高中数学发散思维辅导

立体几何

GAOZHONG SHUXUE FASANSIWEI FUDAO

主编 宏宇

安徽教育出版社

高中数学发散思维辅导

立体几何

主编　宏　宇

编者　宏　宇　汪继威　倪承源

齐韵芬　陈民胜

安徽教育出版社

责任编辑：王宏金
封面设计：牛　昕

高中数学发散思维辅导
（立体几何）

宏宇　主编
安徽教育出版社出版发行
（合肥市跃进路1号）
新华书店经销　　　合肥南方激光照排部照排
合肥晓星印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张：11.75　字数：280 000
1994年7月第2版　　　1999年2月第8次印刷
印数：130 001—150 000
ISBN 7-5336-0784-8/G·1238

定　价：9.30元

再 版 说 明

发散思维作为一个新的教研课题，已受到广大师生的高度重视. 由于发散思维具有多端性、变通性、独特性的特点，即思考问题时注重多途径，多方案，解决问题时注重举一反三，触类旁通，这与数学知识的思维特征极为相似，因此在中学阶段，结合数学教学，正确培养和拓展学生的发散思维能力，对造就创造型人才，至关重要.

有鉴于此，我们约请具有长期教学经验的教师，编写了这套《高中数学发散思维辅导》. 全书紧扣教学大纲和现行数学课本，分成四册，即《代数》(1、2)、《立体几何》、《平面解析几何》. 各册书均按现行课本章节编写，每章均由：知识系列、发散点分析、发散思维辅导、基础性发散思维训练题、提高性发散思维训练题五部分组成.

训练题大多是以课本中的习题为基础，围绕下述各种发散思维形式，加以改造设置的. 家长借此可以检查学生对课本各章节知识的掌握程度；学生借此可以评估课堂学习效果.

全书的结构框架如下：

知识系列——将课本各章知识加以归纳、概要，为引导学生发散思维首先奠定基础.

发散点分析——指明各章知识网络中进行发散思维的“结点”，启发和诱导学生逐步进入发散思维空间.

发散思维辅导——借助具体实例，采用题型发散、解法发散、纵横发散、变更命题发散、转化发散、迁移发散、构造发散、逆向发散、分解发散、综合发散等多种形式，对学生进行多思、多

解、多变的解题辅导.题型发散是将由发散点出发的典型问题，变换其题型，进行发散思维；解法发散则通过一题多解、多题一解等方法，进行发散思维；纵横发散是通过两个或多个发散点间的联系，以及发散点与其它知识点间的联系，借助例题形成发散思维；变更命题发散是通过变更命题的形式，或维持原命题的条件而改变结论，或改变原命题的条件而维持原结论不变，或同时改变原命题的条件、结论来进行发散思维训练；转化发散是通过保持原命题的实质而变换其形式来进行发散思维训练；迁移发散是利用数式、图形在不同的数学分科中的不同含义与等价形式，把一个分科里的公式、定理、原则或方法，巧妙地迁移到另一个分科中，达到化难为易的目的而进行的发散思维；构造发散是通过逻辑思维和丰富的联想，恰当地构造出某些元素（如数、式、方程、函数、几何图形、解析几何模型、等价命题等），使问题变成新元素，或变成新元素之间的一种新的组合形式，从而使问题得以解决的一种发散思维；逆向发散是由目标至条件的定向思考的一种发散思维；分解发散是把一个复杂命题分解成一些单纯命题并逐个加以分析和解决的发散思维；综合发散是通过教材各章发散点之间的联系，数学各科之间的相互联系，数学与其它学科之间的联系来进行发散思维训练.

本书 1991 年初版以来，深受中学师生欢迎，普遍认为这是一套有利于高中各年级学生学习，以及毕业班学生综合复习的课外读物.因此，现结合教材改革的实际情况和广大读者的建议，修订再版，欢迎购阅.

目　录

第一章　直线和平面

知　识　系　列

一、平面

1. 平面的概念：

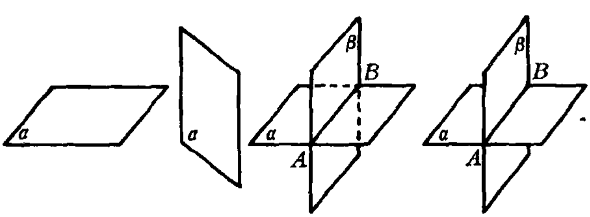
“平面”是一个只描述而不定义的最基本的原始概念. 对这一概念应理解三点：

(1)“平面”是平的；(2)“平面”无厚度；

(3)“平面”可以向四面八方无限延伸(与一条直线可以向两端无限延伸一样)，因此，平面是无边界的.

2. 平面的表示：

平面通常用一个平行四边形来表示. 对水平位置的平面，一般是画一个锐角为 45°、横边为邻边 2 倍的平行四边形来表示，这个平行四边形是表示它所在的整个平面，如图 1-1(a). 在画铅垂平面时，要有一组对边为铅垂线，如图 1-1(b). 画两相交平面时，一定要画出它们的交线，如图 1-1(c)、(d). 此时应注意，当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被



(a)　(b)　(c)　(d)

图 1-1

遮住部分的线段画成虚线或不画，以加强立体感.

3. 平面的基本性质：

(1)判定直线在平面内的依据：

公理 1:如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

(2)判定两平面有交线及交线位置的依据：

公理 2:如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

在确定平面截多面体所得截面形状时，常常利用这个公理.

(3)确定平面的条件：

公理 3:不共线的三点确定一个平面.

推论 1:直线和这条直线外一点确定一个平面.

推论 2:两条相交直线确定一个平面.

推论 3:两条平行直线确定一个平面.

(4)确定两直线平行的条件：

公理 4(三线平行公理):平行于同一条直线的两条直线互相平行.

二、直线与直线(简称线线)、直线与平面(简称线面)、平面与平面(简称面面)的位置关系

1. 位置关系：

(1)线线：

共面直线 {
- 相交直线——有且只有一个公共点
- 平行直线

异面直线

平行直线、异面直线 } 无公共点

(2)线面：

直线在平面内

直线在平面外 {
- 直线和平面相交
- 直线和平面平行——无公共点。

直线在平面内、直线和平面相交 } 有$\frac{\text{无数}}{\text{一个}}$公共点；

(3)面面：

两平面平行——没有公共点；

两平面相交——有一条公共直线.

2.两条直线平行的判定法：

(1) 在同一平面内，没有公共点的两条直线互相平行.

(2) 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

(3) 如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行.

(4) 如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行.

(5) 如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.

(6) 三个平面两两相交于三条直线，如果其中两条平行，那么第三条也和它们平行.

3.两条直线垂直的判定法：

(1) 一条直线垂直于一个平面，则必和平面内的任何一条直线垂直.

(2) 如果一条直线和两条平行直线中的一条垂直，那么也和另一条垂直.

(3) 如果一条直线平行于一个平面，那么这个平面的任何垂线都和这条直线垂直.

(4) 三垂线定理：在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直.

(5) 三垂线定理的逆定理：在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直.

4.直线和平面平行的判定法：

(1) 如果一条直线和一个平面没有公共点，那么这条直线和这个平面平行.

(2) 如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

(3) 如果平面外的两条平行线中有一条和平面平行，那么另一条也和这个平面平行.

(4) 如果两个平面平行，那么一个平面内的任何一条直线都平行于另

一平面.

(5) 一个平面和不在这平面内的一条直线都垂直于另一个平面,那么这条直线平行于这个平面.

5. 直线和平面垂直的判定法:

(1) 如果一条直线和平面内的任何一条直线都垂直,那么这条直线垂直于这个平面.

(2) 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直,那么这条直线垂直于这个平面.

(3) 如果两条平行线中的一条垂直于一个平面,那么另一条也垂直于这个平面.

(4) 如果两个平面垂直,那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

(5) 如果两个相交的平面都垂直于第三个平面,那么它们的交线也垂直于第三个平面.

(6) 如果三条共点直线两两垂直,那么其中一条直线垂直于另两条所确定的平面.

6. 平面和平面平行的判定法:

(1) 如果两个平面没有公共点,这两个平面互相平行.

(2) 如果一个平面内的两条相交直线都平行于另一个平面,那么这两个平面平行.

(3) 垂直于同一直线的两平面互相平行.

(4)平行于同一平面的两平面互相平行.

7. 平面和平面垂直判定法:

(1) 两个平面相交,如果所成二面角是直二面角,那么这两个平面互相垂直.

(2) 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面互相垂直.

(3) 如果一个平面与另一个平面的平行线垂直,那么这两个平面互相垂直.

三、直线与直线、直线与平面、平面与平面的度量关系

1. 夹角：

(1)两条异面直线所成的角：

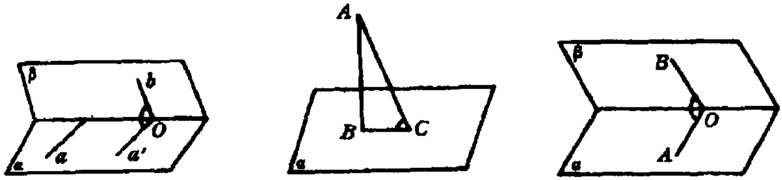
过空间任一点，分别作两条异面直线的平行线，所得两相交直线夹的锐角(或直角)[图 1-2(*a*)].

(2)直线和平面所成的角：

①平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角[图 1-2(*b*)].

②一条直线垂直于平面，我们说它们所成的角是直角.

③一条直线和平面平行或在平面内，我们说它们所成的角是 0°的角.



(*a*)　　(*b*)　　(*c*)

图 1-2

(3)二面角的平面角：

以二面角的棱上任意一点为端点，在两个面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角称作二面角的平面角[图 1-2(*c*)].

二面角的大小，可以用它的平面角度量.

平面角是直角的二面角叫做直二面角.

2. 垂直：

如下页表 1-1 所示.

表 1-1

	线　　线	线　面	面　面
定义	如果两条直线所成的角是直角，就说这两条直线互相垂直.	如果一条直线和一个平面内的任意一条直线都垂直，就说这条直线和这个平面垂直.	两个平面相交，如果所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直.
判定	①根据定义判定. ②利用直线垂直平面的性质(1). ③三垂线定理：在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直. ④三垂线定理的逆定理：在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直. ⑤垂直于两条平行线中的一条，也一定垂直于另一条. ⑥平面几何中所有判断垂直的法则.	①如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面. ②如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于同一个平面.	如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.
性质	如果两条直线互相垂直，那么这两条直线所成的角等于 90°.	①和一个平面垂直的直线，垂直于这个平面内的任一直线. ②两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行.	两个平面垂直，那么：① 在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面；② 经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线，在第一个平面内.

3. 距离：

(1)两条异面直线的距离：

①两条异面直线的公垂线——和两条异面直线都垂直相交的直线.

②两条异面直线的距离——两异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度.

(2)直线和它平行平面的距离：

一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到平面的距离，称作这条直线和平面的距离.

(3)两个平行平面的距离：

和两个平行平面同时垂直的直线，称作两个平行平面的公垂线；它夹在这两个平行平面间的部分，称作这两个平行平面的公垂线段. 公垂线段的长度称做两个平行平面的距离.

四、空间图形的表示

1. 空间图形和平面图形：

空间图形是由空间的点、线、面所构成，也可以看成是空间点的集合. 例如，长方体、圆柱、圆锥等，都属于空间图形.

平面图形是由同一个平面内的点、线所构成的图形.

平面图形是空间图形的一部分；空间图形是由平面图形表示的.

立体几何的研究对象是空间图形；但对空间图形的研究是通过对表示它的平面图形，并借助于平面几何知识来实现的.

2. 立体几何中空间想象能力的含义：

空间想象能力指的是人们对客观事物的空间形式进行观察、分析和抽象的能力. 在立体几何中，这种能力具体表现在三个方面：

(1)根据对空间图形的感觉，按规定在平面上画出表示它的图形；

(2)根据对表示空间图形的平面图形的分析，复原出空间图形的形象；

(3)根据语言或式子，勾画空间图形的形象，并画出表示它的平面图形. 因此从本质上看，在立体几何中，空间想象能力正是实现表示空间图形的平面图形和空间图形相互转化的能力.

3. 空间图形的表示：

表示空间图形的平面图形，如果画得好，能使我们获得较强的立体感.

(1)用直观图表示空间图形：

直观图是空间图形的标准表示法，能使我们获得最强的立体感，初学者要花一些时间熟悉它的画法.

(2)空间图形的平面草图：

解立体几何问题，不需要每次都画出空间图形的直观图，常常只要画个草图. 因为人们在解题时遇到最多的是草图，因此，要注意增强草图的立体感. 为此：

①要尽可能熟练掌握一些接近直观图画法的标准画法.

例如，练习以下相交两平面的画法(图 1-3).

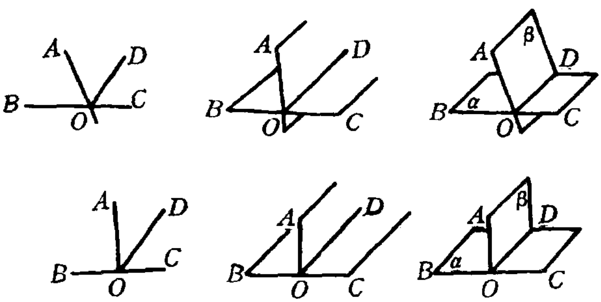


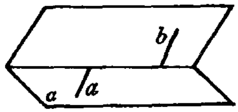
图 1-3

从图中不难发现，当 AO 与 BC 斜交时，给人以平面 α 和 β 斜交的印象；当 $AO\perp BC$ 时，给人以平面 α 和 β 垂直的印象.

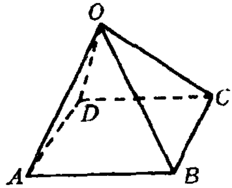
②利用理性认识，强化立体感.

用平面图形表现空间图形，毕竟曲解了空间图形的本来面貌. 因此，应努力加强理性认识，烘托图形的立体感，并避免可能产生的错误. 比如，仅靠直观，往往把图 1-4(a)中的 a、b 两直线看成是平行直线. 对图 1-4(b)的正四棱锥，如果仅靠直观，由于平面 OAB、OCD 的交线难以画出，无法作出这两个半平面所成二面角的平面角.

(3)熟悉长方体，利用长方体：



(a)



(b)

图 1-4

长方体是人们最熟悉的几何体之一.它的直观图不但好画，而且立体感特别强.立体几何中的许多重要概念，例如异面直线、异面直线所成的角和距离，都能借助长方体予以表示.因此，研究长方体，对提高空间想象能力大有裨益.

发散点分析

本章发散点是共面、共线、共点问题，异面直线问题，平行或垂直关系问题，距离和角问题.要进行发散思维训练，必须掌握与上述发散点有关的知识内容，并研究“立体几何”的基本方法，从直线(一维)到平面(二维)再到空间(三维)，称作为升维；将空间图形中的点、线、面又转移到同一平面中来称作为降维.升维与降维的互相转化是研究立体几何最基本的思维方法.它可使问题化繁为简、化难为易.现将与发散点有关的问题剖析如下：

一、共面、共线、共点的判定

1.正确理解公理及推论中的意义：

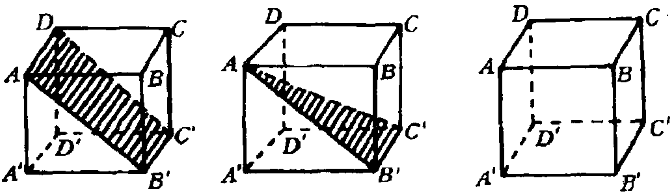
公理及推论中的“有且只有一个”应理解为：“有”说明图形是存在的，“只有一个”说明图形是唯一的.“有且只有”和“确定”是同义词.

2.平面的表示：

(1)用平面图形表示平面：

平面常用平行四边形表示，也可用三角形、梯形及圆等平面图形表

示. 根据公理 3 及三个推论，还可以用不共线三点、一条直线和直线外一点、两条相交直线、两条平行直线等任一种平面图形表示平面. 在适当场合使用第三种平面图形表示平面，可以减少辅助线的条数，还可以提高空间想象能力. 例如，在正方体 AC' 中，矩形 $AB'C'D$ 可以表示过 AD、$B'C'$ 的平面[图 1-5(*a*)]；$\triangle AB'C'$ 可以表示过 AD、$B'C'$ 的平面[图 1-5(*b*)]；两条平行直线 AD、$B'C'$ 也可以表示过 AD、$B'C'$ 的平面[图 1-5(*c*)].



(*a*)　　(*b*)　　(*c*)

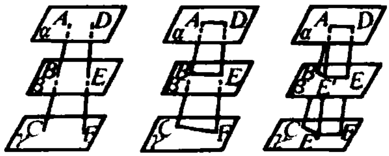
图 1-5

(2)平面和截面：

截面是和平面相关的概念. 几何体被平面所截，平面与几何体的接触部分便是截面. 例如，图 1-5(*a*)中的矩形 $AB'C'D$ 就是正方体 AC' 的一个截面. 由于截面 $AB'C'D$ 和 $\triangle B'C'A$ 都可以表示过 B'、C'、A 三点的平面，因而容易使初学者产生错觉，以为可以用截面的一部分表示截面. 例如，把 $\triangle B'C'A$ 看成是过 B'、C'、A 三点的正方体的截面(图 1-5(*b*)).

3. 防止把不共面的直线当作共面直线来处理，导致推理判断错误：

例如，直线 AC、DF 被三个平面 α、β、γ 所截，已知 $AB=10\text{cm}$，$BC=12\text{cm}$，$DE=8\text{cm}$，求 EF[图 1-6(*a*)]. 解此题时，初学者往往把 AC、DF 看成是共面的，从而在把 AD、BE、CF 看成是平行直线后，得出 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 的结论，最后求出 $EF=9.6\text{cm}$[图 1-6(*b*)]. 这里，尽管得出的结论和答案都是正确的，但推理过程错了. 其实，应该把 DF 平移至 AF'，最后在 $\triangle ACF'$ 所在平面和平行四边形 $AF'FD$ 内解决问题[图 1-6(*c*)].



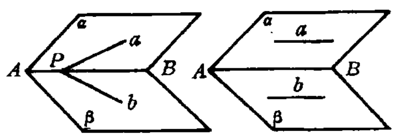
(a)　　(b)　　(c)

图 1-6

二、异面直线问题

对异面直线问题要理解以下 4 点：

(1)“不同在任何一个平面内的两条直线”，是指不可能同时在任何一个平面内，因此它们是既不平行也不相交的；



(a)　　(b)

图 1-7

(2)分别在两个平面 α、β 内的两条直线 a、b，不一定是异面直线：如图在 1－7(a)中的两直线 a、b 虽分别在平面 α、β 内，但它们相交于两相交平面 α、β 的交线 AB 上一点 P；又如图 1－7(b)中的两直线 a、b 也虽分别在两平面 α、β 内，但它们均平行于两相交平面 α、β 的交线 AB，像这样的两条直线 a、b 是共面的．除此之外，在两个平面内的两条直线都是异面直线．

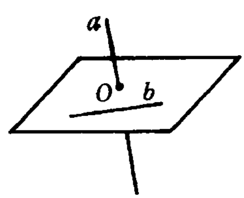


图 1-8

(3)画异面直线时以辅助平面为衬托，可使两直线不能共面的特点显示得更清楚，如图 1-8，否则就会分不清是不是异面直线．

(4)异面直线所成的角，是将它转化为两条相交直线所成的锐角(或直角)来确定的．其办法是把两条异面直线中的一条平移到另一条所在的平面中来，在同一平面中求相交直线所成的角．这种平移法是求异面直线所成角的常规法．将空间两异面