分，因此所得结论可能是真实的，也可能是错误的。

例如$a_n=n^2+n+41$，可以计算出：$a_1=43$，$a_2=47$，$a_3=53$，……，$a_{39}=1601$都是质数。但由此得出的“对一切自然数n，$a_n=n^2+n+41$都是质数”这个一般性结论是错误的，因为$a_{40}=1681=41\times 41$为合数。

所以不完全归纳法不能作为数学的严格推理方法。用不完全归纳法得出的结论，只能作为一种猜想，其正确与否，尚需检验或证明。

尽管如此，不完全归纳法仍然是一种重要的、常用的推理方法，因为用不完全归纳法，能迅速发现规律，导致真理的发现，预见证明方法和思路。归纳、猜想、证明是数学发展的必由之路。

2. 归纳、猜想、证明

当代著名美国数学家波利亚（G.Polya）在他的《数学与猜想》一书中写到："数学的创造过程是与任何其它知识的创造过程一样的，在证明一个数学定理之前，你先得猜测这个定理的内容，在你完全作出详细证明之前，你先得推测证明的思路。你先得把观察到的结果加以综合然后加以类比，你得一次又一次地进行尝试。数学家的创造性工作成果是论证推理，即证明；但是这个证明是通过合情推理，通过猜想而发现的。只要数学的学习过程稍能反映出数学的发明过程的话，那么就应当让猜测、合情推理占有适当的位置"。

这段话精辟地论述了猜想在数学创造过程中的重要地位。数学竞赛中很多题目的解决，就是运用了归纳、猜想、证明的思维方法。

例15 计算 $\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n个}-\underbrace{22\cdots2}_{n个}}$

分析 由于$\sqrt{11-2}=3$，$\sqrt{1111-22}=33$，$\sqrt{111111-222}=333$，……，因此我们很自然地猜测原式$=\underbrace{33\cdots3}_{n个}$，下面就是要证明这个猜测是对的。

解 原式$=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{n个}\underbrace{00\cdots0}_{n个}-\underbrace{11\cdots1}_{n个}}$

$$=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{n个}\times(10^n-1)}$$

$$=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\times\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}}}$$

$$=\sqrt{\underbrace{33\cdots3}_{n\text{个}}\times\underbrace{33\cdots3}_{n\text{个}}}$$

$$=\underbrace{33\cdots3}_{n\text{个}}$$

例16　证明 $a_n=\underbrace{11\cdots1}_{n-1\text{个}}\ \underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}}5$ 是一个完全平方数。

分析　先计算出前 n 个 a_n，

$n=1$ 时，$a_1=25=5^2$，

$n=2$ 时，$a_2=1225=35^2$，

$n=3$ 时，$a_3=112225=335^2$

……

猜想　$a_n=\underbrace{33\cdots3}_{n-1\text{个}}5^2$

证　$\underbrace{33\cdots3}_{n-1\text{个}}5^2=(\underbrace{33\cdots3}_{n\text{个}}+2)^2$

$$=\left(\frac{10^n-1}{3}+2\right)^2$$

$$=\left(\frac{10^n+5}{3}\right)^2$$

$$=\frac{10^{2n}+10\cdot10^n+25}{9}$$

$$=\frac{10^{2n}-1}{9}+\frac{10^{n+1}-1}{9}+3$$