

概 率 与 数 理 统 计

(修订版)

主审 汪振鹏 主编 缪铨生

Xinshiji Gaodeng Shifan Yuanxiao Jiaocai

Xin 新

Shi 世

Ji 纪

Gao 高

Deng 等

Shi 师

Fan 范

Yuan 院

Xiao 校

教

材

Jiaocai





新世纪高等师范院校教材

概 率 与 数 理 统 计

(修订版)

主 审:汪振鹏

主 编:缪铨生

编写人员(按姓氏笔划):

陈卓人 邹学潮 赵跃生 缪铨生

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率与数理统计/缪铨生主编. —2版(修订版)

上海:华东师范大学出版社. 2000.5

ISBN 7-5617-0450-X

I. 概... II. 缪... III. ①概率论-高等学校:师范
学校-教材②数理统计-高等学校:师范学校-教材 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 09254 号

封面设计 高山

新世纪高等师范院校教材

概率与数理统计

(修订版)

缪铨生 主编

华东师范大学出版社出版

(上海中山北路 3663 号 邮政编码 200062)

新华书店上海发行所发行

南京理工大学激光照排公司照排

华东师范大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 14.75 字数 395 千字

1997 年 6 月第 2 版 2003 年 3 月第 8 次印刷

印数:55 101-63 100 本

ISBN 7-5617-0450-X/N·019

定价:19.00 元

出版说明

1986年,我社受国家教委有关部门的委托,根据国家教委师范司制订的《二年制师范专科学校八个专业教学计划》的要求,与全国各省、市、自治区教委合作,共同组织编写了全国高等师范专科学校教材20余种;同时与华东六省教委密切协作,编写了能反映华东地区师专教学和科研水平的、适应经济建设较为发达地区的师专教学需要的教材40余种。从此,师专拥有了比较符合自己培养规格、规律和教学要求而自成系统的教材。实践证明,师专教材建设对于提高师专教学水平,保证师专教学质量起到了重要作用。

近几年来,在邓小平理论的指引下,我国的教育事业取得了很大发展。国家教委根据《中国教育改革发展纲要》的要求,针对高等师范专科学校的教育特点,颁发了《高等师范专科教育二、三年制教学方案》,进一步明确了高等师范教育面向21世纪的发展目标和战略任务,以及教学内容和教学结构的改革要求。

自出版第一本师专教材以来,我社多年来分阶段地对师专教材的使用情况进行了跟踪分析,又于1995年开展了较为系统的全面调查。调查中,教师普遍反映,现有师专教材尚不同程度存在着与当前师专教学实际相脱节的现象:对各学科中的新发现、新理论、新成果,未能加以必要的反映,已跟不上当前社会、经济、科技等发展的新形势。考虑到师专从二年制向三年制发展的现状和趋势,我社于1996年初与华东六省教委有关部门一起,邀集全国48所师专代表专门研讨了师专教材建设问题,随即开展了部分教材的修订和新编工作。

1999年,我社又进行了更大范围的实地调查,发现不少地区已将对中学教师的培养提高到了本科水平,在专业设置、课程计

划、教学要求等方面都有变化。为此,我们对部分教材作了进一步的修订,使其能够适应新世纪的高等师范教学需要,同时也可用于中学教师的职后培训。

师范院校教材建设并不是一个孤立的系统,它必须服务于师范教育的总体规划。它已经历了从“无”到“有”的过程,并将逐步实现从“有”到“优”的目标。我们相信,通过各方面的努力,修订和新编的师范院校教材将充分体现基础与能力相结合,理论与实践相结合,当前与未来相结合的特色,日臻完善和成熟。

这次编写和修订工作得到了有关省市教委的大力支持,我们谨在此深表谢忱,并向为师范院校教材建设付出辛勤劳动的各地师范院校领导和所有参加编写、修订和审稿的专家、学者等致以衷心的感谢。

华东师范大学出版社

2000年1月

序 言

随着我国四化宏图的逐步实现,概率论与数理统计日益受到人们的重视.高等院校的许多专业先后把概率论与数理统计这门课程作为必修课或选修课而列入教学计划,高师的数学专业也不例外.我作为一个概率论与数理统计工作者,对此感到莫大的欣慰.然而美中不足的是常听到高师同行们的抱怨,说是这几年各出版社虽然推出了多种版本的概率论与数理统计教材,却没有一种是为高师数学专业的学生编写的,这给他们的教学工作带来了一定的困难,似有燃眉之急.在这种情况下,华东师范大学出版社送来了由缪铨生教授主编的高师数学专业用的《概率论与数理统计》教材的书稿.通读之下,觉得全书语言流畅,在高师数学专业二年级学生已有的数学基础上,把问题讲得较深、较透;各章节例题较为丰富,特别是含有较多的教育统计方面的例题,既结合高师特点,又使学生在今后的工作岗位上有用武之地.同时,编者对思考题、不同难度的习题均有细微的安排,使教材在各个教学环节中均能发挥其相应的作用,并有利于因材施教.

纵观全书,不失为一本有特色的好教材.在这里,我代编者恳切地盼望读者能惠于批评指正,今后把教材进一步修订得更为理想.

拜读之后,写了以上感想,权为序.

汪振鹏

1996年10月

再版的话

本教材自1989年6月出版以来,已连续印刷八次,深受高师、教育学院等同类层次学校的欢迎。

许多读者来信认为这是一本深入浅出、联系实际、内容恰当、特色明显、适合高师教学的好教材。指出该教材有两个区别于其它同类教材的特点:一是各章节都有层次地安排了例题、思考题和习题(A)组、(B)组,便于学生学习和复习;二是在数理统计部分渗透了教育统计和教育测量的内容,利于学生今后的工作,体现了学用一致的精神。读者来信也提出了不少宝贵的意见,归纳起来主要有:印刷错误较多,这同一本受欢迎的教材是很不相称的;教材内容对72学时是适宜的,但对60学时而言显得偏多,很难在规定学时授完;缺少(A)组题的答案,学生完成练习后无法检查自己的结果。

基于上述情况,根据1995年1月华东地区师范院校教材建设研讨会的精神,我们利用教材再版之际,在保持原教材已有内容、风格的基础上,对原教材作了如下的修订:(1)纠正原教材的印刷错误;(2)个别地方的内容稍有增减,如第一章增加反映“盒壁原理”这一重要组合思想的“占位问题”,第二章删去了不常用的 Γ 分布,第九章删去多元部分的内容,并把第八、第九两章合并为一章;(3)少数定理的叙述和证明略有变动,使这部分内容在数学分析范围内更为严谨;(4)扩大了打“*”号的范围,这些并不影响阐明基本概念和基础理论;(5)补充了习题(A)组的答案与提示。我们希望本教材经此修订后会有所增色,同时对教学时数为60学时而言,略去打“*”号内容,相信会顺利地完成任务。

本教材的修订是在缪铨生教授(镇江师专)主持下进行的. 参与这项工作的有缪铨生、陈卓人和赵跃生, 并由缪铨生负责概率论部分的修订, 赵跃生负责数理统计部分的修订和习题(A)组的答案与提示.

限于编者水平, 经修订后的教材难免还会存在缺点、错误, 敬希读者批评指正.

借此机会, 请允许我们向始终关心、支持本教材的所有同志表示衷心的感谢.

编者

1996年10月

目 录

引言	1
第一章 事件与概率	5
§ 1.1 随机事件及其概率	5
思考题(19), 习题 1.1(A)(19)、(B)(21)	
§ 1.2 有限等可能概型——古典概型	21
思考题(32), 习题 1.2(A)(33)、(B)(35)	
§ 1.3 一类无限等可能概型——几何概型	35
思考题(40), 习题 1.3(A)(40)、(B)(40)	
§ 1.4 概率的公理化	41
思考题(49), 习题 1.4(A)(49)、(B)(51)	
§ 1.5 条件概率	52
思考题(64), 习题 1.5(A)(64)、(B)(66)	
§ 1.6 事件的独立性及伯努利概型	67
思考题(79), 习题 1.6(A)(79)、(B)(82)	
第二章 随机变量及其分布	84
§ 2.1 随机变量与分布函数	84
思考题(90), 习题 2.1(A)(90)、(B)(91)	
§ 2.2 离散型随机变量	92
思考题(103), 习题 2.2(A)(103)、(B)(105)	
§ 2.3 连续型随机变量	105
思考题(118), 习题 2.3(A)(118)、(B)(120)	
§ 2.4 随机变量函数的分布	120
习题 2.4(A)(127)、(B)(128)	
第三章 多维随机变量及其分布	129
§ 3.1 二维随机变量	129

思考题(139), 习题 3.1(A)(139)、(B)(141)	
§ 3.2 边际分布	141
思考题(147), 习题 3.2(A)(147)	
§ 3.3 随机变量的独立性	148
思考题(155), 习题 3.3(A)(156)、(B)(157)	
§ 3.4 两个随机变量函数的分布	157
习题 3.4(A)(165)、(B)(166)	
§ 3.5 χ^2 分布、t 分布和 F 分布	167
思考题(174)	
第四章 随机变量的数字特征	175
§ 4.1 数学期望	175
思考题(195), 习题 4.1(A)(196)、(B)(198)	
§ 4.2 方差	198
思考题(210), 习题 4.2(A)(210)、(B)(211)	
§ 4.3 协方差和相关系数	212
思考题(221), 习题 4.3(A)(221)、(B)(222)	
§ 4.4 矩	223
§ 4.5 常见随机变量的分布、期望与方差	226
第五章 极限定理	228
§ 5.1 大数定律	228
思考题(233), 习题 5.1(A)(234)、(B)(235)	
§ 5.2 中心极限定理	236
思考题(247), 习题 5.2(A)(248)、(B)(249)	
第六章 统计估计	250
§ 6.1 数理统计的基本概念	250
思考题(264), 习题 6.1(A)(264)、(B)(266)	
§ 6.2 未知分布的估计	267
习题 6.2(A)(274)	
§ 6.3 参数的点估计	275
思考题(293), 习题 6.3(A)(293)、(B)(297)	

§ 6.4	参数的区间估计	298
	思考题(304), 习题 6.4(B)(304)	
第七章	假设检验	305
§ 7.1	假设检验的基本思想	305
	思考题(311)	
§ 7.2	均值的假设检验和置信区间	311
	思考题(324), 习题 7.2(A)(324)	
§ 7.3	方差的假设检验和置信区间	328
	习题 7.3(A)(335)	
§ 7.4	总体分布的假设检验	338
	习题 7.4(A)(341)	
* § 7.5	独立性检验	343
	习题 7.5(A)(348)	
第八章	方差分析与回归分析	350
§ 8.1	单因素方差分析	350
	习题 8.1(A)(361)	
* § 8.2	双因素方差分析	363
	习题 8.2(A)(371)	
§ 8.3	一元线性回归分析	372
	思考题(394), 习题 8.3(A)(395)	
§ 8.4	相关性在教育测量中的应用	397
	习题 8.4(A)(404)	
参考书目		405
附表 1	泊松分布表	406
附表 2	正态分布表	408
附表 3	t 分布表	412
附表 4	χ^2 分布表	414
附表 5	F 分布表	416
附表 6	随机数表	426
附表 7	相关系数检验表	428

引 言

我们观察自然界发生的现象不外乎有两类，一类现象称为决定性现象，这类现象的特点是：在一组条件下，其结果完全被决定，或者完全肯定，或者完全否定，不存在其它的可能性。例如，使两个带同性电的小球相靠近，则两小球相互排斥。这里，“使两个带同性电的小球相靠近”是一组条件，一旦这组条件实现，那么“两小球相互排斥”这一结果就完全被肯定，所以“使两个带同性电的小球相靠近，则两小球互相排斥”这一现象是决定性现象。该决定性现象，在试验中必然发生，故这种决定性现象常称为必然现象。又如，使两个带同性电的小球相靠近（条件），则两小球互相吸引（结果）完全被否定，所以这一现象也是决定性现象。该决定性现象，在试验中必然不发生，故这种决定性现象常称为不可能现象。显然，必然现象和不可能现象互为相反面，必然现象的反面就是不可能现象，反之，不可能现象的反面就是必然现象。由上可见，决定性现象（必然现象或不可能现象）实际上就是事前可以预言结果的现象，通常我们对某个现象可以“未卜先知”，应当说指的是决定性现象。

还有一类现象称为非决定性现象，这类现象的特点是：条件不能完全决定结果，每次观察所发生的结果可能是不同的。例如：“向桌上任意抛掷一枚硬币，落下后某一面向上”这一现象是非决定性现象。因为条件“向桌上任意抛掷一枚硬币”不能完全决定结果“某一面向上”，落下后它可能“正面向上”，也可能“反面向上”。又如，“从一副扑克牌中任选二张，所得二张牌的花色”是非决定性现象，因为任选的二张扑克牌花色可能是“黑桃、黑桃”，“黑桃、方块”，……“梅花、梅花”等等。由上可知，非决定性现象实际上就是事前

不能预言结果的现象,这类现象只有事后才能确切知道它所发生的结果.在概率论中,我们把非决定性现象称为**随机现象**,这里,要提请大家注意的是,随机现象千万不能理解为杂乱无章的现象,我们说这种现象是随机的,有两方面的意思:第一,对这种现象进行观察,其结果不是唯一的,可能会发生这种结果,也可能会发生那种结果,究竟出现哪一种结果,事前是不能预言的,只有事后才能得知;第二,在一次观察中,这种现象发生哪一种结果常带有偶然性,但通过对这种现象的大量观察,我们会发现这种现象的各种可能结果在数量上呈现出一定的规律性.例如,考察“掷一枚硬币,落下后某一面向上”这个随机现象,我们将硬币向桌上抛掷一次观察它所发生的结果,可能是“正面向上”,也可能是“反面向上”,若试验结果是“正面向上”,这是偶然的,然而我们如果大量重复进行抛掷硬币的试验,可以发现,即使各次试验结果没有什么规律性,但“正面向上的次数”与“反面向上的次数”各接近于总试验次数的一半,这就是所述随机现象内部存在的统计规律性.又如,我们研究“存放在容器里的占有一定体积的气体的分子运动速度”这个随机现象,由于气体分子间的相互碰撞,气体分子运动的速度时刻都在发生变化,某时刻气体分子运动的速度取某值是带有偶然性的,然而通过大量重复观察,我们发现气体分子运动的速度在数量上遵从一定的规律,此即气体分子运动速度的绝对值服从麦克斯韦(Maxwell)分布,它就是“存放在容器里的占有一定体积的气体的分子运动速度”这个随机现象内部存在的统计规律性.

概率论与数理统计的任务就是要揭示随机现象内部存在的统计规律性.概率论的特点是根据问题提出相应的数学模型,然后去研究它们的性质、特征和规律性;数理统计则是以概率论的理论为基础,利用对随机现象的观察所获得的数据资料,来研究数学模型.

概率论与数理统计的发展历史悠久.十四世纪,随着商业贸易

日益发展,航海事业日新月异,出现了海上保险事业,到十六世纪时人寿保险事业及水灾、火灾等保险事业也相继出现,它们都向数学提出了新的要求,需要应用数学来分析和研究随机现象中蕴涵的规律,估计事故发生的可能性大小,这就促进了数学家们对概率与数理统计的研究.因此可以说,概率论与数理统计的兴起是由保险事业的发展而产生的.但最初刺激数学家们思考概率与数理统计问题的却来自掷骰子游戏.

17 世纪中叶,欧洲贵族们盛行掷骰子游戏,当时法国有一位热衷于掷骰子游戏的贵族德·梅耳(De Mere),他在掷骰子游戏中遇到了一些使他苦恼的问题.譬如,他发现掷一枚骰子 4 次至少出现一次六点是有利的,而掷一双骰子 24 次至少出现一次双六是不利的.他找不到解释的原因,于是他把遇到的问题向当时的法国数学家帕斯卡(Pascal)请教,帕斯卡接受了这些问题,并把它提交给另一位法国数学家费马(Fermat),他们频繁地通信,开始了概率论和组合论的研究.他们的通信被从荷兰来到巴黎的荷兰科学家惠更斯(Huygens)获悉,回荷兰后,他独立地研究了这些问题,结果写成了《论掷骰子游戏中的计算》,时间是 1657 年,这是迄今被认为概率论中最早的论著,因此可以说早期概率与数理统计的真正创立者是帕斯卡、费马和惠更斯,这一时期(17~18 世纪初)称为组合概率时期,计算各种古典概率.

18 世纪初,伯努利(Bernoulli)发现了大数定律,这是概率论中一个重要结果.从 18 世纪初到 19 世纪,母函数、特征函数引入概率论的研究中,成功地解决了许多问题,特别是对中心极限定理的研究,在这方面棣莫弗(De Moivre)、拉普拉斯(Laplace)、李雅普诺夫(Ляпунов)等都有出色的工作,这时期也称作分析概率时期.

1900 年皮尔逊(Pearson)发表了著名的 χ^2 统计量,用于检验经验分布与某个理论分布是否相符.从 1900 年到 20 世纪中叶

(1900~1940), 概率论研究的主要工作是: 一方面是极限理论的发展, 随机过程理论的建立; 另一方面是系统地研究概率的基本概念, 有许多人在这方面作过努力, 特别是柯尔莫哥洛夫 (Колмогоров) 于 1933 年在苏联科学院院报上发表了“概率的公理化结构”的论文, 为理论概率奠定了严格的逻辑基础. 在这一时期, 完成了概率论与数理统计的分家, 1930 年创办的《数理统计年刊》(Annals of Mathematical Statistics) 可看成是这一分家的标志.

从 1940 年开始, 概率论有了自己的研究方法, 重点是研究过程的样本函数的性质, 即研究过程随时间变化的轨道性质. 在这期间, 一方面逐渐地出现了理论概率与应用概率分家的趋势, 术语“应用概率”大约首次出现于美国数学会 1955 年的会议上, 这次会议以“应用概率”为标题发表了一组文章; 另一方面也出现了蒙特卡罗 (Monte Carlo) 方法, 其思想早在十八世纪法国学者布丰 (Buffon) 用投针游戏估计 π 值时就已形成, 但真正定名的却是在 1946 年, 当时美国两位学者冯·诺伊曼 (Von Neumann) 和乌拉姆 (Ulam) 首先用数学程序在计算机上模拟中子连锁反应, 并用概率统计的方法研究反应后的结果, 他们把第一个这样的程序命名为“蒙特卡罗程序”, 自此兴起了蒙特卡罗方法, 它是一种建立在概率统计基础上的计算方法, 在核物理、表面物理、电子学、生物学、高分子化学等学科的研究中有着重要的应用.

现在, 概率论与数理统计已成为最重要和最活跃的数学学科之一, 它既有严密的数学基础, 又与各学科联系紧密, 在自然科学、社会科学、管理科学、技术科学和工农业生产等各个学科和领域中都得到了广泛的应用.

第一章 事件与概率

本章首先由简单的随机试验,引出研究概率与数理统计最基本的两个概念——随机事件及其概率. 概率是随机事件发生可能性大小的度量. 为了能够从简单事件的概率出发,计算复杂事件的概率,本章引进了随机事件的关系与运算,讨论了它们的性质,并在此基础上逐步介绍了条件概率和三个重要的概率公式——乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式以及随机事件的独立性.

概率论与数理统计作为一门数学学科,应有其严格的逻辑基础,本章从概率的统计定义、概率的古典定义和概率的几何定义入手,建立了概率的公理化结构. 本章重点是古典概型、贝努里概型的概率计算以及乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式的运用,通过这些计算,使读者初步体会到数学上是如何定量地描述和研究随机现象及其统计规律的. 本章难点是古典概型的概率计算.

§ 1.1 随机事件及其概率

一、事件的概念

1. 随机试验

正如前面所述,为了研究随机现象内部存在的数量规律性,必须对所述随机现象进行观察或试验,今后我们把对随机现象所进行的观察或试验统称为试验. 例如,为了研究“向桌上抛掷一枚硬币,落下后出现某一面向上”,我们必须做“向桌上抛掷一枚硬币”的试验;又如,为了考察“从一副扑克牌中任摸两张所出现的花

色”，我们必须做“从一副扑克牌中任摸两张牌”的试验. 这类试验有两个特点：一是在相同条件下可以重复进行；二是每次试验出现什么结果事前不能确定，试验的可能结果是多种的. 我们称这种试验为**随机试验**，以下所说的试验都是指随机试验.

对于一个试验，总有一个试验目的，根据这个目的，我们将会得到试验可能出现的各种结果，例如，抛掷一枚硬币，我们的目的是要考察它哪一面向上，考察的结果只有两种可能：一是“正面向上”；二是“反面向上”. 又如，从一副扑克牌中任摸一张，我们的目的是要考察它是什么花色，考察的结果只有四种可能：“黑桃”、“红心”、“方块”、“梅花”. 今后，凡谈及试验的结果时，都是指某一确定的试验目的而言的.

2. 事件的直观意义

若某件事情在一次试验中一定发生，称这件事情为**必然事件**. 例如，“在一副扑克牌中任摸 14 张，其中有两张花色是不同的”这件事件就是必然事件.

若某件事情在一次试验中一定不发生，称这件事情为**不可能事件**，例如，“在一副扑克牌中任摸 14 张，其中没有两张花色是不同的”是不可能事件.

从必然事件、不可能事件的意义可以看到，必然现象的结果是必然事件，不可能现象的结果是不可能事件，必然事件与不可能事件互为相反面. 必然事件和不可能事件都是事前可以预言的事情.

若某件事情在一次试验中可能发生也可能不发生，称这件事情为**随机事件**，简称为**事件**. 例如，“掷一硬币，出现正面向上”、“从一副扑克牌中任摸两张，所得花色是相同的”都是事件.

根据事件的意义容易明白，试验的每一个可能结果是事件，因为这种事件不可能再分解为更为简单的事件，所以我们特别称这种事件为**基本事件**. 而一般的事件是由若干个基本事件复合而成的. 例如，考察在 0、1、2、3、4、5 六个数字中任取一个的试验，可能