高级微观经济学习题集

（第2版）

Work Book for Advanced Micro-Economics

吴汉洪 主编

经济科学出版社
Economic Science Press

高级微观经济学习题集

（第2版）

吴汉洪 主编

经济科学出版社
Economic Science Press

图书在版编目（CIP）数据

高级微观经济学习题集（第二版）/吴汉洪主编．—北京：经济科学出版社，2010.8
ISBN 978-7-5058-9374-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．吴…　Ⅲ．微观经济学-研究生-习题
Ⅳ．F016-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 083912 号

责任编辑：张惠敏
责任校对：杨晓莹　王肖楠
技术编辑：李长建

高级微观经济学习题集
（第二版）
吴汉洪　主编
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
教材编辑中心电话：88191306　发行部电话：88191540
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：espbj3@esp.com.cn
北京汉德鼎有限公司印刷
季峰装订厂装订
787×1092　16 开　22 印张　400000 字
2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5058-9374-0　定价：36.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

第二版前言

学习微观经济学，无论是本科生水平的，还是研究生水平的，都需要做一些练习题。做习题不仅有助于消化和掌握所学的内容，而且可以加深对微观经济学基本概念、基本原理以及基本方法的理解。

尽管目前国内已出版了一些本科生水平的微观经济学习题资料，但研究生水平的微观经济学，即高级微观经济学的习题资料还不多见。本书就是适应广大读者学习高级微观经济学的需要，尤其是国内一些高等学校开设研究生水平的微观经济学的教学需要而编写的。

考虑到目前我国一些高等学校研究生水平的微观经济学教材已具有多样化的趋势，为了使本书具有较为广泛的适用性，本书并不是按照某一本研究生水平的微观经济学教材来编排练习题，而是在广泛参考国内外已出版的研究生水平的微观经济学教材和有关习题资料的基础上，按照九个专题（单元）来编写的，每一单元均按例题、习题和习题参考答案三部分来安排。习题具有一定的代表性，即可单独阅读学习，又是学习高级微观经济学的参考和辅导资料。本书即可供高等学校经济和管理类高年级本科生和研究生学习高级微观经济学使用，也可作为有关课程教师的教学参考资料，还可供报考经济类研究生（硕士生和博士生）的考生备考时参考。

本书这一版与第一版相比，结构没有变化，主要的变化是每个单元都增加了习题。参加本书第一版编写的是吕灿林和张华祝同志。在这一版修订中，博士生张杰平和硕士生颜伟超做了大量辅助性工作，在此向他们表示感谢。由于我们水平有限，加之时间仓促，书中的差错在所难免，敬请广大读者，尤其是国内同行批评指正。

吴汉洪

2010年7月

于中国人民大学经济学院

目　录

第一单元

消费者行为理论

一、例　　题

[例题 1.1]

设效用函数 $u(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$，其中 $0 \neq \rho < 1$；这就是常（或不变）替代弹性（CES）效用函数。求相应的瓦尔拉斯需求函数（也称马歇尔需求函数、普通需求函数）、间接效用函数。并验证间接效用函数关于价格与收入是零次齐次的；关于收入 y 是递增的；关于价格 p 是递减的；验证罗伊恒等式。

解：消费者求解规划：

$$\max_{x_1, x_2} \quad (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$$
$$\text{s.t.} \quad y - p_1 x_1 - p_2 x_2 \geqslant 0$$

列出拉格朗日函数：

$$L(x_1, x_2, \lambda) \equiv (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} + \lambda(y - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

由于偏好是单调的，在最优解处，预算约束将以等式成立。假设有一个内点解，库恩－塔克条件正好同普通的拉格朗日一阶条件一致：

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} x_1^{\rho-1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} x_2^{\rho-1} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

整理，得：

$$x_1 = x_2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/(\rho-1)}$$

$$y = p_1x_1 + p_2x_2$$

求解，得：

$$x_1 = \frac{p_1^{1/(\rho-1)}}{p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}}$$

$$x_2 = \frac{p_2^{1/(\rho-1)}y}{p_1^{\rho(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}}$$

上式就是消费者的瓦尔拉斯需求函数。如果定义 $r \equiv \rho/(\rho-1)$，便可将瓦尔拉斯需求函数化简为：

$$x_1(p,y) = \frac{p_1^{r-1}y}{p_1^r + p_2^r}$$

$$x_2(p,y) = \frac{p_2^{r-1}y}{p_1^r + p_2^r}$$

将上述两式代入直接效用函数，可得间接效用函数：

$$\begin{aligned} v(p,y) &= [(x_1(p,y))^{\rho} + (x_2(p,y))^{\rho}]^{1/\rho} \\ &= \left[\left(\frac{p_1^{r-1}y}{p_1^r + p_2^r}\right)^{\rho} + \left(\frac{p_2^{r-1}y}{p_1^r + p_2^r}\right)^{\rho}\right]^{1/\rho} \\ &= y(p_1^r + p_2^r)^{-1/r} \end{aligned}$$

$v(p, y)$ 关于价格与收入是零次齐次的，因为对于任何 $t>0$，有：

$$\begin{aligned} v(tp,ty) &= ty((tp_1)^r + (tp_2)^r)^{-1/r} \\ &= y(p_1^r + p_2^r)^{-1/r} \\ &= v(p,y) \end{aligned}$$

为理解间接效用函数关于收入 y 是递增的，关于价格 p 是递减的，对它求关于收入与价格的微分，得：

$$\frac{\partial v(p,y)}{\partial y} = (p_1^r + p_2^r)^{-1/r} > 0$$

$$\frac{\partial v(p,y)}{\partial p_i} = -(p_1^r + p_2^r)^{(-1/r)-1}yp_i^{r-1} < 0, \quad i = 1,2$$

罗伊等式验证如下：

$$(-1)\left[\frac{\partial v(p,y)/\partial p_i}{\partial v(p,y)/\partial y}\right]=(-1)\frac{-(p_1^r+p_2^r)^{(-1/r)-1}yp_i^{r-1}}{(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}}$$

$$=\frac{yp_i^{r-1}}{p_1^r+p_2^r}=x_i(p,y),\quad i=1,2$$

[例题 1.2]

设效用函数为 CES 形式的，$u(x_1,x_2)=(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}$，其中 $0\neq\rho<1$。求对应的希克斯需求函数、支出函数。

解：由于偏好是单调的，可将支出最小化问题表述为：

$$\min_{x_1,x_2}\quad p_1x_2+p_2x_2$$

$$\text{s.t.}\quad u-(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}=0$$

其拉格朗日函数为：

$$L(x_1,x_2,\lambda)=p_1x_1+p_2x_2+\lambda[u-(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}]$$

设最优解是内点解，一阶条件为：

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=p_1-\lambda(x_1^\rho+x_2^\rho)^{(1/\rho)-1}x_1^{\rho-1}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=p_2-\lambda(x_1^\rho+x_2^\rho)^{(1/\rho)-1}x_1^{\rho-1}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=u-(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}=0$$

通过消去 λ，这些式子被简化为：

$$x_1=x_2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/(\rho-1)}$$

$$u=(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}$$

令 $r\equiv\rho/(\rho-1)$，可解出希克斯需求函数：

$$x_1^h(p,u)=u(p_1^r+p_2^r)^{(1/r)-1}p_1^{r-1}$$

$$x_2^h(p,u)=u(p_1^r+p_2^r)^{(1/r)-1}p_2^{r-1}$$

将希克斯需求函数代入目标函数，可得：

$$\begin{aligned}e(p,u)&=p_1x_1^h(p,u)+p_2x_2^h(p,u)\\&=up_1(p_1^r+p_2^r)^{(1/r)-1}p_1^{r-1}+up_2(p_1^r+p_2^r)^{(1/r)-1}p_2^{r-1}\\&=u(p_1^r+p_2^r)^{1/r}\end{aligned}$$

[**例题 1.3**]

设直接效用函数为 CES 形式的，$u(x_1,x_2)=(x_1^{\rho}+x_2^{\rho})^{1/\rho}$，其中 $0\neq\rho<1$。试从它对应的间接效用函数推导出支出函数，并从支出函数推导出间接效用函数。

解：已知 CES 直接效用函数的间接效用函数为：

$$v(p,y)=y(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}$$

对于任何价格 p 与收入水平 y，由于收入水平 y 等于 $e(p,\ u)$，所以：

$$v(p,e(p,u))=e(p,u)(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}$$

对于任何 p 与 u 必有：

$$v(p,e(p,u))=u$$

将上述两式联立，可得：

$$e(p,u)(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}=u$$

所以支出函数可以写为：

$$e(p,u)=u(p_1^r+p_2^r)^{1/r}$$

下面由支出函数推导间接效用函数。已知与 CES 直接效用函数对应的支出函数为：

$$e(p,u)=u(p_1^r+p_2^r)^{1/r}$$

那么，对于任何价格 p 与效用水平 $v(p,\ y)$，将有：

$$e(v(p,y))=v(p,y)(p_1^r+p_2^r)^{1/r}$$

对于任何 p 与 y，有：

$$e(p,v(p,y))=y$$

将上述两式联立，可得：

$$v(p,y)(p_1^r+p_2^r)^{1/r}=y$$

从而，间接效用函数可以写为：

$$v(p,y)=y(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}$$

[**例题 1.4**]

设一间接效用函数为 $v(p,y)=y(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}$，试推导与其相对应的直接效用函数。

解：设 $y=1$，可得到 $v(p,1)=(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}$。因此间接效用函数将是最小值函数

$$u(x_1,x_2)=\min_{p_1,p_2}(p_1^r+p_2^r)^{-1/r}$$
$$\text{s. t.}\quad p_1x_1+p_2x_2=1$$

首先，求解最小化问题，然后在解点给目标函数取值，以便形成最小值函数。对于拉格朗日方程

$$L(p_1,p_2,\lambda)\equiv(p_1^r+p_2^r)^{1/r}+\lambda(1-p_1x_1-p_2x_2)$$

一阶条件要求最优解 p_1^*、p_2^* 与 λ^* 满足：

$$-((p_1^*)^r+(p_2^*)^r)^{(-1/r)-1}(p_1^*)^{(r-1)}-\lambda^*x_1=0$$
$$-((p_1^*)^r+(p_2^*)^r)^{(-1/r)-1}(p_2^*)^{(r-1)}-\lambda^*x_2=0$$
$$1-p_1^*x_1-p_2^*x_2=0$$

消去 λ^*，得：

$$p_1^*=p_2^*\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/(r-1)}$$

解得：

$$p_1^*=\frac{x_1^{1/(r-1)}}{x_1^{r/(r-1)}+x_2^{r/(r-1)}}$$
$$p_2^*=\frac{x_2^{1/(r-1)}}{x_1^{r/(r-1)}+x_2^{r/(r-1)}}$$

将两式代入目标函数，得：

$$u(x_1,x_2)=\left[\frac{x_1^{r/(r-1)}+x_2^{r/(r-1)}}{(x_1^{r/(r-1)}+x_2^{r/(r-1)})^r}\right]^{-1/r}$$
$$=[x_1^{r/(r-1)}+x_2^{r/(r-1)}]^{(r-1)/r}$$

定义 $\rho\equiv r/(r-1)$，则：

$$u(x_1,x_2)=(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}$$

[例题 1.5]

设效用函数为 CES 形式的，$u(x_1,x_2)=(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}$，其中 $0\neq\rho<1$。求与收入 $y=1$ 相关联的反需求函数。

解：对于效用函数 $u(x_1,x_2)=(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho}$，

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}=(x_1^\rho+x_2^\rho)^{1/\rho-1}x_j^{\rho-1}\qquad j=1,2$$

将上式乘以 x_j，并加总 $j=1$，2 时的这两个等式；进一步应用反需求函数公式

$$p_i(x) = \frac{\partial u(x)/\partial x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j(\partial u(x)/\partial x_j)}$$

可求出 $y=1$ 时反需求函数的方程组：

$$p_1 = x_1^{\rho-1}(x_1^\rho + x_2^\rho)^{-1}$$
$$p_2 = x_2^{\rho-1}(x_1^\rho + x_2^\rho)^{-1}$$

[例题 1.6]

跨期消费选择问题。考虑一个两期消费者。假定他的效用函数是 $U=c_1c_2$，其中 $c_t(t=1, 2)$ 表示消费者在第 t 期的消费支出。他的实际收入和预期收入分别为 $y_1=10000$，$y_2=5250$，假设利息率为 5%。试求消费者的跨期最优消费选择。

解：消费者的问题是：

$$\max_{c_1,c_2} \quad c_1c_2$$
$$\text{s.t.} \quad (10000-c_1)+(5250-c_2)(1+i)^{-1}=0$$

列出拉格朗日函数：

$$V^* = c_1c_2 + \mu[(10000-c_1)+(5250-c_2)(1+i)^{-1}]$$

令有关的偏导数等于零：

$$\frac{\partial V^*}{\partial c_1} = c_2 - \mu = 0$$
$$\frac{\partial V^*}{\partial c_2} = c_1 - \mu(1+i)^{-1} = 0$$
$$\frac{\partial V^*}{\partial \mu} = (10000-c_1)+(5250-c_2)(1+i)^{-1}=0$$

又利息率 i 是 5%，所以可得最优消费支出安排为 $c_1=7500$，$c_2=7875$。对于这些支出，消费者的时间偏好率等于利息率（市场收益率）：

$$\eta_{12} = -\frac{dc_2}{dc_1} - 1 = \frac{c_2}{c_1} - 1 = \frac{7875}{7500} - 1 = 0.05$$

效用函数的拟凹性保证二阶条件得到满足。

二、习　　题

[习题 1.1] 证明如果偏好关系 $\succsim$ 具有完备性（即对于任意 x，$y \in X$，则有

$x \succsim y$，或 $y \succsim x$，或两式都成立）和传递性（即对于任意 x，y，$z \in X$，如果 $x \succsim y$，且 $y \succsim z$，则 $x \succsim z$），即该偏好关系 $\succsim$ 是理性的；那么：

（1）若 $x \succ y \succsim z$，则 $x \succ z$。

（2）$\succ$ 既是非自反的，即 $x \succ x$ 永远不成立；又是可传递的，即如果 $x \succ y$，$y \succ z$，则 $x \succ z$。

（3）$\sim$ 具有自反性（即对于所有的 $x \in X$，$x \sim x$），可传递性（即如果 $x \sim y$，$y \sim z$，那么 $x \sim z$）和对称性（即如果 $x \sim y$，那么 $y \sim x$）。

[习题 1.2] 定义在 $X = R^L_+$ 上的偏好关系 $\succsim$。证明：

（1）如果 $\succsim$ 是强单调的，那么它就是单调的。

（2）如果 $\succsim$ 是单调的，那么它就是局部非饱和的。

（3）如果 $\succsim$ 是弱单调的，并同时具有传递性、局部非饱和性，那么它是单调的。

[习题 1.3] 设 $\succsim$ 为理性偏好关系。证明如果 $u(x) = u(y)$ 意味着 $x \sim y$，$u(x) > u(y)$ 意味着 $x \succsim y$；那么 $u(\cdot)$ 是一个代表 $\succsim$ 的效用函数。

[习题 1.4] 证明若 $u(\cdot)$ 是代表偏好关系 $\succsim$ 的连续效用函数，则 $\succsim$ 是连续的。

[习题 1.5] **证明**：设 u：$X \to R$ 是一个代表偏好关系 $\succsim$ 的效用函数，如果 f：$R \to R$ 是一个严格递增函数，则函数 $v(\cdot) = f(u(\cdot))$ 也是一个代表偏好关系 $\succsim$ 的效用函数。

[习题 1.6] **证明**：设 $x(p, w)$ 为瓦尔拉斯需求函数，如果 $x(p, w)$ 满足弱公理，则 $x(p, w)$ 一定是零次齐次的。

[习题 1.7] 假设某消费者的瓦尔拉斯需求函数为 $x_k(p,w) = \dfrac{w}{\sum_{l=1}^{L} p_l}, k = 1,2,\cdots,L$，则：

（1）这一需求函数在 (p, w) 上是零次齐次的吗？

（2）它满足瓦尔拉斯定律吗？

（3）是否满足弱公理？

（4）求它的斯拉茨基替代矩阵，并判断其是（半）负定的吗？是对称的吗？

[习题 1.8] 消费者在价格为 p'，p'' 时的购买选择分别为 x'，x''。试判断下面的消费组合是否满足弱公理：

（1）$p' = (1,3)$，　$x' = (4,2)$；　$p'' = (3,5)$，　$x'' = (3,1)$。

（2）$p' = (1,6)$，　$x' = (10,5)$；$p'' = (3,5)$，　$x'' = (8,4)$。

（3）$p' = (1,2)$，　$x' = (3,1)$；　$p'' = (2,2)$，　$x'' = (1,2)$。

（4）$p' = (2,4)$，　$x' = (1,2)$；　$p'' = (6,3)$，　$x'' = (2,1)$。

[习题 1.9] 考虑只有两种商品的情形。设消费者的效用函数为 $u(x) =$

$(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho}$。证明：

（1）当$\rho = 1$时，无差异曲线是线性的。

（2）当$\rho \to 0$时，这一效用函数代表的是和（广义）柯布－道格拉斯效用函数$u(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$一样的偏好。

（3）当$\rho \to -\infty$时，这一效用函数代表的是和列昂惕夫效用函数$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$一样的偏好。

[习题1.10] 验证由柯布－道格拉斯效用函数$u(x) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$导出的瓦尔拉斯需求函数$x(p, w)$和间接效用函数$v(x)$具有以下性质：

（1）$x(p, w)$在(p, w)上是零次齐次的。

（2）$x(p, w)$满足瓦尔拉斯定律。

（3）$v(p, w)$在(p, w)上是零次齐次的。

（4）$v(p, w)$关于w是严格递增的，关于价格是非递增的。

（5）$v(p, w)$在p上是拟凸的。

[习题1.11] 验证由CES效用函数$u(x) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$导出的瓦尔拉斯需求函数$x(p, w)$和间接效用函数$v(p, w)$满足以下性质：

（1）$x(p, w)$在(p, w)上是零次齐次的。

（2）$x(p, w)$满足瓦尔拉斯定律。

（3）$v(p, w)$在(p, w)上是零次齐次的。

（4）$v(p, w)$在(p, w)上是拟凸的。

[习题1.12] 假设$u(\cdot)$是可微的和严格拟凹的，且瓦尔拉斯需求函数$x(p, w)$是可微的。证明：

（1）如果$u(\cdot)$是一次齐次的，则$x(p, w)$、$v(p, w)$关于w也是一次齐次的，从而它们可以被写成如下的形式：$x(p,w) = w\tilde{x}(p)$，$v(p,w) = w\tilde{v}(p)$。

（2）如果$v(p,w)$在w上是一次齐次的，则$u(\cdot)$也是一次齐次的。

[习题1.13] 求线性效用函数$u(x) = x_1 + x_2$和列昂惕夫效用函数$u(x) = \min\{x_1, x_2\}$的瓦尔拉斯需求函数和对应的间接效用函数，并证明当ρ趋近于1和$-\infty$时，CES效用函数$u(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_1^\rho)^{1/\rho}$的瓦尔拉斯需求函数和间接效用函数分别向它们趋近。

[习题1.14] 定义商品i和商品j之间的替代弹性为：

$$\zeta(p,w) = -\frac{\partial[x_i(p,w)/x_j(p,w)]}{\partial(p_i/p_j)} \cdot \frac{p_i/p_j}{x_i(p,w)/x_j(p,w)}$$

证明效用函数$u(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$的替代弹性$\zeta_{12}(p, w) = 1/(1-\rho)$，从而它是CES（常替代弹性）效用函数。并求线性效用函数$u(x) = x_1 + x_2$、列昂惕夫效用函数$u(x) = \min\{x_1, x_2\}$和柯布－道格拉斯效用函数$u(x) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$的

$\zeta_{12}(p, w)$。

[习题 1.15] 验证由柯布－道格拉斯效用函数 $u(x)=x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$ 导出的希克斯需求函数 $h(p, u)$ 和支出函数 $e(p, u)$ 具有以下性质：

(1) $h(p, u)$ 在 p 上是零次齐次的。

(2) $h(p, u)$ 满足 $u(h(p, u))=u$，即没有超额效用。

(3) $e(p, u)$ 在 p 上是一次齐次的。

(4) $e(p, u)$ 在 u 上是严格递增的，在 $p_l(l=1, 2)$ 上是非递减的。

(5) $e(p, u)$ 在 p 上是凹的。

[习题 1.16] 验证由 CES 效用函数 $u(x_1, x_2)=(x_1^{\rho}+x_2^{\rho})^{1/\rho}$ 导出的希克斯需求函数 $h(p, u)$ 和支出函数 $e(p, u)$ 具有下列性质：

(1) $h(p, u)$ 在 p 上是零次齐次的。

(2) $h(p, u)$ 满足 $u(h(p, u))=u$，即没有超额效用。

(3) $e(p, u)$ 在 p 上是一次齐次的。

(4) $e(p, u)$ 在 u 上是严格递增的，在 $p_l(l=1, 2)$ 上是非递减的。

(5) $e(p, u)$ 在 p 上是凹的。

[习题 1.17] 证明：

(1) 如果消费者的偏好$\succsim$是凸的，那么 $h(p,u)$是一个凸集。

(2) 如果 $u(x)$ 是严格凸的，那么 $h(p, u)$ 就是单值的。

[习题 1.18] 证明若 $u(\cdot)$ 是一次齐次的，则 $h(p, u)$、$e(p, u)$ 在 u 上是一次齐次的，即有 $h(p, u)=u\tilde{h}(p)$，$e(p, u)=u\tilde{e}(p)$。

[习题 1.19] 假设 $u(\cdot)$ 是一个连续效用函数，它代表了定义在消费集 $X=R_+^L$ 上的局部非饱和的、严格凸的偏好关系$\succsim$。假定间接效用函数 $v(p, w)$ 在 $(p, w)\gg 0$ 上可微。则有：

$$h(p,u)=\nabla_p e(p,u) \tag{1}$$

和罗伊恒等式

$$x(p,w)=-\frac{\nabla_p v(p,w)}{\nabla_w v(p,w)} \tag{2}$$

证明 (1) 和 (2) 式是可以相互导出的。

[习题 1.20] 假设 $g(\cdot)$ 是一个单调递增函数，效用函数 $u=f(x)$；同样的偏好关系现在用 $u^*=g(f(x))$ 来表示，则对效用函数进行单调递增变换后，$x(p, w)$不受影响，$v(p, m)$、$e(p, u)$、$h(p, u)$ 分别被 $g(v(p, m))$、$e(p, g^{-1}(u^*))$、$h(p,g^{-1}(u^*))$ 所代替。

[习题 1.21] 设消费者的间接效用函数为 $v(p, w)=wp_1^{\alpha}p_2^{\beta}$，其中 $\alpha<0$，

$\beta<0$,试求对应的直接效用函数。

[习题 1.22] 设效用函数为柯布 – 道格拉斯形式，$u(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$，其中 $0<\alpha<1$。求反需求函数 $p(x)$。

[习题 1.23] 假设在价格向量从 p^0 至 p^1 的变化过程中，只有商品 e 的价格发生了变化，如果商品 e 是劣等品，则 $CV(p^0, p^1, w) > EV(p^0, p^1, w)$。

[习题 1.24] 假使只有两种商品 Q_1 和 Q_2，考虑它们的组合 $A_1 = (q_1^{(1)}, q_2^{(1)})$ 和 $A_2 = (q_1^{(2)}, q_2^{(2)})$。假设消费者的偏好结构由下列规则给定：如果 $q_1^{(1)} > q_1^{(2)}$，或者 $q_1^{(1)} = q_1^{(2)}$ 并且 $q_1^{(1)} > q_2^{(2)}$，则 A_1 比 A_2 更可取。此时，偏好顺序被认为是字典式的（lexico-graphic）。证明不存在表示该字典式偏好关系的效用函数。

[习题 1.25] 假设消费者的收入取决于其供给的工作量。假定消费者的效用水平决定于收入和闲暇，效用函数是 $U=g(L, y)$ 式中 L 代表闲暇，y 代表收入。以 W 表示消费者提供的工作量，以 r 表示工资率。根据定义，得：

$$L = T - W$$

式中，T 是可利用的总时间数。试求消费者的劳动供给曲线。当 $U=48L+Ly-L^2$ 时，消费者的劳动供给曲线又是什么？

[习题 1.26] 用显示偏好理论证明替代效应是负的。

[习题 1.27] 对于给定价格 p_1，p_2，当收入变动时，预算约束线与无差异曲线切点的轨迹称为收入扩张线，进而可求得恩格尔曲线。请表明，对于效用函数 $U=q_1^r q_2$,其中 $r>0$，恩格尔曲线是一条直线。

[习题 1.28] 假设定量配给的影响很大，使得每种商品都有两种价格：市场价格和配给价格。假定有三种商品，消费者有收入 y 和配给数量 z。请假定一种严格凹的效用函数，用公式阐述他的约束效用最大化问题，推导出极大值条件，并用经济学观点解释这种条件。求出保证配给制的实施不会改变消费者的购买量的充分条件。

[习题 1.29] 建立对应于直接效用函数 $U=a\ln q_1+q_2$ 的间接效用函数，并运用罗伊恒等式利用间接效用函数建立这两种物品的需求函数。这些需求函数与从直接效用函数得到的需求函数相同吗？

[习题 1.30] 设只有三种物品，令消费者的效用函数为：

$$f(q_1, q_2, q_3) = q_1q_2q_3$$

该消费者的预算约束为 $y=p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$。假设 $q_c=q_1+(p_2/p_1)q_2$ 为一种复合物品，试以 q_c 的方式阐述消费者的最优化问题并求出 q_c 的需求函数。

[习题 1.31] 设两期消费者的效用函数是 $U=C_1C_2^{0.6}$，收入流是 $y_1=1000$，$y_2=648$;市场利息率为 0.08。请确定最大化消费者效用的 C_1 和 C_2 的值。消费者将

会借入还是贷出？

[习题 1.32] 考虑一个只有消费者借贷的债券市场。假定 150 个消费者具有相同的两期消费效用函数：$U = C_1 C_2$。设 100 个消费者每个人都有预期的收入流 $y_1 = 10000$，$y_2 = 8400$，而剩下的 50 个消费者都有预期的收入流 $y_1 = 8000$，$y_2 = 14000$。求使债券市场均衡的利息率。

[习题 1.33] 某一消费者具有下述形式的间接效用函数：

$$v(p_1, p_2, m) = \frac{m}{\min\{p_1, p_2\}}$$

该消费者的支出函数是何种形式？该消费者的（拟凹）效用函数是何种形式？对物品 1 的需求函数是何种形式？

[习题 1.34] 考察以下给出的间接效用函数：$v(p_1, p_2, m) = \dfrac{m}{p_1 + p_2}$

（a）求需求函数；

（b）求支出函数；

（c）求直接效用函数。

[习题 1.35] 计算两物品的柯布－道格拉斯需求函数的替代矩阵。验证对角线各项是负的，交叉价格效应是对称的。

[习题 1.36] 考察一个对物品 1 和物品 2 有需求的消费者。当物品价格为 (2，4) 时，其需求为（1，2）。当价格为（6，3）时，其需求为（2，1），若没有其他重要的变化，问该消费者是否最大化其效用？

[习题 1.37]（1）证明：*CES* 函数

$$\alpha \frac{x^\delta}{\delta} + \beta \frac{y^\delta}{\delta}$$

是位似函数。*MRS* 如何取决于 y/x？

（2）证明：从（1）问中所得的结论与我们对 $\delta = 1$（完全替代）和 $\delta = 0$（柯布－道格拉斯）情形下的讨论相符。

（3）证明：对于所有的 $\delta < 1$，*MRS* 是严格递减的。

（4）证明：如果 $x = y$，则这个函数的 *MRS* 仅取决于 α 和 β 相对值的大小。

（5）计算 $\delta = 0.5$ 或 $\delta = -1$ 情况下，当 $y/x = 0.9$，$y/x = 1.1$ 时，这一函数的 *MRS*？当 *MRS* 在 $x = y$ 附近变动时，它的变动程度如何？你如何从几何图形上给予解释？

[习题 1.38] 考虑商品世界中任意两种商品 i 与 j，记关于第 i 种商品的需求的收入弹性为 η_i。请证明：

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \gtreqless \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \Leftrightarrow \eta_i \lesseqgtr \eta_j.$$