信息与计算科学专业系列教材

控制论基础

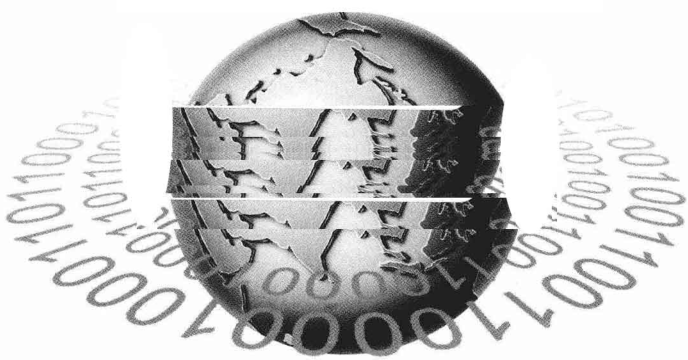
董旺远　何红英　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

信息与计算科学专业系列教材

控制论基础

董旺远 何红英 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

控制论基础/董旺远,何红英编著. —武汉：武汉大学出版社,2011.2
信息与计算科学专业系列教材
ISBN 978-7-307-08508-4

Ⅰ.控…　Ⅱ.①董…　②何…　Ⅲ.自动控制理论—高等学校—教材
Ⅳ.TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 011961 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:马　佳

出版发行：武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷：湖北金海印务有限公司
开本：720×1000　1/16　印张:7　字数:113 千字　插页:1
版次：2011 年 2 月第 1 版　2011 年 2 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-08508-4/TP·390　定价:16.00 元

出版说明

1998年，教育部颁布了经调整后的高等学校新的专业目录，从1999年秋季开始，各院校开始按新的专业设置进行招生。信息与计算科学专业是在这次调整中设置的，是以信息处理和科学与工程计算为背景的，由信息科学、计算科学、运筹与控制科学等交叉渗透而形成的一个新的理科专业。目前，社会对这方面的人才需求越来越多，开办这个专业的院校也越来越多。因此，系统地出版一套高质量的相关教材是一项当务之急。

由于信息与计算科学专业是一个新设的专业，有关该专业的人才培养模式、培养目标、教学计划、课程体系、教材建设等一系列专业建设问题，各院校目前正在积极地研究和探索之中。为了配合全国各类高校信息与计算科学专业的教学改革和课程建设，推进高校信息与计算科学专业教材的出版工作，在有关专家的倡议和有关部门的大力支持下，我们于2002年组织成立了信息与计算科学专业系列教材编委会，并制定了教材出版规划。

编委会一致认为，规划教材应该能够反映当前教学改革的需要，要有特色和一定的前瞻性。规划的教材由个人申报或有关专家推荐，经编委会认真评审，最后由出版社审定出版。教材的编写力求体现创新精神和教学改革，并且具有深入浅出、可读性强等特点。这一套系列教材不仅适用于信息与计算科学专业的教学，也可以作为其他有关专业的教材和教学参考书，还可供工程技术人员学习参考。

限于我们的水平和经验，这批教材在编审、出版工作中还可能存在不少的缺点和不足，希望使用本系列教材的教师、同学和其他广大读者提出批评和建议。

信息与计算科学专业系列教材编委会

前　言

控制论是由数学家 Wiener（维纳）于 20 世纪 40 年代创立的一门学科。在过去的几十年里，由于思想的独特和应用的广泛，控制论已得到了快速的发展。现在，控制理论已是当代应用数学的一个重要研究领域。

在教育部 2009 年颁布的本科专业教学规范中，控制论基础是信息与计算科学专业的规定课程之一，编写一本合适的教材自然是专业发展的需要。

本书的目的是提供一本简明的、易于接受的介绍控制问题的数学理论教材。在题材上，参阅了国内外同类教材，在此基础上结合编写者本人的理解和教学科研经验写成了此书。本书主要介绍状态空间法，从数学的角度考虑控制问题，以数学的视角来理解控制理论。全书分为 4 章，第一章介绍状态空间法的概念，并简要介绍经典控制论的传递函数表示法及其与状态空间法的关系。第二章主要是 Kalman（卡尔曼）线性系统理论，能控性、能观性是这一章的重点。第三章是系统的稳定性问题。第四章介绍了最优控制理论的初步概念和基本方法。

具有微积分、矩阵论和常微分方程基本知识的读者都可以比较容易地学习本书。

本书是为信息与计算科学专业高年级本科生提供的教材，对相关专业的研究生也可作为教材或教学参考书。

编　者

2010 年 9 月

目　　录

第一章　引言

控制论，又称控制理论，是关于动物和机器中控制和通信的科学．它研究系统各构成部分之间的信息传递规律和控制规律．美国数学家 Wiener（维纳）等人在分析通信系统和自动控制系统共同特点的基础上，把这些系统的控制机制与生物机体中的某些控制机制加以类比，于 20 世纪 40 年代创立了这门学科．当时，主要是用调和分析方法（频率法）研究单变量线性定常系统反馈控制的设计原理，Wiener 把它建立在统计理论的基础上．

20 世纪 50 年代，由于军事和航天技术的推动，形成了以工程控制为主要对象的工程控制论．同时也提出了处理多变量控制系统、非线性控制系统和最优调节器设计原理等问题．现代控制理论逐步地发展起来了．

自动调节原理是用传递函数或脉冲响应函数来描述控制系统的输入－输出关系的，因此，传递函数或脉冲响应函数描述了控制系统的运动规律．现代控制理论则是在引入状态空间与状态变量概念的基础上，直接用微分方程来描述控制系统的运动规律．因此，当人们从现代控制理论的观点来研究、设计一个控制系统时，首先必须建立它的数学模型，用严格的数学方法来描述其运动规律．其次要确定对系统控制的目的和周围环境对系统的影响，同样要用数学的方法来描述控制的准则和对系统的外部干扰．现代控制理论总是用数学的形式来表述控制原则，这个控制原则又有可能应用到任何一个具体的控制系统中去．

1.1　控制理论的发展

控制理论自形成学科以来，经过了近一个世纪的发展，无论是学科内容、学科特色、适用对象，还是研究成果等方面都达到了前所未有的水平．理论研究成果和应用研究成果层出不穷，研究成果的应用已扩展到了人类

社会活动的各个方面.

控制理论的研究从时间上和内容上可划分为两个阶段：经典控制理论阶段和现代控制理论阶段.

1. 经典控制理论

经典控制理论的研究主要集中在20世纪20年代至60年代，当时由于大工业生产发展的需要与军事技术发展的需要，促进了研究成果快速地应用到社会的发展中.

经典控制理论的研究对象主要是单输入单输出系统(SISO)，使用的数学工具主要是传递函数与频率特性. 根据受控对象的数学模型来设计控制器，使受控系统实现相应的性能指标. 到20世纪中期，经典控制理论的研究已基本成熟，进而在各个领域获得了广泛的应用，如工业、农业、军事、航空、航海、交通、核能利用、导弹制导等领域.

但经典控制理论有许多不足之处，还不能完全解决自动化工程和控制工程中的许多实际问题，这是由于经典控制理论自身的局限性所致.

就数学工具而言，传递函数是线性系统的定常参数模型，不能表现非线性关系，也不能表现时变参数特性，更难以表现对象模型的不确定性. 因此，经典控制理论难以应用于许多复杂系统的控制. 另外，传递函数主要反映的是受控对象的端口关系，难以展现系统内部的结构关系，因此导致控制器的设计仅是基于端口等价之上的，并不是基于系统实际结构的.

2. 现代控制理论

现代控制理论的研究始于20世纪50年代末期. 现代控制理论的研究对象一般考虑多输入多输出系统(MIMO). 由于现代控制理论研究对象的类型涉及面很宽，有线性系统和非线性系统，定常参数系统和时变参数系统，随机控制系统与不确定性系统，等等. 所以，大部分类型的控制都可以纳入现代控制理论研究的范畴.

自20世纪50年代起，现代控制理论的研究成果层出不穷. 在现代控制理论的发展中，Kalman(卡尔曼)提出了基于状态空间法的系统描述方法，使用状态空间法的系统结构分析方法，如能控性和能观性等，以及应用于随机系统的卡尔曼滤波器. Pontryagin(庞特里亚金)提出的极大值原理将基于泛函极值的最优问题提高到了一个新的理论高度，有效解决了约束优化控制问题. Bellman(贝尔曼)提出了动态规划方法，全面、深入地解

释了最优化控制问题. 其他成果还有：最佳滤波理论，自适应控制器，预测控制理论，大系统理论，鲁棒控制理论，H_∞ 控制理论等.

现代控制理论研究使用的数学方法主要是基于时域的状态空间法. 由于独立状态对于系统的描述是完全描述，因此不同于传递函数模型，从对象的数学模型描述上确定了系统内部的结构关系，为控制器的设计提供了有效的保证.

本教材基于 20 世纪后半叶现代控制理论研究来描述，主要介绍一些现代控制理论的基础知识.

例 1.1 假设汽车在平直的道路上行驶，位移函数为 $s=s(t)$. 为简单起见，假设汽车只受到加大油门以加速和踩刹车以减速两种因素的控制，空气阻力、路面摩擦力等都忽略不计. 每单位质量受到来自油门和刹车的加速力和减速力分别为 u_1 和 u_2. 记 $x_1=s(t)$，$x_2=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=u_1-u_2,\end{cases} \tag{1.1}$$

或写成矩阵的形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u},$$

这里

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}.$$

在现代控制理论中，(1.1) 叫做一个**控制系统**，简称**系统**. $\boldsymbol{x}$ 叫做**状态向量**，$\boldsymbol{x}$ 的分量 x_1 和 x_2 叫做**状态变量**，$\boldsymbol{u}$ 叫做**控制向量**或**输入**，$\boldsymbol{u}$ 的分量 u_1 和 u_2 叫做**控制变量**.

在实际问题中，u_1 和 u_2 的值是受到限制的，为了确保乘客的舒适安全，汽车的最大行驶速度也要受到限制.

对于系统(1.1)，首先考虑的问题是如何操控才能使汽车从出发点 x_0 到达指定位置 x_1 的问题. 此外，还可以要求汽车从 $t=0$ 时从停止状态在尽可能短的时间内到达某指定的位置，或要求消耗的燃料最少而到达某指定的位置.

数学上首先考虑的是对于选定的目标能否实现的问题，如果能够实现，则希望找到 u_1 和 u_2 的适当表达式.

当然，模型的复杂性将随考虑因素的增加而增加.

1.2 基本概念

控制系统的状态空间表示的一般形式是

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t), & (1.2)\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t), & (1.3)\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维向量，叫做**状态向量**；$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_m)^{\mathrm{T}}$ 是 m 维向量，叫做**控制向量**，也称**输入向量**；$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_r)^{\mathrm{T}}$ 是 r 维向量，叫做**输出向量**. (1.2) 叫做**状态方程**，(1.3) 叫做**输出方程**，或**观测方程**. $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维向量函数，$\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_r)^{\mathrm{T}}$ 是 r 维向量函数. 这种以一阶微分方程组的方式表示的控制系统叫做**控制系统的状态空间形式**.

当 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 都是 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的线性函数时，称(1.2),(1.3) 是**线性控制系统**，简称**线性系统**，否则称为**非线性系统**. 线性系统的一般形式是

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}, & (1.4)\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}, & (1.5)\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 $n\times n$ 矩阵，叫做**系统矩阵**；$\boldsymbol{B}(t)$ 是 $n\times m$ 矩阵，叫做**控制分布矩阵或输入矩阵**；$\boldsymbol{C}(t)$ 是 $r\times n$ 矩阵，叫做**量测矩阵或输出矩阵**；$\boldsymbol{D}(t)$ 是 $r\times m$ 矩阵，叫做**前馈矩阵**. 这些矩阵统称为**系统的系数矩阵**，在实际应用中，它们的每个元都是 t 的分段连续函数.

线性控制系统有许多优点，比较容易处理，因此，在工程技术问题中，可以在一定精度范围内用线性模型近似时，往往是尽可能地采用线性模型.

若 $\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t),\boldsymbol{C}(t),\boldsymbol{D}(t)$ 都是常数矩阵，则(1.4),(1.5) 叫做**定常系统或时不变系统**，否则叫做**时变系统**.

在控制系统的状态空间表达式(1.4),(1.5) 中，当 $m=r=1$ 时，系统叫做**单输入单输出系统**(SISO)；当 $m>1$，或(且)$r>1$ 时，系统称为**多输入多输出系统**(MIMO).

1.3 线性控制系统的解

1. 自由系统的解

考虑定常线性系统的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),\\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\end{cases}\tag{1.6}$$

这里 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 常数矩阵. 如果 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，与它们相应的特征向量是 $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_n$，则 $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_n$ 必线性无关. 于是，可设(1.6) 的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\boldsymbol{w}_i,\tag{1.7}$$

这里 $c_i(t)$ 是 t 的函数. 将上式代入(1.6)，得

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'\boldsymbol{w}_i=\boldsymbol{A}\sum_{i=1}^{n}c_i\boldsymbol{w}_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ic_i\boldsymbol{w}_i.$$

由于 $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_n$ 线性无关，所以

$$c_i'=\lambda_ic_i,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

这样我们得到

$$c_i(t)=\exp(\lambda_it)c_i(0),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i(0)\exp(\lambda_it)\boldsymbol{w}_i.\tag{1.8}$$

注意到如果以 $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_n$ 为列向量构成的$n\times n$矩阵记为$\boldsymbol{W}$，则其逆矩阵 $\boldsymbol{W}^{-1}$ 的行向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 满足

$$\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{A}=\lambda_i\boldsymbol{v}_i,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

称 $\boldsymbol{v}_i$ 为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值λ_i 的**左特征向量**，而 $\boldsymbol{w}_i$ 叫做**右特征向量**. 易见

$$\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{w}_i=1,$$

$$\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{w}_j=0,\ i\neq j.$$

以 $\boldsymbol{v}_i$ 左乘(1.8) 并令 $t=0$，得 $\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{x}(0)=c_i(0)$. 因此

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i x(0) \exp(\lambda_i t) w_i.$$

由于上式仅依赖于初值和矩阵 A 的特征值及特征向量，所以叫做**初值问题解的谱形式**(集合 $\{\lambda_i\}$ 叫做**矩阵 A 的谱**).

需要说明的是，尽管上式给出的是 A 具有 n 个不相同的特征值时初值问题(1.6)的解，但仍有重要的应用价值. 因为实际问题建立如(1.6)所示的模型时，即使 A 有重特征值，由于测量的误差也往往导致得到的实际模型没有重特征值.

在一般情况下，线性时变系统初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

的解为

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{1.10}$$

其中 $\Phi(t,t_0)$ 是(1.9)的状态转移矩阵. **状态转移矩阵** $\Phi(t,t_0)$ 是下列矩阵微分方程的初值问题的解：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Phi(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0), \\ \Phi(t_0,t_0) = I. \end{cases} \tag{1.11}$$

状态转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 具有下列性质：

(1) **可分离性** 设 $\Phi(t)$ 是与(1.9)对应的齐次方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{1.12}$$

的一个基本解，即 $\Phi(t)$ 是由(1.12)的 n 个线性无关解向量构成的矩阵，则

$$\Phi(t,t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0). \tag{1.13}$$

(2) **唯一性** 初值问题(1.9)的状态转移矩阵是唯一的.

(3) **传递性** 对任意的 t_1,t_2,t_3，成立

$$\Phi(t_1,t_2)\Phi(t_2,t_3) = \Phi(t_1,t_3). \tag{1.14}$$

(4) **可逆性** $\Phi(t,t_0)$ 可逆，且有

$$\Phi^{-1}(t,t_0) = \Phi(t_0,t). \tag{1.15}$$

特别地，若(1.9)是定常系统，则 $A(t)$ 元素都是常数，将 $A(t)$ 记为 A，

这时 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\mathrm{e}^{At}$，于是(1.10)变为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{A(t-\tau)}\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{1.16}$$

2. 控制系统的解

由(1.4),(1.5)描述的线性控制系统，如果初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 已给定，则对应于输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 的输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 可通过把(1.4)的解代入输出方程(1.5)计算出来.

由常微分方程理论知，初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases} \tag{1.17}$$

的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1.18}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 是(1.17)的状态转移矩阵. 由解的表达式(1.18)，得到线性控制系统(1.4),(1.5)的输出响应为

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t). \tag{1.19}$$

在线性控制系统(1.4),(1.5)中，当输入 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{O}$ 时，解的表达式(1.18)化为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0, \tag{1.20}$$

于是

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0, \tag{1.21}$$

称之为系统的初值响应或零输入响应.

若(1.17)是定常系统，则有

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1.22}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t), \tag{1.23}$$

其中 e^{At} 是矩阵指数.

1.4 定常线性系统的传递函数矩阵

1. 单输入单输出系统

在经典控制理论中研究的是单输入单输出系统，单输入单输出系统通常由下列 n 阶常系数微分方程描述：

$$
\begin{aligned}
& y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y^{(1)}+a_0y \\
&\quad = b_mu^{(m)}+b_{m-1}u^{(m-1)}+\cdots+b_1u^{(1)}+b_0u,
\end{aligned} \tag{1.24}
$$

其中函数 $y(t)$ 叫做系统的输出，函数 $u(t)$ 叫做系统的输入，t 为时间，$y^{(i)}=\dfrac{\mathrm{d}^iy}{\mathrm{d}t^i}$，$u^{(j)}=\dfrac{\mathrm{d}^ju}{\mathrm{d}t^j}$，$a_i$，$b_j$ 均为常数，$i=0,1,\cdots,n$，$j=0,1,\cdots,m$，$m\leqslant n$.

若假定

$$
\left.\begin{aligned}
y(0)=y^{(1)}(0)=\cdots=y^{(n-1)}(0)=0,\\
u(0)=u^{(1)}(0)=\cdots=u^{(m-1)}(0)=0,
\end{aligned}\right\} \tag{1.25}
$$

对(1.24) 两边取拉普拉斯变换，得

$$
\begin{aligned}
& (s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0)Y(s) \\
&\quad = (b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0)U(s),
\end{aligned}
$$

其中 $Y(s)$,$U(s)$ 为 $y(t)$,$u(t)$ 的拉普拉斯变换，则

$$
G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}, \tag{1.26}
$$

称为系统(1.24) 的**传递函数**. 若传递函数为 s 的有理真分式，则称系统(1.24) 为**物理能实现的**. 单输入 - 单输出系统的传递函数必为有理真分式.

多项式

$$
s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0 \tag{1.27}
$$

为系统(1.24) 的特征多项式，代数方程

$$
s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0 \tag{1.28}
$$

叫做系统(1.24) 的**特征方程**，特征方程的根(即特征多项式的零点) 叫做系统(1.24) 的**极点**.

多项式

$$b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \tag{1.29}$$

的零点叫做系统(1.24)的**零点**. 若系统(1.24)有相同的零点和极点，则称系统有**零极点相消**，零极点相消后剩下的系统的零点和极点分别称为**传递函数的零点和极点**.

用传递函数描述控制系统(1.24)时，有

$$Y(s) = G(s)U(s), \tag{1.30}$$

因此，给出传递函数，也就能由系统的输入得到系统的输出.

2. 多输入多输出系统

在经典控制理论中，研究单输入单输出线性定常系统时，传递函数起着重要作用，现在导出多输入多输出系统的传递函数矩阵. 为简单起见，假定 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{O}$, 考虑定常线性系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}, \end{cases} \tag{1.31}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态变量，$\boldsymbol{y}$ 为 r 维观测向量，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 $n\times n, n\times m, r\times n$ 常数矩阵. 由于系统(1.31)一旦给定，矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 就确定了，反之亦然，所以系统(1.31)常简记为 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]$.

假定 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$，对(1.31)各式两端进行拉普拉斯变换，得

$$s\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s),$$
$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s),$$

其中 $\boldsymbol{X}(s),\boldsymbol{U}(s),\boldsymbol{Y}(s)$ 分别是 $\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{y}(t)$ 的拉普拉斯变换，于是得

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s),$$
$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{U}(s),$$

其中

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \tag{1.32}$$

称为系统 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]$ 的**传递函数矩阵**. 当 $r = m = 1$ 时，传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 就是单输入单输出系统的传递函数 $g(s)$.

传递函数矩阵的主要计算量是计算特征矩阵 $s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 的逆矩阵. 一个用于计算 $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ 的叫做 **Leverrier 算法**的公式是

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{k(s)}(s^{n-1}\boldsymbol{I} + s^{n-2}\boldsymbol{B}_1 + s^{n-3}\boldsymbol{B}_2 + \cdots + \boldsymbol{B}_{n-1}), \tag{1.33}$$

这里特征多项式 $k(s)$ 的系数 k_i 以及矩阵 $\boldsymbol{B}_i$ 由下面各式确定:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}+k_1\boldsymbol{I},\\&\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_{i-1}+k_i\boldsymbol{I},\quad i=2,3,\cdots,n-1,\\&k_1=-\operatorname{tr}\boldsymbol{A},\\&k_i=-\frac{1}{i}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_{i-1}),\quad i=2,3,\cdots,n.\end{aligned}\right\}\tag{1.34}$$

利用(1.33),传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 的表示式(1.32) 变为

$$\boldsymbol{G}(s)=\frac{1}{k(s)}(s^{n-1}\boldsymbol{G}_0+s^{n-2}\boldsymbol{G}_1+\cdots+\boldsymbol{G}_{n-1})=\frac{\boldsymbol{H}(s)}{k(s)},\tag{1.35}$$

这里 $k(s)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式,$\boldsymbol{G}_k=(g_{ij}^{(k)})$ 是 $r\times m$ 矩阵. $r\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{H}(s)$ 是一个多项式矩阵,因为它的每个元素本身就是一个多项式,即

$$h_{ij}=s^{n-1}g_{ij}^{(0)}+s^{n-2}g_{ij}^{(1)}+\cdots+g_{ij}^{(n-1)}.$$

可见,传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 的元素都是有理函数.

1.5 经典控制和状态空间表示的关系

在现代控制论中,线性控制系统都是用矩阵的形式表示的. 但在经典控制论中,所处理的线性系统都是形如(1.24) 的纯量形式的微分方程. 这两者之间有什么联系呢? 这是本节要讨论的问题. 为方便起见,考虑(1.24) 的简洁形式

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y^{(1)}+a_0y=u(t),\tag{1.36}$$

这里 $u(t)$ 是单控制变量. 作变量代换

$$w_1=y,\quad w_2=y^{(1)},\quad \cdots,\quad w_n=y^{(n-1)},\tag{1.37}$$

这里 w_i 都叫做状态变量. 由于

$$\dot{w}_i=w_{i+1},\quad i=1,2,\cdots,n-1,$$

所以(1.36) 就变成了状态空间形式

$$\dot{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{d}u,\tag{1.38}$$

其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&1&&\\\vdots&&\ddots&\\0&&&1\\-a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-1}\end{pmatrix},\tag{1.39}$$