

工程力学及其应用

Engineering Mechanics
And Its Applications

主编 杨德品 赵锡钱
扶名福 冯 恕

江西高校出版社

工程力学及其应用

Engineering Mechanics
And Its Applications

(中国力学学会中南西南十省(市)工程力学学术会议论文集)

主 编 杨德品 赵锡钱
 扶名福 冯 恕

江西高校出版社

(赣)新登字第 007 号

工程力学及其应用 杨德品 赵锡钱 扶名福 冯恕 编

责任编辑 徐明华

封面设计 傅国平

江西高校出版社出版发行

南昌市洪都大道 16 号

南昌大学印刷厂印刷

开本 787×1092

1/16

印张 20.75

字数 490 千

1994 年 6 月第 1 版

1994 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—300

ISBN7—81033—142—6/G·36

定价：40.00 元

前 言

根据中国力学学会中南西南十省(市)工程力学会议组委会讨论决定,中南西南十省(市)1994年工程力学学术会议由江西省力学学会筹办,1994年7月在江西庐山举行。本次会议是继1992年桂林会议的又一次盛会。会议的论文作者和与会代表,除中南西南各省市外,还有北京、上海、天津、江苏、浙江、陕西、河北的代表参加。

这次会议收到论文摘要80余篇,收到论文70余篇。经过专家评审,本文集收入论文66篇。约49万字。论文内容包括弹塑性力学、计算结构力学、工程结构与岩土力学、实验力学及一般力学等。文集中许多成果内容新颖,不同程度的反映了国内工程力学及其应用的概貌。这将给与会代表和广大科研、工程技术人员以启迪。

这次会议是在中国力学学会和本次会议组委会领导下进行的。会议的顺利进行和文集的问世得到了广大论文作者和与会代表的通力协作,得到了江西高校出版社和南昌大学印刷厂的积极支持,江西省力学学会和南昌大学工程力学研究所的同志们为此付出了辛勤的劳动。借此机会表示诚挚的谢意。

由于论文集出版时间仓促,不当和错误之处在所难免,诚望同志们指正与鉴谅。

中国力学学会中南、西南十省(市)
1994年工程力学会议论文集编委会
一九九四年六月

目 录

弹塑性力学

关于一点应力的新注释	王 炜 (1)
弹塑性材料在含有球形微孔时的本构关系	黄模佳 扶名福 (5)
变形体的局部转动及其计算	黄模佳 扶名福 赵锡钱 (10)
复合材料剪切型断裂力学研究	田宗若 (19)
模糊数学方法在疲劳数据分析中的应用	吴永桥 胡水华 黎明发 (25)
疲劳裂纹形成寿命的断裂力学方法	李中平 (29)
空洞损伤模型的材料宏观本构方程	黄模佳 扶名福 赵锡钱 (32)
脆性损伤构件弯曲应力分析	李相麟 (38)
损伤材料平面应力 I 型裂纹尖端应力应变场	李相麟 (41)
材料具有应变软化性能时厚壁圆筒的承载能力	刘信声 李朝弟 张凇筠 刘超 (44)
复合材料壳体的振动及稳定	闻立洲 (49)
四边简支部分固定矩形薄板的弯曲	范业立 张跃论 (54)
用刚体力学的方法计算梁的大变形	李明义 钟蜀晖 李东珍 (61)
非线性弹性基础上简支矩形板的过屈曲问题	尚新春 陈煜国 (66)
一类非线性微分—积分方程的分段非线性求解法	彭南陵 姜德昌 (73)
短纤维增强环氧基复合模型细观变形研究	刘宝琛 兰钧 (80)
纯应力边界条件下小变形塑性问题的应力场求法	李 仙 (83)
塑性成形的现代力学理论与分析方法概述	扶名福 赵锡钱 (86)
二氧化锆相变增韧陶瓷的断裂韧性测试与增韧机理	陆建光 (95)
金属材料损伤对塑性加工的影响	李相麟 (101)

计算力学

随机有限元法概论	朱位秋 (106)
大位移接触摩擦单元理论	雷晓燕 (110)
结构动力分析的类等参二维四边形动态有限元的建立	桂国庆 (119)

两个各向异性半平面焊接问题的基本解	羿旭明 叶碧泉 (126)
多域非均质结构并行边界元分析	叶碧泉 周志红 梁芝茹 羿旭明 (130)
带孔的各向异性平面问题的边界元法	董春迎 姜建斌 谢志成 (134)
边界积分方程中超奇异积分的数值处理方法	董春迎 谢志成 (137)
薄板大挠度问题的摄动样条有限点法	赵艳林 秦荣 胡学海 (140)
架与弹性地基梁的相互作用	赵艳林 (144)
传递矩阵法解分支弹簧质量系统的振动问题	彭 献 (148)
双线性振动系统的参数识别	彭献 侯福胜 (153)
有限元中心差分算法解结构大变形冲击响应中的网格翻转及其自适应处理	朱明程 刘裂全 张祖枢 曹首义 (157)
用 FE 法分析河床渗井的出水量	王全金 (162)
电磁场的有限元分析	由欣 由敬舜 刘光宗 (166)

实验力学

冲击载荷下电子散斑干涉面内位移场测试技术研究	张东升 佟景伟 (171)
条纹方位图与二维导数符号二值图法提取条纹骨架线	于起峰 张 帆 刘肖琳 (178)
脆性涂层法在测定带锯条应力集中系数和应力分析中的应用	徐 虹 (183)
孔边塑性变形对小孔法残余应力测定的误差分析	李荣锋 (187)
液压凿岩机冲击功的测试与分析	黎明发 柳长智 刘光武 黄 丽 吴 波 董北川 (191)
高速锤打击时立柱的受力分析及测定	王可赞 (196)
120 制动鼓铸件内应力试验研究及分析	张育远 漆承辉 徐雅芸 刘荣庆 向东德 (202)

结构与岩土力学

略论旧房改造工程中若干力学和技术问题—兼论其它	杨德品 冯 怒 (208)
三相多孔介质的应力理论	陈正汉 (215)
一种研究桩土相互作用的新模式—有限层有限元混合法	张崇文 赵剑明 王 辉 (220)
拱坝施工期开裂分析	徐道远 符晓陵 张林兵 (230)
弹性地基上网格扁壳的非线性问题分析	聂国华 (234)

纤维缠绕容器中螺旋与环向层数计算	晏石林	(238)
特高型塔式起重机稳定性的一种计算方法	郑昭明 杨 奇	(243)
薄壳理论在工程中的一个应用	俞建雄	(247)
梅花型遮障尼龙网的受力性态	徐桂双 蔡传国	(251)
多支承压杆的稳定性计算	邹长川	(254)
南昌大学机械楼加层结构设计及若干力学问题	刘光宗 由敬舜	(259)
地下洞室围岩应力复变函数解法	丁成辉 赵锡钱	(263)

流体、一般力学及其他

圆管层流边界层的动量积分方程	吴道全 张幼雯	(268)
变粘性油膜压力分布的有限元法	张幼雯 吴道全	(272)
方管层流运动的瑞利——立兹法	张幼雯 吴道全	(276)
矩形截面弧形管道中粘性流动的半数值半解析解	沈新荣	(279)
管道中非稳定流动的动焓传播理论	钟 敏	(281)
自由活塞式热气机振动分析	钟蜀晖	(286)
用富氏级数分析压气机对进气总压畸变的响应	胡主根	(290)
超球奇异运动的探讨	杨 奇 郑昭明	(295)
流体润滑径向轴承承载量系数研究	闻欣荣	(300)
体外矩心在工程力学中的应用	余学进	(305)
用对称性证明基本变形中几何假设	蔡文豪	(309)
荷载集度剪力弯矩之间关系的完整论述	张音翼	(311)
分析平面框架的消侧移矩阵法	蔡文豪	(314)

关于一点应力的新注释

王 炜

(北京大学 力学系)

摘要 本文指出连续体内一点,法向 $\vec{n}$ 位于同一平面的微分面,其相应的应力向量 $\vec{t}$ 也在一个平面上,并且给出平面上 $\vec{t}$ 端点构成一圆的条件及有关性质,全文应用三个欧拉角对上述一点应力性质给以简捷的证明。

关键词 应力圆,应力向量,欧拉角

一、引言

M. Hayes^[1]曾指出,在连续体内一点,至少存在一个单位法向的方向圆,其相应的应力向量 $\vec{t}$ 亦构成一圆。在本文中,将扩展这一有趣性质为:对任意位于同一平面 π 的 $\vec{n}$,其应力向量亦位于一平面 Σ ,于是 $\vec{t}$ 端点轨迹一般为椭圆,特殊情况为圆。

在第二节,将引入欧拉角来描述一点微分面的法向和应力向量。在第三节,将证明法向 $\vec{n}$ 共面时,相应 $\vec{t}$ 亦共面,且 $\vec{t}$ 为一椭圆,当椭圆二轴相等时,则为圆,在第四节,将指出:若一点三个主应力绝对值不等,存在二个 $\vec{t}$ 为圆的平面;若只有二个主应力绝对值相等,则仅存在一个 $\vec{t}$ 为圆的平面;若三个主应力绝对值全相等,任意平面上 $\vec{t}$ 均为圆。并指出当 $\vec{t}$ 为圆时,该圆半径 a 为第二大主应力绝对值,并且 $\vec{n}$ 所在 π 平面上二个向量 $\vec{n}^{(1)}, \vec{n}^{(2)}$ 的夹角与相应的应力向量 $\vec{t}^{(1)}, \vec{t}^{(2)}$ 夹角一致,其逆命题亦成立。

二、欧拉角表示

今取 (x, y, z) 为某点应力的主坐标系。如图所示,单位向量 $\vec{n}$ 可按欧拉角定义如下:

$$\vec{n} = (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi, \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi, \sin\varphi\sin\theta) \quad (1)$$

其中, $\vec{n}$ 取决于 φ, ψ, θ 。当 φ 取遍 $\{0, 2\pi\}$ 中的值时, $\vec{n}$ 终点轨迹为 π 平面上的一个单位圆。

设与 $\vec{n}$ 相应的应力向量为

$$\vec{t} = \vec{n} \cdot \mathbf{T} = (t_1, t_2, t_3) \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

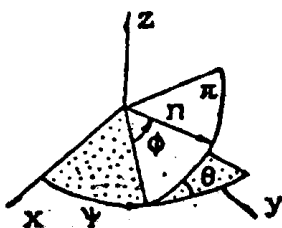


图 1

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 为连续体内一点的主应力。

于是,有

$$\begin{cases} t_1 = (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi)\sigma_1 \\ t_2 = (\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi)\sigma_2 \\ t_3 = \sin\varphi\sin\theta\sigma_3 \end{cases} \quad (4)$$

三、 Σ 平面的决定

对于连续体内任意点的应力状态,我们有下述定理成立。

定理:对连续体内一点,若 $\vec{n}$ 在某平面 π 上,则相应的 $\vec{t}$ 在另一平面 Σ 上。

证明:设 Σ 法向 $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$, 要证存在与 φ 无关的 c_1, c_2, c_3 使

$$c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3 = 0 \quad (5)$$

(4)代入(5)可得

$$\sin\varphi(-c_1\sigma_1\cos\theta\sin\psi + c_2\sigma_2\cos\theta\cos\psi + c_3\sigma_3\sin\theta) + \cos\varphi(c_1\sigma_1\cos\psi + c_2\sigma_2\sin\psi) = 0, \quad (6)$$

从(6)由于 $C_i (i=1, 2, 3)$ 与 φ 无关,有

$$\begin{cases} -c_1\sigma_1\cos\theta\sin\psi + c_2\sigma_2\cos\theta\cos\psi + c_3\sigma_3\sin\theta = 0 \\ c_1\sigma_1\cos\psi + c_2\sigma_2\sin\psi = 0 \end{cases} \quad (7)$$

于是

$$c_1 = \frac{c_3\sigma_3}{\sigma_1} \operatorname{tg}\theta\sin\psi, \quad c_2 = -\frac{c_3\sigma_3}{\sigma_2} \operatorname{tg}\theta\cos\psi \quad (8)$$

故平面 Σ 按(5)可表为

$$\frac{\sin\theta\sin\psi}{\sigma_1} t_1 - \frac{\sin\theta\cos\psi}{\sigma_2} t_2 + \frac{\cos\theta}{\sigma_3} t_3 = 0 \quad (9)$$

其中

$$\vec{C} = \left(\frac{\sin\theta\sin\psi}{\sigma_1}, -\frac{\sin\theta\cos\psi}{\sigma_2}, \frac{\cos\theta}{\sigma_3} \right) \quad (10)$$

与 φ 无关,定理得证

此外,从 Lamé' 应力椭球面,我们知道 Σ 平面上 $\vec{t}$ 端点轨迹为下述椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1, \\ c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0 \end{cases} \quad (11)$$

四、应力圆

现在来研究 Σ 平面上 $\vec{t}$ 端点轨迹为圆的条件。

设圆半径为 a , 从(4)可得

$$\begin{aligned} & (\sigma_1^2\cos^2\psi + \sigma_2^2\sin^2\psi) + \sin\varphi\cos\varphi\cos\theta\sin 2\psi(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) + \sin^2\varphi[\sigma_1^2(\cos^2\theta\sin^2\psi - \cos^2\psi) \\ & + \sigma_2^2(\cos^2\theta\cos^2\psi - \sin^2\psi) + \sigma_3^2\sin^2\theta] = a^2, \end{aligned} \quad (12)$$

由此可得

$$\begin{cases} \sigma_1^2\cos^2\psi + \sigma_2^2\sin^2\psi = a^2, \\ (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\cos\theta\sin^2\psi = 0, \\ \sigma_1^2(\cos^2\theta\sin^2\psi - \cos^2\psi) + \sigma_2^2(\cos^2\theta\cos^2\psi - \sin^2\psi) + \sigma_3^2\sin^2\theta = 0 \end{cases} \quad (13)$$

下面我们分三种情形进行讨论：

情形 1°, $|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|$ 互不相等。不妨设

$$|\sigma_1| > |\sigma_2| > |\sigma_3| \quad (14)$$

从(13)的第二式,有

$$\cos\theta \sin 2\psi = 0 \quad (15)$$

若 $\cos\theta = 0$, (13)的第三式给出

$$\sigma_1^2 \cos^2 \psi + \sigma_2^2 \sin^2 \psi - \sigma_3^2 = 0 \quad (16)$$

由条件(14),可知(16)式不可能成立。

若 $\sin 2\psi = 0$, 于是 $\psi = 0, \frac{\pi}{2}$

当 $\psi = 0$ 时, (13)的第三式给出

$$\sigma_2^2 \cos^2 \theta + \sigma_3^2 \sin^2 \theta - \sigma_1^2 = 0 \quad (17)$$

由条件(14),可知(17)式亦不可能成立。

当 $\psi = \frac{\pi}{2}$ 时, (13)的第三式给出

$$\sigma_1^2 \cos^2 \theta + \sigma_3^2 \sin^2 \theta - \sigma_2^2 = 0 \quad (18)$$

因此有

$$\operatorname{ctg} \theta = \pm \alpha \quad (19)$$

其中

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sigma_2^2 - \sigma_3^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}}, \quad (20)$$

这时存在两个平面 π_1 和 π_2 , 当 $\vec{n}$ 在其上时, $\vec{t}$ 为一个圆, 从(13)第一式可知此圆半径为 $|\sigma_2|$ 。

情形 2°, $|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|$ 仅有两个相等。不妨设

$$|\sigma_1| = |\sigma_2| \neq |\sigma_3| \quad (21)$$

此时(13)的第二式自动满足, 第三式给出

$$\sin^2 \theta = 0 \quad (22)$$

于是 $\theta = 0$, 即当 $\vec{n}$ 在 $z=0$ 平面上时, 其相应的 $\vec{t}$ 为在此平面上的一个圆, 而从(13)第一式可得半径 $a = |\sigma_2|$ 。

情形 3°, $|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\sigma_3|$ 。

此时(13)的后两式均自动满足, 从第一式可得半径 $a = |\sigma_2|$, 即当 $\vec{n}$ 在任一平面上时, 其相应的 $\vec{t}$ 都为某一平面上的圆。

如果 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 同号, $\vec{n}$ 与 $\vec{t}$ 共线, π 与 Σ 重合; 如果它们不同号, $\vec{n}$ 与 $\vec{t}$ 的平面不一定重合。

五、应力向量的夹角

当 $\vec{t}$ 为平面上的圆时, $\vec{t}$ 之间的夹角和 $\vec{n}$ 之间的夹角, 对于情形 2°, 3° 几乎是显然的。对于情形 1°, 将 $\psi = \frac{\pi}{2}$ 代入(4), 可得

$$\begin{cases} t_1 = -\sin\varphi \cos\theta \sigma_1, \\ t_2 = \cos\varphi \sigma_2, \\ t_3 = \sin\varphi \sin\theta \sigma_3, \end{cases} \quad (23)$$

若 $\vec{n}^{(1)}$ 和 $\vec{n}^{(2)}$ 的两个 φ 角分别为 φ_1, φ_2 , 其相应的 $\vec{t}^{(1)}, \vec{t}^{(2)}$ 之间的夹角, 可以如下求得:

$$\vec{t}^{(1)} \cdot \vec{t}^{(2)} = \sigma_1^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos^2 \theta + \sigma_2^2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sigma_3^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin^2 \theta \quad (24)$$

利用关系式(18), 可得

$$\vec{t}^{(1)} \cdot \vec{t}^{(2)} = \sigma_2^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (25)$$

于是 $\vec{t}^{(1)}$ 和 $\vec{t}^{(2)}$ 间的夹角也是 $\varphi_2 - \varphi_1$ 。

有趣的是此逆命题也成立。当平面 π 上任意两个 $\vec{n}^{(1)}$ 和 $\vec{n}^{(2)}$ 之间的夹角与其相应的 $\vec{t}^{(1)}$ 和 $\vec{t}^{(2)}$ 之间的夹角相等时, $\vec{t}$ 必须在某圆上。

事实上, 设 $\vec{n}^{(1)}$ 和 $\vec{n}^{(2)}$ 都用(1)式表示, 其 θ, ψ 角相同, 而 φ 角分别为 φ_1, φ_2 , 其相应 $\vec{t}^{(1)}, \vec{t}^{(2)}$ 由(4)式表示, 其中 $\varphi = \varphi_i (i=1, 2)$ 。

假设

$$\vec{t}^{(1)} \cdot \vec{t}^{(2)} = |\vec{t}^{(1)}| |\vec{t}^{(2)}| \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (26)$$

先考察 $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ 的情形, 即有

$$\vec{t}^{(1)} \cdot \vec{t}^{(2)} = 0, \quad (27)$$

将(4)代入(27)得

$$\begin{aligned} & \cos 2\varphi_1 \cos \theta \cos \psi \sin \psi (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 [\sigma_1^2 (\cos^2 \psi - \cos^2 \theta \sin^2 \psi) \\ & + \sigma_2^2 (\sin^2 \psi - \cos^2 \theta \cos^2 \psi) - \sigma_3^2 \sin^2 \theta] = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

考虑到(28)式与 φ_1 无关, 则可得到(13)的第二、三式。

从以上分析可知 $\vec{t}$ 将在一个圆上。

参 考 文 献

- [1] Hayes, M., A note on stress, Acta Mechanica, Vol. 74, PP. 209—212(1988)

弹塑性材料在含有球形微孔时的本构关系

黄模佳 扶名福

(南昌大学工程力学研究所)

摘要 本文基于构元模型的解析分析,分析了含空洞的弹塑性材料的平均应力场和应变场,给出了同时考虑空洞、弹性、塑性相互耦合时的材料宏观本构关系。

关键词 构元,损伤,球形空洞,弹塑性本构关系

一、引言

细观孔洞的成核与增长在弹塑性金属材料的损伤断裂中起主导作用。为了研究损伤材料的本构关系,必须建立适当的模型来表征细观结构。对空洞长大模型的力学分析起始于 McClinton^[1]的开创性工作。他就圆柱形空洞的长大情况得到了解析解。Rice 和 Tracey^[2]研究了球形空洞的长大问题。他们用变分原理来研究含有球形空洞的理想刚塑性基体,并进行数值求解。Gurson^[3]则在 1975 年完成的空洞机制的博士论文中,建立了空洞体的一套完备的塑性理论体系。以上工作都是设想基体是理想刚塑性体。王自强^[4]则分析了基体材料是均匀的、不可压缩的非线性粘性材料在考虑空洞损伤时的宏观本构关系。

Gurson 及其后继者均没有考虑弹性变形、塑性变形和损伤三者间的相互影响,弹性变形似乎完全与损伤无关。孙毅和王铎^[5]研究了损伤引起的弹性模量变化和弹塑性耦合的情况,但该文未涉及损伤材料的弹性变形和塑性变形间的相互作用对应力的影响。

显然,空洞的产生和发展是塑性变形的产物,空洞的出现将必然影响到宏观弹性行为。把弹性和塑性变形由损伤加以联系,成为耦合的弹性、损伤、塑性变形分析,将是连续介质损伤力学中最容易令人接受的观点,而本文也正是在这方面做了一些初步的研究,给出了考虑损伤的弹塑性材料的宏观本构关系。

二、球形空洞的等效本征应变

从损伤物体中取出一材料构元 I (一微小长方体,如图 1)。材料构元 I 从物体几何尺度上可视为无穷小,但包含了材料损伤的基本信息,整个分析物体可由无数材料构元 I 装配而成。

构元 I 由于受平均应力 $\langle \sigma_{ij} \rangle$ 的作用发生了损伤*,出现了许多微小球形空洞。这些空洞在构元 I 中所占的体积比反映了构元的损伤程度,用损伤因子 ω 来表示该损伤量,且有 $0 \leq \omega < 1$ 。但值得注意的是,本文自始至终仅考虑弹塑性材料的小变形损伤问题,损伤因子 ω 是一个较小的量(如 ω

* 本文引进体积平均记号 $\langle \cdot \rangle \triangleq \frac{1}{V} \int_V \cdot dv$

≤ 0.2).

现设定在应力 $\langle \sigma_{ij} \rangle$ 的作用下, 构元 I 的基体发生了 $\langle \epsilon_{ij}^p \rangle_M$ 的平均塑性应变。用基体材料将微球形空洞填满, 使构元 I 的材料(弹性部分)均匀、连续, 但原微球形空洞内发生了相应的空洞等效本征应变 ϵ_{ij}^* , 本征应变 ϵ_{ij}^* 的值应使得被填满的空洞内的应力为零。把构元 I 分解成构元 II 和构元 III (如图 1)。构元 II 受到外加应力 $\langle \sigma_{ij} \rangle$ 的作用, 仅发生弹性变形。构元 III 没有受到外力的作用, 但原基体处发生了 $\langle \epsilon_{ij}^p \rangle_M$ 的塑性应变, 而原空洞处存在空洞等效本征应变 ϵ_{ij}^* 。显然, 构元 I 的实际应力和应变分别是构元 II 和构元 III 所产生的应力和应变之和。

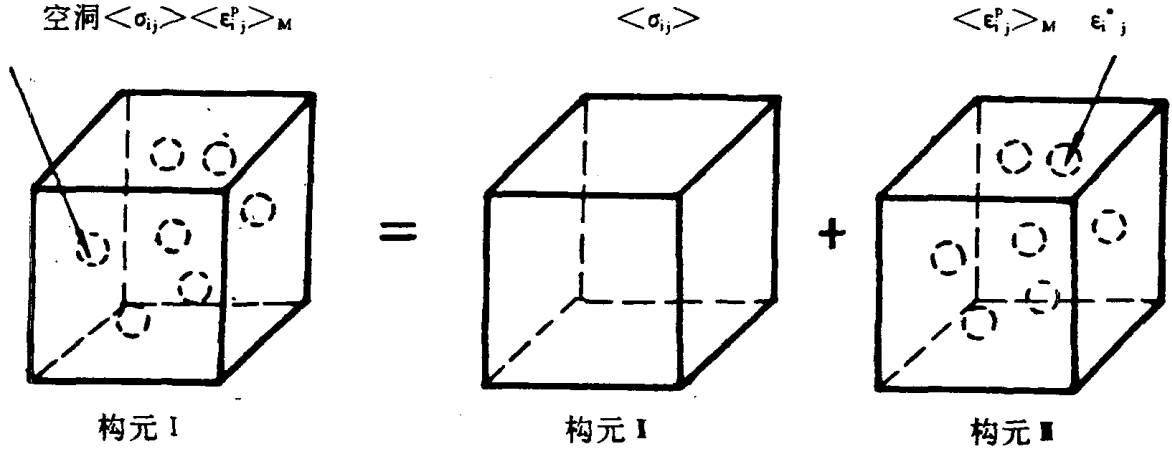


图1

构元 II 的应力应变分析十分简单。在 $\langle \sigma_{ij} \rangle$ 作用下, 仅发生弹性应变, 对于各向同性介质, 它的应变值为

$$\langle \epsilon_{ij}^I \rangle = \frac{1}{2G} (\langle \sigma_{ij} \rangle - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \langle \sigma_{mm} \rangle) \quad (1)$$

其中的 G 和 ν 分别为基体材料的剪切弹性模量和泊松比, δ_{ij} 为 Kronecker 符号。

设构元 III 中存在 N 个本征应变为 ϵ_{ij}^* 的微球形区域, 它们的半径很小, 但相互间的距离则较大。因此, 对于小损伤问题, 忽略各球形空洞的等效本征应变 ϵ_{ij}^* 所产生的约束应力的相互影响。在分析任一球形区域 Ω_k ($k=1, 2, \dots, N$, 而 $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \dots + \Omega_N$) 时, 认为 Ω_k 没有受到任何外部应力的作用, Ω_k 中的应力全部来自于 Ω_k 中的本征应变 ϵ_{ij}^* 与基体塑性应变 $\langle \epsilon_{ij}^p \rangle_M$ 不协调所产生的约束应力。

现假如将 Ω_k 从构元 III 中取出, 这时显然 Ω_k 的形状发生了变化, 但不论在 Ω_k 中或在 Ω_k 附近的母体中均不会产生应力。然后在 Ω_k 的表面 $\partial\Omega_k$ 的所有面元 $dS(x')$ 上, 沿 x_k ($k=1, 2, 3$) 方向加上一 $C_{klij}(\epsilon_{ij}^* - \langle \epsilon_{ij}^p \rangle_M) n_l(x') ds(x')$ 的力 (这里用 x 和 x' 确定物质点的位置, $n_l(x')$ 代表 $dS(x')$ 的外法线与 x_l 坐标轴的夹角的余弦, C_{klij} 是基体的弹性常数)。由于这一操作, Ω_k 内部将产生一个 $-C_{klij}(\epsilon_{ij}^* - \langle \epsilon_{ij}^p \rangle_M)$ 的应力, 并且 Ω_k 回复到 $\epsilon_{ij}^* - \langle \epsilon_{ij}^p \rangle_M = 0$ 时所对应的状态。因此, 如果保持这个力的作用, 就能将 Ω_k 顺利地放回取出它所留下的空腔中去, 然后再将 Ω_k 与空腔焊合。不过这时物体所处的状态并非内应力状态, 因为 $\partial\Omega_k$ 上仍加有作用力。为抵消这一作用力, 并造成内应力状态, 可在 Ω_k 的所有面元 $dS(x')$ 上沿 x_k 方向加上 $C_{klij}(\epsilon_{ij}^* - \langle \epsilon_{ij}^p \rangle_M) n_l(x') ds(x')$ 的力。而根据格林函数的性质^[6], 由这个力在 x_m 方向的 x 处所产生的约束位移 $u_m^c(x)$ 为

$$u_m^c(x) = \int_{\partial\Omega_k} C_{klij}(\epsilon_{ij}^* - \langle \epsilon_{ij}^p \rangle_M) n_l(x') G_{mk}(x - x') dS(x') \quad (2)$$

而格林函数 $G_{mk}(x - x')$ 为

$$G_{mk}(x-x') = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \left[\frac{\bar{x}_k \bar{x}_m}{R^3} + (3-4\nu) \frac{\delta_{km}}{R} \right] \quad (3)$$

其中的 $G_{km}(x-x')$ 可理解为在点 x' 处沿 x_k 方向加一个单位集中力时点 x 处所产生的位移在 x_m 方向的分量, 而 $x_i = \bar{x}_i - x'_i$, $R = |x - x'|$ 。

对(2)式应用高斯定理, 有

$$u_{mn}^e(x) = - \int_{\Omega_k} C_{mnij}(\epsilon_{ij}^* - \langle \epsilon_{ij}^* \rangle_M) G_{mk,h}(x-x') dV(x') \quad (4)$$

造成上述位移的形变将产生约束应力 $C_{pmn} u_{mn}^e(x)$, 但 Ω_k 中已经有应力 $-C_{pmn}(\epsilon_{mn}^* - \langle \epsilon_{mn}^* \rangle_M)$ 存在, 因此在构元 II 的 Ω_k 中的总的内约束应力为

$$\sigma_{pq}^e(x) = C_{pqmn} \left[- \int_{\Omega_k} C_{mnij}(\epsilon_{ij}^* - \langle \epsilon_{ij}^* \rangle_M) G_{mk,h}(x-x') dV(x') - (\epsilon_{mn}^* - \langle \epsilon_{mn}^* \rangle_M) \right] \quad (5)$$

显然

$$S_{mnij} = - \int_{\Omega_k} C_{mnij} G_{mk,h}(x-x') dV(x') \quad (6)$$

为 Eshelby 张量。根据 Eshelby 的工作^[7], 对于各向同性介质, 若 Ω_k 为球形, 有

$$S_{ii} = \frac{7-5\nu}{15(1-\nu)}, S_{iii} = \frac{5\nu-1}{15(1-\nu)}, S_{ijj} = \frac{4-5\nu}{15(1-\nu)} \quad (7)$$

上式的 $i \neq j$, 重复指标不取和, S_{mn} 的其它分量为零。这样构元 II 的 Ω_k 中的约束应变场为

$$\epsilon_{mn}^e = u_{mn,n}^e = S_{mnij}(\epsilon_{ij}^* - \langle \epsilon_{ij}^* \rangle_M) \quad (8)$$

而约束应力场, 由(5)~(8)式可推得

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^e &= C_{ijmn} [\epsilon_{mn}^e - (\epsilon_{mn}^* - \langle \epsilon_{mn}^* \rangle_M)] \\ &= - \frac{G}{15(1-\nu)} [2(7-5\nu)(\epsilon_{ij}^* - \langle \epsilon_{ij}^* \rangle_M) + 2(5\nu+1)\delta_{ij}(\epsilon_{nn}^* - \langle \epsilon_{nn}^* \rangle_M)] \end{aligned} \quad (9)$$

构元 I 的 Ω_k 中的应力值为零, 它又等于构元 I 和构元 II 相应处的应力之和; 即

$$\langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma_{ij}^e = 0 \quad (10)$$

将(9)式代入(10)式, 求得球形空洞等效本征应变为

$$\epsilon_{ij}^* = \langle \epsilon_{ij}^* \rangle_M + \langle \epsilon_{ij}^e \rangle \quad (11)$$

其中

$$\langle \epsilon_{ij}^e \rangle = \frac{15(1-\nu)}{2G(7-5\nu)} \langle \sigma_{ij} \rangle - \delta_{ij} \frac{3(1-\nu)(5\nu+1)}{4G(1+\nu)(7-5\nu)} \langle \sigma_{nn} \rangle \quad (12)$$

三、构元 I 的平均应变

构元 I 的平均应变为 $\langle \epsilon_{ij}^I \rangle$, 它的数值已由(1)式给出。构元 II 的平均应力 $\langle \sigma_{ij} \rangle$ 显然为零, 这是因为

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_D \sigma_{ij} dV = \frac{1}{V} \int_D \sigma_{ik} x_{j,k} dV \quad (13)$$

其中的 V 为构元的体积, D 为构元体积所对应的空间区域。构元 II 的各点满足力的平衡方程 $\sigma_{k,k} = 0$, 在其边界上满足力的边界条件 $\sigma_{ik} n_k = 0$ 。若用 ∂D 表示构元 II 的表面区域, 对(13)式利用高斯公式, 有

$$\int_D \sigma_{ij} dV = \int_{\partial D} \sigma_{ik} x_{j,k} n_k dS - \int_D \sigma_{k,k} x_j dV = 0 \quad (14)$$

构元 II 的平均应力为零。

构元 II 的平均应变 $\langle \epsilon_{ij}^I \rangle$ 为

$$\begin{aligned}\langle \epsilon_{ij}^I \rangle &= \frac{1}{V} \int_{D-\Omega} (\epsilon_{ij} + \langle \epsilon_{ij}^p \rangle_M) dV + \frac{1}{V} \int_{\Omega} (\epsilon_{ij} + \epsilon_{ij}^*) dV \\ &= \frac{1}{V} C_{ijkl} \int_D \sigma_{kl} dV + \frac{1}{V} \int_{D-\Omega} \langle \epsilon_{ij}^p \rangle_M dV + \frac{1}{V} \int_{\Omega} \epsilon_{ij}^* dV\end{aligned}\quad (15)$$

$\langle \epsilon_{ij}^p \rangle$ 为基体的平均塑性应变。由(11)式可知：对于构元 I 来讲， ϵ_{ij}^* 为常数。若设构元 I 中空洞的体积为 V_c ，基体的体积为 V_M ，损伤因子 $\omega = V_c/V$ ，利用(14)式、(11)式和(15)式，求得构元 I 的平均应变为

$$\langle \epsilon_{ij}^I \rangle = \langle \epsilon_{ij}^p \rangle_M + \omega \langle \epsilon_{ij}^o \rangle \quad (16)$$

构元 I 的平均应变为构元 I 的平均应变与构元 II 的平均应变之和；即

$$\langle \epsilon_{ij}^I \rangle = \langle \epsilon_{ij}^I \rangle + \langle \epsilon_{ij}^p \rangle_M + \omega \langle \epsilon_{ij}^o \rangle \quad (17)$$

其中的 $\langle \epsilon_{ij}^I \rangle$ 和 $\langle \epsilon_{ij}^o \rangle$ 已分别由(1)式和(12)式给出。

对于弹塑性问题，希望得到的是应力率和应变率之间的关系。将(17)式两边对时间求导，求得构元 I 的应变率为

$$\dot{\langle \epsilon_{ij}^I \rangle} = \dot{\langle \epsilon_{ij}^I \rangle} + \dot{\langle \epsilon_{ij}^p \rangle}_M + \omega \dot{\langle \epsilon_{ij}^o \rangle} + \dot{\omega} \langle \epsilon_{ij}^o \rangle \quad (18)$$

在(18)式中， $\langle \epsilon_{ij}^p \rangle$ 和 ω 值目前还不知道，它们的求解是本文下节要解决的问题。

四、含空洞的弹塑性材料的宏观本构关系

设构元 I 未受外力作用时的体积为 V_0 。受外力作用后，材料发生损伤。如果基体的平均应变为 $\langle \epsilon_{ij} \rangle_M$ ，则此时构元 I 的基体体积 $V_M = V_0 + V_0 \langle \epsilon_{kk}^I \rangle$ 。根据损伤因子 ω 的定义，有

$$\omega = \frac{\langle \epsilon_{kk}^I \rangle - \langle \epsilon_{kk} \rangle_M}{1 + \langle \epsilon_{kk}^I \rangle} \quad (19)$$

(19)式两边同对时间求导，考虑到 ω 是个较小的量，忽略高阶小量后，求得损伤因子的变化率为 $\dot{\omega} = \dot{\langle \epsilon_{kk}^I \rangle} - \dot{\langle \epsilon_{kk} \rangle}_M$ 。进入塑性阶段后，基体本身的体积变化很小， $\langle \epsilon_{kk} \rangle_M \approx 0$ 。这样， $\dot{\omega}$ 的值可近似表示成

$$\dot{\omega} = \dot{\langle \epsilon_{kk}^I \rangle} \quad (20)$$

考虑到空洞中的应力等于零，构元 I 基体材料的平均应力 $\langle \sigma_{ij} \rangle_M$ 和平均应力 $\langle \sigma_{ij} \rangle$ 之间有以下简单关系

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = (1 - \omega) \langle \sigma_{ij} \rangle_M \quad (21)$$

由(20)和(21)式求得基体的平均应力率 $\dot{\langle \sigma_{ij} \rangle}_M$ 为

$$\dot{\langle \sigma_{ij} \rangle}_M = \frac{\dot{\langle \sigma_{ij} \rangle}}{1 - \omega} + \langle \epsilon_{kk}^I \rangle \frac{\dot{\langle \sigma_{ij} \rangle}}{(1 - \omega)^2} \quad (22)$$

基体材料满足 $\langle \epsilon_{ij}^p \rangle_M = 0$ ，根据(18)式和(20)式可以推得

$$\dot{\omega} = \dot{\langle \epsilon_{kk}^I \rangle} = F \dot{\langle \sigma_{ij} \rangle} \quad (23)$$

其中

$$F = \frac{2(1 - \nu) + 3\omega(1 - \nu)}{4G(1 + \nu) - 3(1 - \nu)\langle \sigma_{kk} \rangle} \quad (24)$$

设基体材料为理想弹塑性材料，它的屈服面方程为

$$\langle f \rangle_M = \sqrt{\frac{3}{2} \langle S_{ij} \rangle_M \langle S_{ij} \rangle_M} - \sigma_s = \langle \sigma' \rangle_M - \sigma_s = 0 \quad (25)$$

其中的 $\langle S_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle_M - \delta_{ij} \langle \sigma_{kk} \rangle_M / 3$ 为基体的平均应力偏量, σ_s 为基体材料的屈服应力。对于关联流动, 根据正交法则有

$$\langle \dot{\epsilon}_{ij}^p \rangle_M = \lambda \frac{\partial \langle f \rangle_M}{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_M} = \lambda \frac{3 \langle S_{ij} \rangle_M}{2 \sigma_s} \quad (26)$$

基体材料本身还满足平均意义上的应力应变关系

$$\langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle_M = 2G (\langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle_M - \langle \dot{\epsilon}_{ij}^p \rangle_M) + \frac{2\nu}{1-2\nu} G \delta_{ij} (\langle \dot{\epsilon}_{kk} \rangle_M - \langle \dot{\epsilon}_{kk}^p \rangle_M) \quad (27)$$

考虑到 $\langle \dot{\sigma}^s \rangle_M = \frac{3 \langle S_{ij} \rangle_M}{2 \sigma_s} \langle \dot{\sigma}_{ij} \rangle_M = 0$, 并利用(26)式、(27)式和(21)式, 可求出基体的平均塑性应变率为

$$\langle \dot{\epsilon}_{ij}^p \rangle_M = L_{ijkl} \langle \dot{\epsilon}_{kl} \rangle_M \quad (28)$$

其中

$$L_{ijkl} = \frac{3 \langle S_{ij} \rangle \langle S_{kl} \rangle}{2(1-\omega)^2 \sigma_s^2} \quad (29)$$

这里的 $\langle S_{ij} \rangle$ 为构元 I 的平均应力偏量。将(28)式代入(27)式求得构元 I 的基体的平均应变率

$\langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle_M$, 再将其代回(28)式, 最终求得构元 I 的基体的平均塑性应变率 $\langle \dot{\epsilon}_{ij}^p \rangle_M$ 为

$$\langle \dot{\epsilon}_{ij}^p \rangle_M = T_{ijkl} (\langle \dot{\sigma}_{kl} \rangle_M - \delta_{kl} \frac{\nu}{1+\nu} \langle \dot{\sigma}_{mm} \rangle_M) \quad (30)$$

其中

$$T_{ijkl} = L_{ipq} (\delta_{kp} \delta_{lq} - L_{klpq})^{-1} / (2G) \quad (31)$$

将(22)式和(23)式代入(30)式, 得

$$\langle \dot{\epsilon}_{ij}^p \rangle_M = \frac{T_{ijkl}}{1-\omega} \langle \dot{\sigma}_{kl} \rangle + H_{ij} \langle \dot{\sigma}_{mm} \rangle \quad (32)$$

其中

$$H_{ij} = T_{ijkl} \left[F \frac{\langle \sigma_{kl} \rangle}{(1-\omega)^2} - \delta_{kl} \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{1}{1-\omega} + \frac{F \langle \sigma_{nn} \rangle}{(1-\omega)^2} \right) \right] \quad (33)$$

将(1)式、(32)式、(12)式和(23)式一起代入(18)式, 求得弹塑性材料在含有球形微孔时的本构关系为

$$\langle \dot{\epsilon}_{ij}^I \rangle = P_{ijkl} \langle \dot{\sigma}_{kl} \rangle + Q_{ij} \langle \dot{\sigma}_{mm} \rangle \quad (34)$$

P_{ijkl} 和 Q_{ij} 的值由以下表达式确定

$$P_{ijkl} = \left[\frac{1}{2G} + \omega \frac{15(1-\nu)}{2G(7-5\nu)} \right] \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{T_{ijkl}}{1-\omega} \quad (35)$$

$$Q_{ij} = H_{ij} + \frac{15(1-\nu)}{2G(7-5\nu)} F \langle \sigma_{ij} \rangle - \left[\frac{\nu}{2G(1+\nu)} + F \frac{3(1-\nu)(5\nu+1)}{4G(1+\nu)(7-5\nu)} \langle \sigma_{nn} \rangle + \frac{3(1-\nu)(5\nu+1)}{4G(1+\nu)(7-5\nu)} \omega \right] \delta_{ij} \quad (36)$$

(34)式的逆形式为

$$\langle \dot{\sigma}_{kl} \rangle = (P_{ijkl} + Q_{ij} \delta_{kl})^{-1} \langle \dot{\epsilon}_{ij}^I \rangle \quad (37)$$

(34)式和(37)式为同时考虑空洞、弹性、塑性相互耦合时的材料宏观本构关系, 正是本文最终期望得到的结果。

(参考文献下转第18页)

变形体的局部转动及其计算

黄模佳 扶名福 赵锡钱

(南昌大学)

摘要 本文通过直接积分求证了 Cauchy 平均转角的计算表达式。给出了广义 Novozhilov 平均转角定义,并直接积分得出该平均转角的计算表达式。

关键词 Cauchy 平均转角, 广义 Novozhilov 平均转角

一、引言

对变形体的转动研究可追溯到 Cauchy 在 1841 年提出的以他名字命名的平均转动,遗憾的是 Cauchy 本人也未能获得求 Cauchy 平均转角的表达式;在这之后的一百余年(1948 年),才由 Novozhilov 给出了描述三维变形体局部转动的 Novozhilov 平均转动的表达式。但是 Novozhilov 平均转动并不等价于 Cauchy 平均转动,前者为转动角正切的平均值,而后者为转角的平均值。1988 年,郑泉水和黄克智^{[1][4]}用几何方法第一次成功地给出了 Cauchy 平均转角的表达式,所得结果十分简洁、漂亮。

本文则采用直接积分的方法,求出了 Cauchy 平均转角的表达式,其结果和郑、黄^{[1][4]}的完全一致。

另外,Novozhilov 给出的平均转角^[2],实际上仅考虑了垂直于转动轴平面上所有线素转角正切的平均值。因此,为了较完全地描述三维变形体的局部转动,本文对 Novozhilov 定义的平均转角进行了推广,给出了广义 Novozhilov 平均转角的定义,推导出它的计算表达式。

二、Cauchy 平均转角

变形体在三维空间中变形运动,其物质点在初始构形和当前构形的位置矢量分别记为 $\underline{P}$ 和 $\underline{p}$;若设变化关系表示如下

$$\underline{p} = \underline{p}(\underline{P}, t) \quad (1)$$

变形梯度 $\underline{F}$ 则可定义为

$$\underline{dp} = \underline{F} d\underline{P}, \quad \underline{F} = \frac{\partial \underline{p}}{\partial \underline{P}} \quad (2)$$

参照图 1, 设 Ω 是单位矢量 $\underline{r}$ 的法平面, $\underline{r}$ 和 Ω 平面的交点为物质点 P , 则 P 点处的物质线元 $\underline{N}$ ($\underline{N} = d\underline{P} / |d\underline{P}|$) 绕 $\underline{r}$ 轴的转角 θ_r 可由下述方程组确定到只差一个 2π 的倍数^{[1][4]}

$$\begin{cases} \lambda \cos \theta_r = \underline{N} (\underline{I} - \underline{r} \otimes \underline{r}) \underline{F} \underline{N} \\ \lambda \sin \theta_r = \underline{r} [\underline{N} \times (\underline{F} \underline{N})] \end{cases} \quad (3)$$