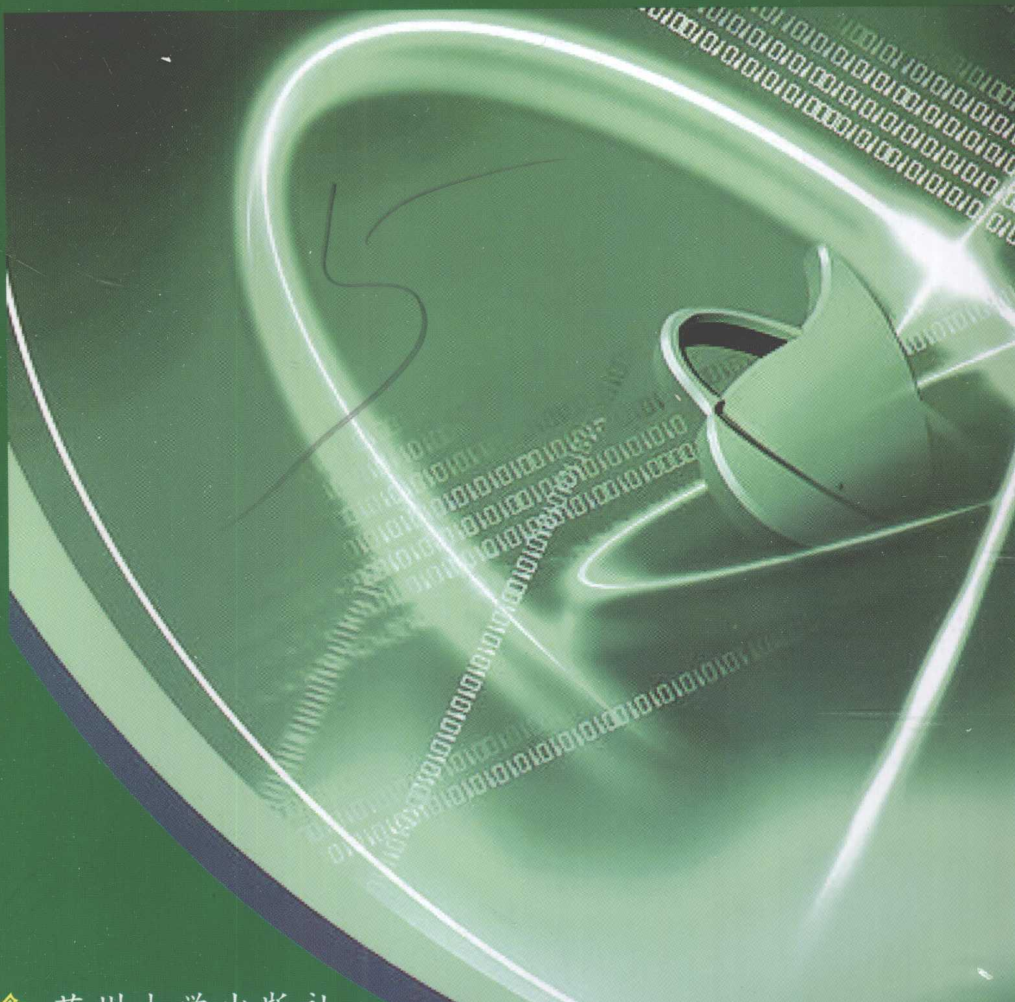
大学物理学习辅导与大作业

PHYSICS

王 艺 主编



苏州大学出版社

大学物理学习辅导与大作业

主　编　王　艺
副主编　田　芬　曹秀华
　　　　时善进　孙　坚

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学习辅导与大作业/王艺主编. —苏州：苏州大学出版社，2010. 2

ISBN 978-7-81137-448-3

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①物理学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 021119 号

内容提要

本书是作者根据多年的教学体会和实践经验编写而成的. 书中汇集了大学物理课程中的精髓内容，对大学物理的知识结构、基本内容、基本理论和基本概念作了简明精炼的归纳和总结，并对难点问题进行了分析，将大学物理中常用的解题方法加以归纳提炼，同时还编配和精选了大作业和模拟试题供学生课后练习与测试.

大学物理学习辅导与大作业

主编 王 艺

责任编辑 周建兰

苏州大学出版社出版发行

(地址：苏州市干将东路 200 号 邮编：215021)

宜兴文化印刷厂印装

(地址：宜兴市南漕镇 邮编：214217)

开本 787 mm×1 092 mm 1/16 印张 16 字数 394 千

2010 年 2 月第 1 版 2010 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81137-448-3 定价：27.00 元

苏州大学出版社营销部 电话：0512-67258835

苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

前　　言

大学物理作为高等工科院校各专业学生必修的重要基础课，在培养高素质人才的工作中，起着其他学科不可替代的作用.学生通过学习物理，可以掌握物理学的基本概念、基本规律和基本方法，对其历史、现状和前沿等方面有一个整体上的了解，学会科学地思维，培养提出问题、分析问题和解决问题的能力.因此，学好物理学，打下坚实的物理基础已成为新世纪人才的基本素养中不可缺少的一部分.

另一方面，教师们在长期的教学中发现，由于大学物理课的学时数普遍偏少，导致教学进度较快.进入大学不久的低年级学生学习方法不适应，学习中抓不住重点，教材中提供的习题的类型一般不够多样，以及大学物理具有概念性强、涉及面广等特点，学生在学习时普遍感到困难.有鉴于此，我们结合自己多年的教学体会和经验，编写了这本学习辅导用书.书中汇集了大学物理课程的精髓，对大学物理的基本内容、知识框架、基本理论和基本概念作了精炼的归纳，对学习中不易理解或容易混淆的难点问题作了一定的分析(因篇幅有限，每章只选了 2～3 个难点进行了分析)，将常见习题类型和解题方法加以总结.书中还精选了许多典型例题作为示范，同时编配了不同类型的习题作为大作业供学生课后练习.每一章的大作业，意在帮助学生及时巩固该章的基本知识点，了解自己的学习情况.最后的四套模拟试题则让学生在一个阶段的学习之后，进行自我测试和检验.通过这些训练，将有助于学生理解巩固所学知识，提高分析问题和解题能力.

全书分六篇共十六章.第一、二、四篇由王艺执笔，第三篇由孙坚执笔，第五篇由田芬执笔，第六篇由时善进执笔，各章的知识框图由曹秀华执笔，模拟试题及答案由时善进编写.

由于编者水平有限，错误和遗漏之处在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2010 年 1 月

目　录

第一篇　力　学

第 1 章　质点运动学 …… (1)
1.1　内容提要 …… (1)
1.2　知识框图 …… (4)
1.3　难点分析 …… (4)
1.4　解题指导 …… (6)
1.5　大作业 …… (9)
第 2 章　质点动力学 …… (13)
2.1　内容提要 …… (13)
2.2　知识框图 …… (17)
2.3　难点分析 …… (18)
2.4　解题指导 …… (19)
2.5　大作业 …… (24)
第 3 章　刚体的定轴转动 …… (30)
3.1　内容提要 …… (30)
3.2　知识框图 …… (34)
3.3　难点分析 …… (34)
3.4　解题指导 …… (35)
3.5　大作业 …… (37)

第二篇　电磁学

第 4 章　真空中的静电场 …… (42)
4.1　内容提要 …… (42)
4.2　知识框图 …… (46)
4.3　难点分析 …… (47)
4.4　解题指导 …… (47)
4.5　大作业 …… (50)

第 5 章　静电场中的导体和电介质 …… (55)
5.1　内容提要 …… (55)
5.2　知识框图 …… (58)
5.3　难点分析 …… (59)
5.4　解题指导 …… (60)
5.5　大作业 …… (64)
第 6 章　稳恒电流 …… (69)
6.1　内容提要 …… (69)
6.2　难点分析 …… (71)
6.3　解题指导 …… (72)
6.4　大作业 …… (75)
第 7 章　稳恒磁场 …… (78)
7.1　内容提要 …… (78)
7.2　知识框图 …… (83)
7.3　难点分析 …… (84)
7.4　解题指导 …… (85)
7.5　大作业 …… (91)
第 8 章　电磁感应　电磁场 …… (96)
8.1　内容提要 …… (96)
8.2　知识框图 …… (100)
8.3　难点分析 …… (101)
8.4　解题指导 …… (102)
8.5　大作业 …… (107)

第三篇　热　学

第 9 章　气体动理论 …… (112)
9.1　内容提要 …… (112)
9.2　知识框图 …… (116)
9.3　难点分析 …… (116)
9.4　解题指导 …… (118)
9.5　大作业 …… (120)
第 10 章　热力学基础 …… (124)
10.1　内容提要 …… (124)
10.2　知识框图 …… (129)
10.3　难点分析 …… (129)
10.4　解题指导 …… (130)

10.5 大作业 …………………………………………………………… (133)

第四篇 机械振动和机械波

第 11 章 机械振动 …………………………………………………… (138)
11.1 内容提要 ………………………………………………………… (138)
11.2 知识框图 ………………………………………………………… (141)
11.3 难点分析 ………………………………………………………… (141)
11.4 解题指导 ………………………………………………………… (143)
11.5 大作业 …………………………………………………………… (147)
第 12 章 机械波 ……………………………………………………… (152)
12.1 内容提要 ………………………………………………………… (152)
12.2 知识框图 ………………………………………………………… (156)
12.3 难点分析 ………………………………………………………… (156)
12.4 解题指导 ………………………………………………………… (158)
12.5 大作业 …………………………………………………………… (162)

第五篇 光 学

第 13 章 几何光学 …………………………………………………… (167)
13.1 内容提要 ………………………………………………………… (167)
13.2 知识框图 ………………………………………………………… (171)
13.3 难点分析 ………………………………………………………… (172)
13.4 解题指导 ………………………………………………………… (172)
13.5 大作业 …………………………………………………………… (173)
第 14 章 波动光学 …………………………………………………… (177)
14.1 内容提要 ………………………………………………………… (177)
14.2 知识框图 ………………………………………………………… (183)
14.3 难点分析 ………………………………………………………… (184)
14.4 解题指导 ………………………………………………………… (185)
14.5 大作业 …………………………………………………………… (190)

第六篇 近代物理

第 15 章 狭义相对论 ………………………………………………… (196)
15.1 内容提要 ………………………………………………………… (196)
15.2 知识框图 ………………………………………………………… (200)
15.3 难点分析 ………………………………………………………… (200)
15.4 解题指导 ………………………………………………………… (202)

15.5　大作业 …………………………………………………………………… (204)
第 16 章　量子物理基础 ……………………………………………………… (208)
16.1　内容提要 ………………………………………………………………… (208)
16.2　知识框图 ………………………………………………………………… (215)
16.3　难点分析 ………………………………………………………………… (216)
16.4　解题指导 ………………………………………………………………… (218)
16.5　大作业 …………………………………………………………………… (220)
模拟试题(一)…………………………………………………………………… (223)
模拟试题(二)…………………………………………………………………… (227)
模拟试题(三)…………………………………………………………………… (232)
模拟试题(四)…………………………………………………………………… (237)

大作业计算题及模拟试题参考答案……………………………………………… (241)

第一篇　力学

第1章　质点运动学

1.1　内 容 提 要

一、描述质点运动的三个基本要素

1. 参考系和坐标系.

由于物体的运动是绝对的，故只能在相对的意义上讨论运动，因此引入参考系. 描述物体的机械运动时被选做参考的物体或物体群称为参考系. 而为了定量地描述物体的运动，又必须建立坐标系，它是实物构成的参考系的数学抽象.

参考系的选取是任意的. 常用的坐标系有笛卡尔直角坐标系、平面极坐标系和自然坐标系.

2. 质点.

在研究机械运动的一些问题中，物体的形状和大小对运动的影响不大或没有影响时，可暂不考虑它们的形状和大小，而把物体看做是一个具有质量而没有形状和大小的点来处理，称为质点. 显然，质点是实际物体的理想化模型，一个物体能否抽象为质点，应根据问题的实际情况决定.

二、描述质点运动的四个基本物理量

1. 位矢 $\boldsymbol{r}$.

在笛卡尔直角坐标系中，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，它是从坐标原点指向质点的矢量.

2. 位移 $\Delta\boldsymbol{r}$.

描述质点位置变化的大小和方向.

在笛卡尔直角坐标系中，

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$$

注意：(1) 位移和路程是两个不同的概念. 位移是矢量，路程是标量. 只有当时间间隔趋于零时，二者的数值才能看做相等，即：当 $\Delta t\to 0$ 时，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$.

(2) 位移和位置是两个不同的概念，位移与位置矢量的变化相联系.

(3) 一般地，$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r$.

3. 速度$\boldsymbol{v}$.

描述质点位置变化的快慢和方向.

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

在笛卡尔直角坐标系中,

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_x+\boldsymbol{v}_y+\boldsymbol{v}_z=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

在自然坐标系中,通常用速率来表示质点在任一时刻沿轨迹运动的快慢,即

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$$

注意:(1) 平均速度的大小不等于平均速率.

(2) 瞬时速度的大小即瞬时速率(速率).

4. 加速度 $\boldsymbol{a}$.

描述质点速度变化的快慢和方向.

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在笛卡尔直角坐标系中,

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

在自然坐标系中,加速度可分解为切向加速度和法向加速度,如图 1-1 所示,即

$$\boldsymbol{a}=a_t\boldsymbol{e}_t+a_n\boldsymbol{e}_n=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

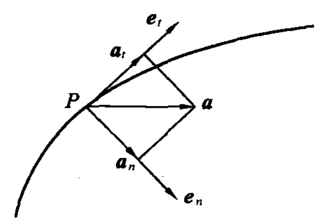


图 1-1

注意:(1) 加速度与速度的变化相联系,而不是和速度本身相联系.

(2) 当质点做圆周运动时,$\rho=R$,所以有

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t+\frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_n$$

三、圆周运动的角量描述

1. 角位置.

在某一时刻,质点的位矢 $\boldsymbol{r}$ 与极轴(图 1-2 中 x 轴)的夹角 θ 称为对 O 点的角位置(也称角坐标).

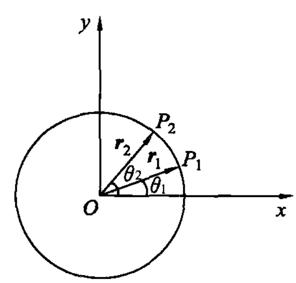


图 1-2

2. 角位移.

描述质点做圆周运动时角位置变化的大小和方向.

$$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$$

3. 角速度.

描述质点做圆周运动时角位置变化的快慢和方向.

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

4. 角加速度.

描述质点做圆周运动时角速度变化的快慢和方向.

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

5. 角量与线量的关系.

$$\Delta s=R\Delta\theta,\ v=R\omega,\ a_t=R\alpha,\ a_n=R\omega^2$$

四、运动方程

1. 质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$.

运动方程反映质点的位置随时间的变化情况.

在笛卡尔直角坐标系中，$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$.

2. 运动方程也可表示为：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$.

此式也表明，质点的实际运动是各个分运动的合成，这就是运动的叠加原理.

3. 在圆周运动中，运动方程的角量形式是：$\theta=\theta(t)$.

五、相对运动

选用不同参考系研究同一质点的运动得到的图像和结果不同.

以 O 代表静止坐标系，以 O' 代表运动坐标系（图1-3）. 在 O' 系相对于 O 系以速度 $\boldsymbol{u}$ 做平动运动的情况下，同一质点在这两个参考系中的位矢、速度、加速度之间的关系为

$$\boldsymbol{r}_{OP}=\boldsymbol{r}_{O'P}+\boldsymbol{u}\Delta t,$$
$$\boldsymbol{v}_{OP}=\boldsymbol{v}_{O'P}+\boldsymbol{u},$$
$$\boldsymbol{a}_{OP}=\boldsymbol{a}_{O'P}+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$

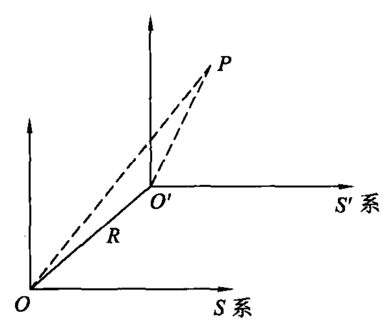


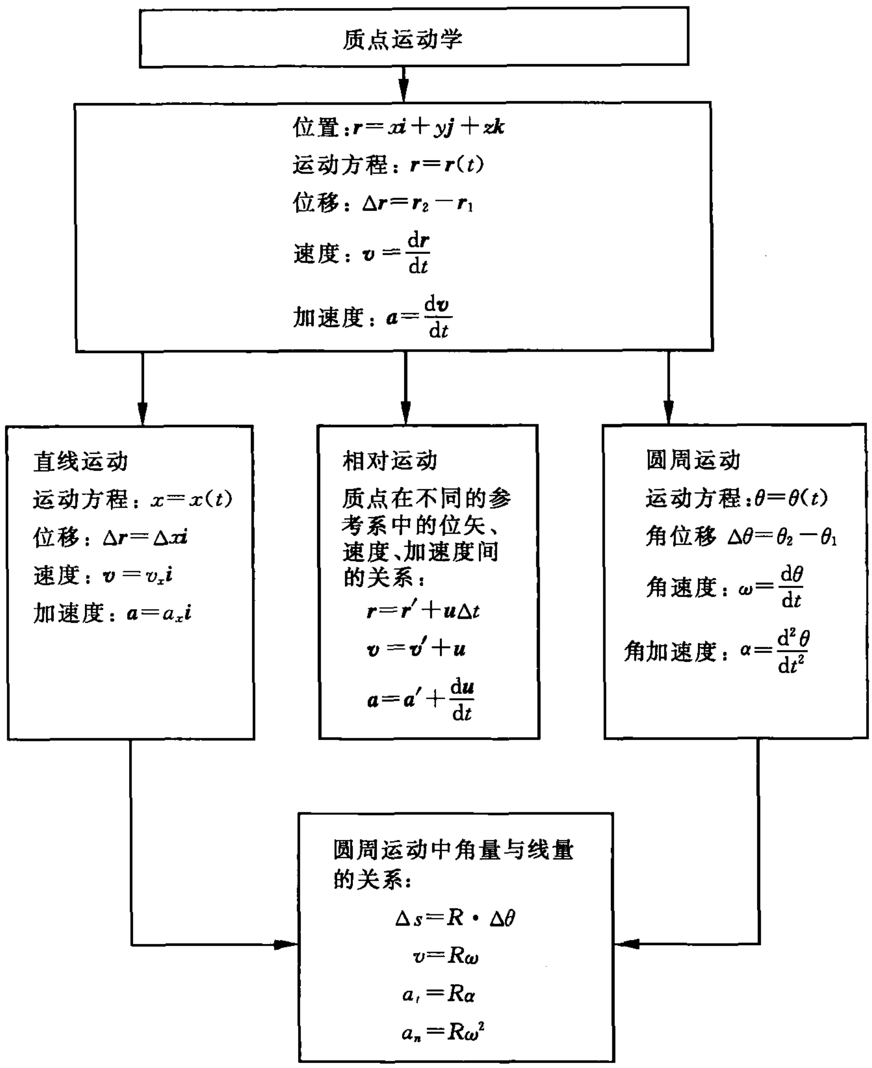
图 1-3

如果两个参考系相对做匀速直线运动，则 $\boldsymbol{a}_{OP}=\boldsymbol{a}_{O'P}$.

注意：(1) 上述结论只适用于两坐标系间的相对速度远小于光速的低速运动情形.

(2) 速度的叠加和速度的变换不同. 速度的叠加是指在同一参考系中一个质点的速度和它的分速度之间的关系；速度的变换涉及有相对运动的两个参考系，其公式的形式和相对速度有关.

1.2 知识框图



1.3 难点分析

一、关于物理量的矢量性

如果一个物理量是矢量，则应特别注意以下几方面的问题：

1. 一个矢量如果其符号为“正”，则表明它的方向与所选取的坐标正方向相同；反之，如为“负”，则表明该矢量的方向与所选取的坐标正方向相反. 例如，$\boldsymbol{A}_1=3\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{A}_2=-3\boldsymbol{i}$ 分别表明 $\boldsymbol{A}_1$ 指向 x 轴的正方向，$\boldsymbol{A}_2$ 指向 x 轴的负方向.

2. 矢量增量的模和模的增量是不同的，如图 1-4 所示：

$$\Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1$$

$$|\Delta \boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1| = \overline{ab}$$

$$\Delta A = |\boldsymbol{A}_2| - |\boldsymbol{A}_1| = \overline{cb}$$

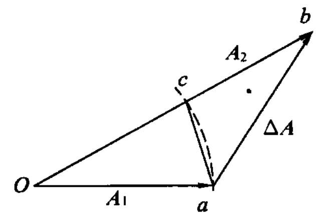


图 1-4

例如： $|\Delta \boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$

$\Delta r = |\boldsymbol{r}_2| - |\boldsymbol{r}_1|$

因此 $|\Delta \boldsymbol{r}| \neq \Delta r$

又如 $|\Delta \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1|$

$\Delta v = |\boldsymbol{v}_2| - |\boldsymbol{v}_1|$

因此 $|\Delta \boldsymbol{v}| \neq \Delta v$

因此，可以明确：

(1) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = v$，它表示速度矢量的大小，$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v_r$，它表示位移矢量的模对时间的变化率，它是速度的径向分量的大小，即$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$.

(2) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right| = a$，它表示加速度矢量的大小，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_t$，它是切向加速度的大小，即$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

3. 矢量的运算一定要遵循矢量的运算法则. 例如，已知质点的运动方程为

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

在计算质点的速度和加速度时，有人先求出 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，然后根据 $v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$和 $a = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$求得结果. 又有人先计算速度和加速度的分量，再合成而求得结果，即

$$v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} \text{ 和 } a = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$$

两种方法中第一种显然是错误的. 它不仅没有按矢量的运算法则进行运算，而且只考虑了矢径 $\boldsymbol{r}$ 的量值随时间 t 的变化，而未考虑到由于 $\boldsymbol{r}$ 的方向随时间 t 的变化对速度的贡献，或速度$\boldsymbol{v}$ 的方向随时间 t 的变化对加速度的贡献.

4. 用矢量方法描述物理规律具有鲜明的物理意义，同时其数学形式对于各种坐标系保持不变. 矢量分解的任意性包括一个矢量可以在同一坐标系中按不同方式分解以及可以在不同坐标系中进行分解. 例如，已知质点在笛卡尔直角坐标系中的运动方程，怎样求它的切向加速度和法向加速度？这时，$\boldsymbol{a}$ 即可以写为 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y$，也可以写为 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$，于是在利用运动方程求得 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$ 之后，就可以进一步求得 $\boldsymbol{a}_t$、$\boldsymbol{a}_n$ 了.

5. 矢量和标量之间不能划等号，矢量和它的模之间不能划等号. 例如，$\Delta \boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} = 5$ 的写法就是错误的，正确写法是：$\Delta \boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$；$|\Delta \boldsymbol{r}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

二、关于运动的合成和分解

1. 在处理运动的合成和分解问题时，既可以把合运动看成是两个相互垂直的独立分运动的合成，也可以把合运动看成是任意两个方向的独立分运动的合成，前者只是在计算上可能带来一些方便，而后者则更具灵活性. 例如，斜抛运动，它既可以看成是沿水平方向的匀速

直线运动和沿竖直方向的上抛运动的合成，即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_x+\boldsymbol{r}_y=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，也可以看成是沿初速度方向的匀速直线运动和沿竖直方向的自由落体运动的合成，即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$（图 1-5）.

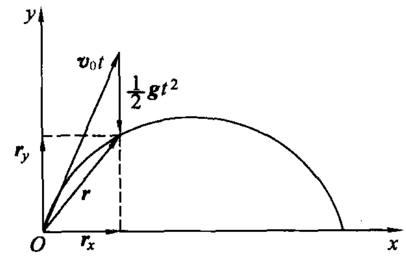


图 1-5

2. 运动叠加原理强调运动的独立性和运动的叠加性，任何一个质点的实际运动（即合运动）都可以看成是同时参与的几个独立运动的合成. 因此，在分析运动的合成和分解时，要注意什么是合运动，什么是分运动. 例如，在高出水面 h 的岸上，用绳跨过定滑轮以恒定速率 v_0 拉船靠岸，如图 1-6 所示. 则船运动的速率是 $v=v_0\cos\theta$，还是 $v=v_0/\cos\theta$?

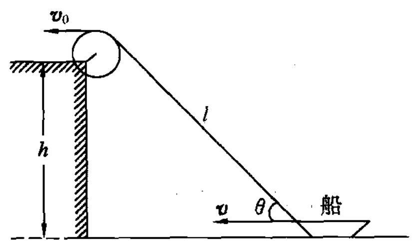


图 1-6

这个问题中，船的实际运动是沿着水面向左的，而拉绳的运动只是船沿着绳的方向的一个分运动，实际上船头既有沿绳的平动，又有绕定滑轮的转动，是这两种运动的合成，即 $v_0=v\cos\theta$，从而，$v=\frac{v_0}{\cos\theta}$.

1.4 解题指导

一、习题类型和解题方法

1. 已知运动方程，求速度和加速度.

解决这类问题需要用微分的方法. 将已知的函数 $r(t)$ 对时间 t 求导数即可，即

$$\text{位矢 } \boldsymbol{r}(t)\xrightarrow{\text{求导}}\text{速度} \boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\xrightarrow{\text{求导}}\text{加速度 } \boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

注意： 因为这些物理量都是矢量，要确定它们的大小和方向还须在相应的坐标系中进行.

2. 已知速度和加速度，求运动方程.

解决这类问题需要用积分的方法. 将已知的速度、加速度进行积分即可，即

$$\text{加速度 } \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)\xrightarrow{\text{积分}}\text{速度 } \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\int\boldsymbol{a}\mathrm{d}t\xrightarrow{\text{积分}}\text{位矢 } \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\int\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$$

注意：（1）这类问题有时需由初始条件来确定积分上下限.

（2）当 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{v}$ 不是时间的函数而是别的物理量的函数时，则往往需要先“凑变量”，分离变量后再进行积分.

3. 直线运动方程的应用.

直线运动是一种最简单的运动，在这一类问题中必须注意运动方程在不同的参考系和坐标系中的表达式，注意各物理量的统一坐标.

二、典型例题

例 1 一质点做平面运动，已知 $x=3t(\mathrm{m})$，$y=1-t^2(\mathrm{m})$，求：

(1) 质点运动的轨迹方程；

(2) $t=3\ \mathrm{s}$ 时的位矢；

(3) 第 2 s 内的位移；

(4) $t=2\ \mathrm{s}$ 时的速度和加速度；

(5) t 时刻质点的切向加速度和法向加速度；

(5) $t=2\ \mathrm{s}$ 时质点所在处轨道的曲率半径.

解：这是一道属于第一类型的题目，用求导方法可以解决. 另外，作为曲线运动，质点的切向加速度和法向加速度一般可以利用角量和线量的关系得到，但由于曲率半径未知，所以应该根据矢量分解的任意性的思想，由在 xOy 坐标系中的加速度分量再求得在自然坐标系中的加速度分量——切向加速度和法向加速度.

(1) 由运动方程消去 t，得到轨迹方程为

$$y=1-\frac{x^2}{9}$$

(2) 因为 $x=3t$，$y=1-t^2$，所以 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=3t\boldsymbol{i}+(1-t^2)\boldsymbol{j}$.

$t=3\ \mathrm{s}$，$\boldsymbol{r}_3=9\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}$，$r=\sqrt{9^2+(-8)^2}\ \mathrm{m}\approx 12\ \mathrm{m}$，其与 x 轴的夹角为 $\alpha=\arctan\dfrac{y}{x}=\arctan\left(-\dfrac{8}{9}\right)=-41°38'$.

(3) 第 2 s 内的位移：

$\Delta\boldsymbol{r}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}=3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$，$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{9+9}\ \mathrm{m}=3\sqrt{2}\ \mathrm{m}$

其方向与 x 轴的夹角为 $\alpha=\arctan\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-45°$.

(4) 因为 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=3\boldsymbol{i}-2t\boldsymbol{j}$，所以 $t=2\ \mathrm{s}$ 时，$\boldsymbol{v}_2=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$，

$$v_2=\sqrt{9+16}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

其方向与 x 轴的夹角为 $\alpha=\arctan\dfrac{v_y}{v_x}=\arctan\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-53°8'$.

又因为 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=-2\boldsymbol{j}$，所以 $t=2\ \mathrm{s}$ 时，$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{j}$.

这是一个恒矢量，其大小为 $a=a_y=-2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，方向沿 y 轴的负向.

(5) 因为 $v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}=\sqrt{9+4t^2}$，故 $a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{4t}{\sqrt{9+4t^2}}$；

又因为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n$，故

$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\sqrt{4-\frac{(4t)^2}{9+4t^2}}=\frac{6}{\sqrt{9+4t^2}}$$

(6) 因为 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$，所以 $t=2\ \mathrm{s}$ 时，$\rho=\dfrac{{v_2}^2}{a_{n_2}}\approx 20.8\ \mathrm{m}$.

例 2 一质点从静止开始做直线运动，开始时初速度为 0，初始加速度为 a_0，此后加速度随时间均匀增加，经过时间 τ 后，加速度为 $2a_0$，经过时间 2τ 后，加速度为 $3a_0$……求经过时间 $n\tau$ 后，该质点的速度和走过的距离.

解： 这是属于第二类型的题目，与一般题目不同的是，必须先得到质点的加速度的表达式，才可以进一步用积分方法求得速度和距离.

由题意可以设质点的加速度为 $a=a_0+\alpha t$，因为 $t=0$ 时，$a=a_0$；$t=\tau$ 时，$a=a_0+\alpha\tau=2a_0$，所以 $\alpha=\dfrac{a_0}{\tau}$，即

$$a=a_0+\frac{a_0}{\tau}t$$

由 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，得 $\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$，则

$$\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t\left(a_0+a_0\ \frac{t}{\tau}\right)\mathrm{d}t$$

$$v=a_0t+\frac{a_0}{2\tau}t^2$$

又由 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，得 $\mathrm{d}s=v\mathrm{d}t$，则

$$\int_0^s \mathrm{d}s=\int_0^t v\mathrm{d}t=\int_0^t\left(a_0t+\frac{a_0}{2\tau}t^2\right)\mathrm{d}t$$

$$s=\frac{a_0}{2}t^2+\frac{a_0}{6\tau}t^3$$

当 $t=n\tau$ 时，质点的速度为 $v_{n\tau}=\dfrac{1}{2}n(n+2)a_0\tau$，质点走过的距离为 $s_{n\tau}=\dfrac{1}{6}n^2(n+3)a_0\tau^2$.

例 3 在离地面高度 $h=15.0\ \mathrm{m}$ 的地方，以初速率 $v_0=10.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 竖直上抛一小球.若不计空气阻力，求小球落到地面时的速度和所经历的时间.

解： 本题中既可以把小球的运动分成几段处理，又由于直线运动的运动方程表示运动的全过程，加之质点的位移、速度、加速度都可以用代数量来表示，因此，只要选定了坐标系，就可以方便而简洁地用坐标法来求解了.

(1) 以小球抛出点为坐标原点，竖直向上为 y 轴正方向，如图 1-7 所示，并以小球抛出时刻为计时起点. 于是，小球的加速度 $a=-g$，初速度 $v_0>0$.

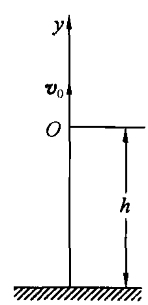


图 1-7

小球的运动方程和速度分别为

$$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$v=v_0-gt$$

小球到达地面时，$y=-h$，于是有

$$-h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$t=\frac{v_0\pm\sqrt{v_0{}^2+2gh}}{g}$$

代入数据并取正值，便得到小球从抛出到落地所经历的时间为

$$t=3.05\ \mathrm{s}$$

小球落到地面时的速度为

$$v=v_0-gt=-19.9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(2) 以地面为坐标原点，仍以竖直向上为 y 轴正方向，如图 1-8 所示，并以小球抛出时刻为计时起点. 这时，小球的初始位置不在坐标原点，于是，运动方程和速度分别为

$$y=h+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$v=v_0-gt$$

小球到达地面时，$y=0$，于是有

$$0=h+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

代入数据得到 $t=3.05$ s 以及 $v=-19.9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

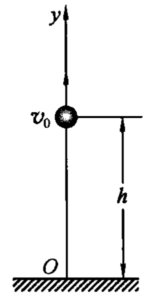


图 1-8

1.5 大作业

一、选择题

1. 质点在 xOy 平面内运动，其速率的正确表达式为 ( )

(A) $v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ (B) $v=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

(C) $v=\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$ (D) $v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$

2. 质点做曲线运动的线元位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$、元路程 $\mathrm{d}s$，位移 $\Delta\boldsymbol{r}$、路程 Δs，它们之间量值相等的是 ( )

(A) $|\Delta\boldsymbol{r}|=\Delta s$ (B) $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\Delta s$

(C) $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$ (D) $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=|\Delta\boldsymbol{r}|$

3. 质点在平面上做一般曲线运动，其瞬时速度为$\boldsymbol{v}$，瞬时速率为 v，某一段时间内的平均速度为$\bar{\boldsymbol{v}}$，平均速率为 $\bar{v}$，它们之间的关系必定有 ( )

(A) $|\boldsymbol{v}|=v, |\bar{\boldsymbol{v}}|=\bar{v}$ (B) $|\boldsymbol{v}|\neq v, |\bar{\boldsymbol{v}}|=\bar{v}$

(C) $|\boldsymbol{v}|\neq v, |\bar{\boldsymbol{v}}|\neq\bar{v}$ (D) $|\boldsymbol{v}|=v, |\bar{\boldsymbol{v}}|\neq\bar{v}$

4. 质点的运动方程为 $x=12t-10-2t^2$(SI)，则在前 5 s 内 ( )

(A) 质点做减速运动，路程为 36 m

(B) 质点做加速运动，位移为 10 m

(C) 质点在前 3 s 内做减速运动，后 2 s 内做加速运动

(D) 质点做变速运动，位移的大小和路程均为 10 m

5. 下列叙述中正确的是 ( )

(A) 质点沿 x 轴运动，如果加速度 $a<0$，则质点必定做减速运动

(B) 在曲线运动中，质点的加速度必定不为零