重庆市高职高专统编教材

重庆市教育委员会
重庆市高职高专统编教材编写委员会 组编

上册

应用高等数学基础

YINGYONG GAODENG SHUXUE JICHU

主　编　李开慧　余　英

副主编　胡先富　龙　辉　徐光霞

主　审　张广祥

重庆大学出版社

应用高等数学基础

上 册

主 编 李开慧 余 英
副主编 胡先富 龙 辉 徐光霞
主 审 张广祥

重庆大学出版社

•内容提要•

本书根据教育部制定的高职高专教育高等数学课程基本要求,贯彻以"应用为目的,以够用为度"的原则编写而成.全书分上、下两册共9章.上册包括函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学,多元函数微积分初步4章;下册包括常微分方程,无穷级数,线性代数,概率与数理统计,拉普拉斯变换5章.书末附有习题答案与提示.

本书文字通俗易懂,例题丰富,对解题步骤及思路进行了归纳小结,便于自学.每章后的复习题,适当拓宽了知识面,为读者继续深造打下基础.

本书适用于高等专科及高等职业技术教育工程类、文经类各专业,也可作为"专升本"的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学基础.上册/李开慧主编.—重庆:重庆大学出版社,2005.7
重庆市高职高专统编教材
ISBN 7-5624-3442-5

Ⅰ.应… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第074140号

•重庆市高职高专统编教材•
应用高等数学基础
上 册
重庆市教育委员会
重庆市高职高专统编教材编写委员会 组编
主 编 李开慧 余 英
副主编 胡先富 龙 辉 徐光霞
主 审 张广祥
责任编辑:肖顺杰 何建云 版式设计:肖顺杰
责任校对:邹 忌 责任印制:秦 梅
*
重庆大学出版社出版发行
出版人:张鸽盛
社址:重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内
邮编:400030
电话:(023) 65102378 65105781
传真:(023) 65103686 65105565
网址:http://www.cqup.com.cn
邮箱:fxk@cqup.com.cn(市场营销部)
全国新华书店经销
重庆华林天美彩色报刊印务有限公司印刷
*
开本:787×1092 1/16 印张:11.75 字数:293千
2005年7月第1版 2005年7月第1次印刷
印数:1—7 000
ISBN 7-5624-3442-5 定价:16.00元

重庆市高职高专统编教材编写委员会

前言

《应用高等数学基础》(包括高等数学、线性代数、概率与数理统计)是高等专科教育和高等职业技术教育工程类、文经类各专业必修的基础课程之一."高等数学"课程既能帮助学生获得适应未来社会发展所必需的数学知识、重要的数学思想方法和必要的应用技能,又能培养学生学会运用数学思维方式去观察、分析问题,对全面提高学生的综合素质,培养创新型人才至关重要.

为满足21世纪我国高职高专教育大力发展的需要,本书依据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,贯彻以应用为目的,以必需够用为度的原则,结合高职高专学生的实际情况及数学课程改革的需要编写而成.

参加编写的人员长期从事高等数学、线性代数、概率与数理统计的教学工作,具有丰富的实践经验.在编写过程中,作者力求将当前数学教育改革的新理念、新成果及自身在改革实践中的探索和经验融入其中,在教材的内容体系、教学方法和教学手段等方面做了一些探索.

本书具有以下几个特点:

1. 为了提高学习效率,本书在初等数学与高等数学的衔接上做了较大的变动,适当删减了初等数学的内容,以利于教师根据学生实际情况灵活掌握.

2. 全书采取"混编"的方式,将高等数学、线性代数、概率与数理统计三个模块汇集在一起,有利于加强应用数学内部的联系,有利于教师和学生根据不同专业及不同层次需要做适当的取舍,力求满足多样化的学习需求.

3. 根据职业技术教育的特点,注重实用,淡化数学推导.书中较多的定理未给出严格的数学证明,而代之以几何直观上的解释;所涉及的数学概念,绝大多数在适当的问题情景之下引入,尽可能展现数学概念的实际背景.例如第1章数列及函数的极限概念,均采用典型实例,用直观的图形、图表加以说明,从而引入描述性定义,淡化了"ε—N","ε—δ"定义,使抽象的数学概念形象化.

4. 在一元积分学中,定积分概念是高等数学的难点,本书在这一章做了较大的改动.在不定积分讲完以后,直接给出定积分的描述性定义及几何意义.在本章末加"※"号的第5节"再论定积分定义",可作为要求较高的专业或学有余力的读者选学;这一节不讲,也不会给教学带来不方便.从某种意义上摆脱了定积分定义对高职高专学生的羁绊.

5. 本书注重对学生数学建模思想和解决实际问题能力的培养.全书在保证基本训练题型的基础上,尽可能收集编写了一

些与现实生活、生产活动密切相关的应用实例，以提高学生应用数学的能力．

6．本书文字通俗易懂，例题丰富，对解题步骤及思路进行了归纳小结，力求构建一个有利于学生自主学习的平台．

7．本书依据《重庆市普通高等学校专转本数学考试大纲》要求编写，可帮助专升本学生提高数学考试的应试能力．本书每章后附有复习指导，内容包括本章常见习题类型及解题方法小结，并配有复习题．

全书分为上、下两册．上册内容包括微积分及其应用．下册内容包括常微分方程、无穷级数、线性代数、概率与数理统计、拉普拉斯变换．各册书末均有习题答案与提示．

本书分必修的基础部分与带“※”号的选修部分，它既适用于学制三年的高职数学，也可用于学制二年的高职数学．※号部分可以根据教学学时和专业要求灵活选用．

本书可供高等专科及高等职业技术教育工程类、文经类各专业作为数学教材使用．

参加本书编写的有：重庆师范大学李开慧（第1章）、徐光霞（第2章），重庆社会工作职业学院胡先富（第3章），重庆工业职业技术学院龙辉（第4章），重庆光彩职业技术学院黄江（第5章），重庆信息职业技术学院林志刚（第6章），重庆电子职业技术学院余英（第7章），重庆职业技术学院郑文（第8章）．本书由李开慧、余英担任上、下册主编，并制定了上、下册的编写大纲，完成了书稿的修改和统稿工作．

本书属重庆市高职高专规划教材．在组织编写和统稿过程中，受到重庆市教委有关领导的关心指导，得到本市各兄弟院校的大力支持及重庆大学出版社的鼎立相助．本书主审西南师范大学教授张广祥详细审阅了初稿，并对初稿提出了许多宝贵意见．在此我们一并表示衷心感谢．

由于编者水平有限，加之高职高专教材起步晚，目前尚处于探索阶段，虽然我们尽了最大努力，但书中难免存在疏漏之处，我们期望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中不断完善．

编　者

2005年2月

目 录

1

函数　极限　连续

函数是对现实世界中各种变量之间相互依赖关系的一种刻画，它是高等数学的重要研究对象. 极限概念是微积分中最主要的基本概念，极限方法是贯穿于高等数学各个领域的一种重要方法. 本章将介绍函数、极限、连续及其有关的基本概念、性质及计算.

1.1　函数及其性质

1.1.1　预备知识

1)常量与变量

我们在观察各种自然现象或研究实际问题的时候，会遇到许多的量，这些量一般可分为两种：

常量　在观察过程中保持固定不变的量，通常用字母 a,b,c 等表示.

变量　在观察过程中可取不同数值的量，通常用字母 x,y,z 等表示.

例如把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量，而气体的温度和压力则是变量.

2)区间

任何一个变量，总有一定的变化范围. 如果变量的变化是连续的，常用区间来表示. 下面介绍各种区间的名称和记号.

设 a 与 b 是两个实数，且 $a<b$，则满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体叫做闭区间，记作 $[a,b]$，其中 a、b 叫做区间端点，$b-a$ 叫做区间长度.

区间也可用集合表示，例如闭区间 $[a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$. 在数轴上，它表示介于 a 与 b 两个点之间的线段上点的全体实数. 类似地还有其他一些类型的区间：

$(a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x<b\}$，开区间；

$(a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\leqslant b\}$，左半开右半闭区间；

$[a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x<b\}$，左半闭右半开区间；

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant b\}$，左无限右半闭区间；

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$，左无限右半开区间；

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a\}$，左半闭右无限区间；

$(a, +\infty] = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$，左半开右无限区间；

$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in \mathbf{R}\}$，无限区间，表示全体实数.

3）邻域

邻域　以点 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0)$.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 就是点 x_0 的一个邻域，这个邻域称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$.

$$U(x_0,\delta) = \{x : x_0-\delta < x < x_0+\delta\} = \{x : |x-x_0| < \delta\}$$

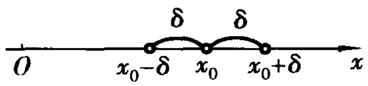

图 1.1

点 x_0 称为邻域中心，δ 称为邻域的半径. 如图 1.1 所示.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉，称为点 x_0 的去心邻域，记作

$$\mathring{U}(x_0,\delta) = \{x : 0 < |x-x_0| < \delta\}$$

这里 $0 < |x-x_0|$ 表示 $x \neq x_0$.

1.1.2　函数

在研究实际问题时，所涉及的变量往往不止一个，这些变量总有一定的联系，即其中一个量的变化常常引起其他量也随之变化，下面考察几个具体例子.

例 1.1　圆的面积 S 与它的半径 r 之间的相依关系由公式 $S=\pi r^2$ 给定，当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时，由公式可以确定圆面积 S 的相应数值.

例 1.2　某工厂每天生产产品的件数为 x，机械设备等固定成本为 1 500 元，生产每件产品所花费的人工费和原材料费等变动成本为 8 元，那么每天日产量 x 与每天的生产总成本 C 之间的对应关系由式子 $C = 1\,500 + 8x$ 给出. 假定该厂日产量最多为 300 件，那么当产量 x 在数集 $\{0, 1, 2, \cdots, 300\}$ 上任意取定一个数值时，C 就有一个确定的数值与它对应.

例 1.3　据统计资料，近年来我国运动健儿在奥运会上夺得金牌数的变化情况如表 1.1 所示.

表 1.1

年份/t	1988	1992	1996	2000	2004
金牌数/y	5	16	16	28	32

从表 1.1 看出，t 在数集 $\{1988, 1992, 1996, 2000, 2004\}$ 中任意取定一个数值时，就有一个金牌数 y 与它对应.

例 1.4　图 1.2 是某地用温度自动记录仪记录的该地某天 24 h 的气温变化曲线，该曲线描述了当天气温随时间 t 变化的情况，对 0 ~ 24 h 内的每一个时刻 t，图 1.2 中的曲线都有一个确定的气温 T 与它对应.

上面 4 个例子的实际意义虽然各不相同，但是它们有一个共同点. 它们都是通过一定的对

应规则(公式、表格、图像)来反映两个变量之间相互依赖的对应关系,这种对应关系就是函数概念的实质.

1)定义

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集.如果当 x 在 D 内任意取定一个值时,通过一定的法则 f,变量 y 总有确定的数值与 x 对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$.其中 x 称为自变量,y 称为因变量.

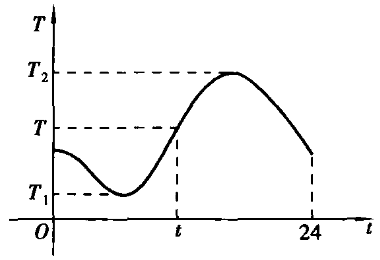

图 1.2

数集 D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域,记为 D_f,当 x 取遍 D 中的一切数值时,对应 y 的全体值所构成的集合称为函数的值域,记为 R_f.

通过对函数定义的分析不难发现,确定一个函数,起决定作用的两要素是:定义域 D_f 及对应法则 f.如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就相同,否则就不同.

例 1.5 下列各组函数是否相同?为什么?

(1) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(2) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$.

解 (1)不相同.因为 $f(x)=x$,而 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$,两个函数的对应法则不同,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

(2)不相同.因为 $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$D_g=(0,+\infty)$,两个函数的定义域不同,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

研究函数时,要注意函数的定义域,一般可从两个方面来考察:

(1)对于实际问题中的函数,其定义域由实际意义来确定,如例 1.4 中的 $T=f(t)$ 的定义域 $D_f=[0,24]$.

(2)对于用解析式子表示的函数,它的定义域是使解析式有意义的点的集合.

例 1.6 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{9-x^2}+\sqrt{x+3}$; (2) $y=\ln(x^2-1)+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

解 (1)要使 $\dfrac{1}{9-x^2}+\sqrt{x+3}$ 有意义,必须 $9-x^2\neq 0$ 且 $x+3\geqslant 0$,即 $x\neq\pm 3$ 且 $x\geqslant -3$,所以该函数的定义域 $D_f=(-3,3)\cup(3,+\infty)$.

(2)要使 $\ln(x^2-1)+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 有意义,必须 $x^2-1>0$ 且 $4-x^2>0$,即 $x>1$ 或 $x<-1$ 且 $-2<x<2$,所以该函数的定义域 $D_f=(-2,-1)\cup(1,2)$.

在函数 $y=f(x)$ 中,当 x 在 D_f 中取值 x_0 时,对应的因变量的值,称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值,记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

例 1.7 设 $f(x)=x^2-3x+5$,求 $f(2)$, $f(x_0+1)$.

解 $f(2)=2^2-3\times 2+5=3$;

$f(x_0+1)=(x_0+1)^2-3(x_0+1)+5=x_0^2-x_0+3$.

2)函数的表示法

函数通常有 3 种表示方法.

(1)解析法(又称公式法)　用数学式子表示变量之间的对应关系的方法叫解析法. 如例1.1、1.2.

(2)列表法　用自变量的一些数值与相应因变量的对应数值列成表格来表示变量之间的对应关系的方法叫列表法. 如例1.3.

(3)图像法　用函数图像来表示函数的方法叫做图像法. 如例1.4.

后面所讨论的函数,常用公式法表示. 用公式法表示函数时,有时需要在不同的范围内用不同的式子来表示一个函数,即所谓分段函数.

例 1.8　$y=f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$.

这个函数称为绝对值函数,它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$. 其图形如图1.3所示.

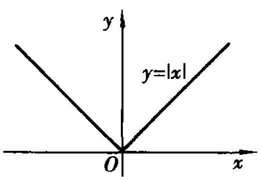

图 1.3

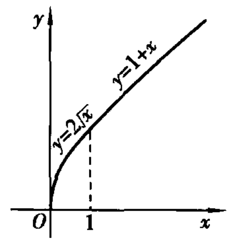

图 1.4

例 1.9　$y=f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 1+x & x>1 \end{cases}$.

它的定义域 $D_f=[0,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$. 其图形如图1.4所示.

对分段函数来讲,若求函数值,就要根据自变量所在区间选择相应的表达式,如在例1.9中,$f(\frac{1}{2})=2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$,$f(3)=1+3=4$.

需要注意的是,分段函数虽然在不同范围内用不同式子来表示,但还是一个函数,而不是几个函数.

3)反函数

在例1.1中,圆的面积 $S=\pi r^2$,如果把面积 S 取作自变量,则圆半径 r 也是 S 的函数 $r=\varphi(S)=\sqrt{\frac{S}{\pi}}(0<S<+\infty)$,我们把 $r=\varphi(S)$ 称作 $S=S(r)$ 的反函数,而原来的函数 $S=S(r)$ 叫做直接函数.

定义 1.2　一般地,设给定 y 是 x 的函数 $y=f(x)$. 如果把 y 当作自变量,x 当作函数,则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫做函数 $f(x)$ 的反函数,而 $f(x)$ 叫做直接函数.

由于习惯上采用字母 x 表示自变量,y 表示函数. 因此,将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 换成 y,y 换成 x,$y=f(x)$ 的反函数即为 $y=f^{-1}(x)$.

注意　(1)函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 是表示同一个函数.

(2)求反函数可采取下面步骤:

直接函数$\xrightarrow{\text{解出 } x}$以 y 为自变量的反函数$\xrightarrow{\text{调换 } x \text{ 和 } y}$反函数

$y=f(x)$ $\qquad\qquad$ $x=f^{-1}(y)$ $\qquad\qquad$ $y=f^{-1}(x)$

例 1.10 求函数 $y=10^{x+1}$ 的反函数.

解 由 $y=10^{x+1}$ 解出 $x=\lg y-1$，所求反函数为 $y=\lg x-1$.

1.1.3 函数的简单性质

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为区间 I.

1）奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 I 关于原点对称，若任意 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是 I 上的偶函数；若任意 $x\in I$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是 I 上的奇函数. 既不是偶函数也不是奇函数的函数，称为非奇非偶函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

2）单调性

若任意 $x_1, x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 是区间 I 上的单调增加函数；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 是区间 I 上的单调减少函数. 单调增加和单调减少函数统称为单调函数.

3）有界性

如果存在正数 M，使对于任意 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上是有界的.

4）周期性

如果存在不为零的常数 T，使对于任意 $x\in I$，有 $x+T\in I$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

习题 1.1

1. 用邻域符号和区间表示下列数集，并将它们表示在数轴上.

(1) $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|<1$； $\qquad$ (2) $0<|x+2|<1$；

(3) $|x-2|<\dfrac{1}{4}$； $\qquad$ (4) $0<|2x+1|<2$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$， $\qquad$ $g(x)=x+1$；

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$， $\qquad$ $g(x)=|x|$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$， $\qquad$ $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$， $\qquad$ $g(x)=\sin x$.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(2) $y=\frac{2x}{x^3-3x+2}$；

(3) $y=\ln(x+1)$；　　(4) $y=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x-1}$；

(5) $y=\sqrt{16-x^2}+\frac{x-1}{\ln x}$；　　(6) $y=\frac{\sqrt{4x-x^2}}{1-|x-1|}$.

4. 设 $f(x)=x^2-x+1$，求 $f(0)$，$f(x^2)$，$f(f(x))$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+5 & x>0\\ 1 & x=0\\ x^3 & x<0\end{cases}$，求 $f(0)$，$f(\frac{1}{3})$，$f(-\frac{1}{3})$.

6. 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x-4$；　　(2) $y=\frac{2x+3}{3x-1}$；

(3) $y=1+\ln(x+2)$；　　(4) $y=e^{x+2}$.

1.2 初等函数

在自然科学与工程技术中，常见的函数大都是初等函数，初等函数也是本课程研究的主要对象. 构成初等函数的元素是基本初等函数.

1.2.1 基本初等函数

将常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数.

(1) 常值函数 $y=c$（c 为常数）.

(2) 幂函数 $y=x^\alpha$（α 为常数）.

(3) 指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，a 为常数）.

(4) 对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，a 为常数）.

(5) 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$.

以上函数的性质和图形在中学已经学过，希望读者再复习一下，以后将经常用到.

1.2.2 复合函数

在实际问题中，变量间的函数关系往往都是比较复杂的.

例如质量为 m 的物体自由落下，其动能 E 是速度 v 的函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$，而速度 v 又是时间 t

的函数 $v=gt$,于是 $E=\frac{1}{2}m(gt)^2=\frac{1}{2}mg^2t^2$,这就表明动能 E 通过速度 v 成为时间 t 的函数了.下面引入复合函数的定义.

定义 1.3 设 $y=f(u)$ 是 u 的函数,$u=\varphi(x)$ 是 x 的函数,且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内,则 y 是 x 的函数,它是由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成,叫做复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 叫做中间变量.

有了复合函数的概念,前面 $E=\frac{1}{2}mg^2t^2$ 就可看成是由函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 及 $v=gt$ 复合而成的函数.

注意 (1)不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数,例如 $y=\arcsin u$ 及 $u=x^2+2$ 就不能构成复合函数.因为 $y=\arcsin u$ 定义在 $-1\leqslant u\leqslant 1$,而 $u=x^2+2$ 的任何函数值 u,都有 $u\geqslant 2$,这时,$y=\arcsin u$ 没有定义.因此,函数 $u=\varphi(x)$ 的值域,应该取在函数 $y=f(u)$ 的定义域内,否则复合函数将失去意义.

(2)有时会遇到两个以上的函数构成复合函数.例如函数 $y=f\{\psi[\varphi(x)]\}$ 由 $y=f(u)$,$u=\psi(v)$,$v=\varphi(x)$ 构成,其中 u,v 都是中间变量.

(3)正确掌握复合函数的复合过程,会给今后求函数的导数和积分带来许多方便.

例如 $y=\sin^2x$ 是由函数 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成;$y=\sin x^2$ 是由函数 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 复合而成;$y=e^{2x}$ 是由函数 $y=e^u$ 和 $u=2x$ 复合而成;$y=\ln(1-x^2)$ 是由函数 $y=\ln u$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成;$y=\sin(\ln\sqrt{x^2-1})$ 是由 $y=\sin u$,$u=\ln v$,$v=w^{\frac{1}{2}}$,$w=x^2-1$ 复合而成.

容易看到,把一个比较复杂的函数 $y=f(x)$ 看成两个函数 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 的复合函数时,往往 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 会变成比较简单的函数,这一点在后面的积分计算中非常重要.

1.2.3 初等函数

由基本初等函数经过有限次代数运算和有限次复合并用一个式子表示的函数,叫做初等函数.

在本课程的讨论中,绝大多数函数都是初等函数,前面讨论的 $y=\sin^2x$,$y=\sin(\ln\sqrt{x^2-1})$ 都是初等函数.需要指出的是,分段函数一般不是初等函数.

1.2.4 函数模型构建

用数学方法解决实际问题,在很多情况下要把实际问题转化成数学问题,即建立数学模型,通俗地讲,就是找函数关系,建立函数式,然后进行分析和计算.

建立函数关系式与列方程一样,基本原则是利用等量关系,下面通过实例说明建立函数关系式的过程.

例 1.11 某工厂拟建一个容积为 800 m^3 的无盖圆柱形蓄水池,已知池底单位面积造价为周围单位面积造价的 2 倍.试将总造价 y 表示为水池底圆半径的函数.

解 设水池底圆半径为 x,水池高为 h,由圆柱体体积等于底面积乘以高可得:

$$\pi x^2\cdot h=800,$$

$$h=\frac{800}{\pi x^2}.$$

又设水池周围单位面积造价为 p 元,则水池底面的单位面积造价为 $2p$ 元,得总造价为:

$$y=2p(\pi x^2)+p(2\pi xh)=2p\pi x^2+\frac{1\,600p}{x}\qquad x\in(0,+\infty)$$

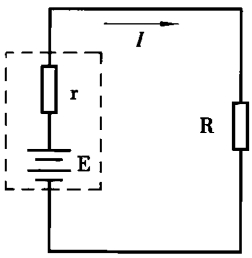

图 1.5

例 1.12　如图 1.5 所示,电源的电压为 E,内阻为 r,负载电阻为 R. 试建立输出功率 P 与负载电阻 R 的函数关系式.

解　设电路中的电流为 I,由电学知 $P=I^2R$,根据闭合电路的欧姆定律有 $I=\frac{E}{R+r}$,代入上式得 P 与 R 的函数关系式为:

$$P=\left(\frac{E}{R+r}\right)^2\cdot R\quad R\in(0,+\infty)$$

例 1.13　某城市出租车收费规定,行程 3 km 以内收费为起步价 5 元,超过 3 km 时,每增加 1 km 收费为 1.20 元. 试求出租车费与里程的函数关系式.

解　设乘客的行程为 x km,出租车费为 y 元,则由规定知:

$$y=f(x)=\begin{cases}5 & 0<x\leqslant 3\\ 5+(x-3)\times 1.2 & x>3\end{cases}.$$

例 1.14　某厂生产一种零件,设计能力为日产量 100 件,每日固定成本为 140 元,每件的单位变动成本为 10 元,每件销售价格为 14 元. 试求每日的总成本,收益及利润函数.

解　由经济学知识可知,总成本 = 固定成本 + 变动成本,总利润 = 总收益 − 总成本.

一般用 $C(x)$ 表示总成本函数,用 $L(x)$ 表示利润函数,用 $R(x)$ 表示收益函数.

由题意知,成本函数为:

$$C(x)=140+10x$$

收益函数为:

$$R(x)=Px=14x\quad(P\text{ 表示价格})$$

利润函数为:

$$L(x)=R(x)-C(x)=14x-(140+10x)=4x-140$$

从上述几例看出,在建立函数关系式时,首先应分析问题中哪些是变量,哪些是常量,再用几何、物理、经济等学科的知识,找出变量之间的函数关系式.

习题 1.2

1. 在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数.

(1) $y=u^2,u=\tan x$;　　(2) $y=\sin u,u=2x$;

(3) $y=\sqrt{u},u=1+x^2$;　　(4) $y=u^3,u=\arcsin v,v=1-x^3$.

2. 下列函数是由哪些函数复合而成的?

(1) $y=\cos 2x$; (2) $y=\sin(1-3x)^2$;

(3) $y=\ln(\tan x)$; (4) $y=e^{\cos 5x}$;

(5) $y=\cos^2[\sin(x^2-1)]$; (6) $y=2^{\arctan\sqrt{x^2+1}}$.

3. 有一块边长为 a 的正方形铁皮,将它的四角剪去面积相等的 4 个小正方形,制成一个没有盖的容器. 试将容器的容积 V 表示成剪去的小正方形边长的函数.

4. 将一块半径为 R,中心角为 α 的扇形铁皮,围成一个圆锥形的容器. 试将该容器的容积表示成中心角 α 的函数.

5. 电压在某电路上等速下降,在实验开始时,电压为 12 V,经过 8 s 后电压降落到 6.4 V. 试把电压 U 表示成时间 t 的函数.

6. 火车站收取行李费的规定如下:当行李不超过 50 kg 时,按基本运费计算,如从北京到某地每千克收 0.15 元,当超过 50 kg 时,超重部分按每 0.25 元/kg 收费. 试求北京到该地的行李费 y 与行李重量 x 之间的函数关系式.

7. 某车间设计最大生产能力为月生产 100 台机床,每月至少要完成 40 台方可保本,当生产 x 台时的总成本函数为 $C(x)=x^2+10x$,按市场规律,价格为 $P=250-5x$(x 为需求量)时可以销售完. 试写出月利润函数.

1.3 极限概念及其性质

极限是描述变量在某个变化过程中的变化趋势. 其思想可以追溯到古代. 我国古代的哲学家庄周所著《庄子·天下篇》记载着这样一段话:"一尺之棰,日取其半,万世不竭."意思是说将一尺长的木杖,每日取一半,虽经万世也取不尽. 如果把每日取剩部分写成数列,则有:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$$

即当天数愈来愈多时,所剩下的木杖长也就越来越小,用数学语言来叙述,即当 n 越来越大时,数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 的项愈来愈趋近零. 它表明了数列的一种变化状态.

1.3.1 数列的极限

1) 数列的概念

定义在正整数集合上的函数 $x_n=f(n)$ $(n=1,2,\cdots)$,其函数值按自变量 n 由小到大地排成一列数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 称为数列,记作 $\{x_n\}$,其中 x_n 称为数列的通项.

考察下列数列,当 n 无限增大时,通项 x_n 的变化趋势:

(1) $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots$; (2) $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots$;

(3) $0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{4}{5},\cdots$; (4) $2,4,6,8,\cdots$; (5) $1,0,1,0,\cdots$.