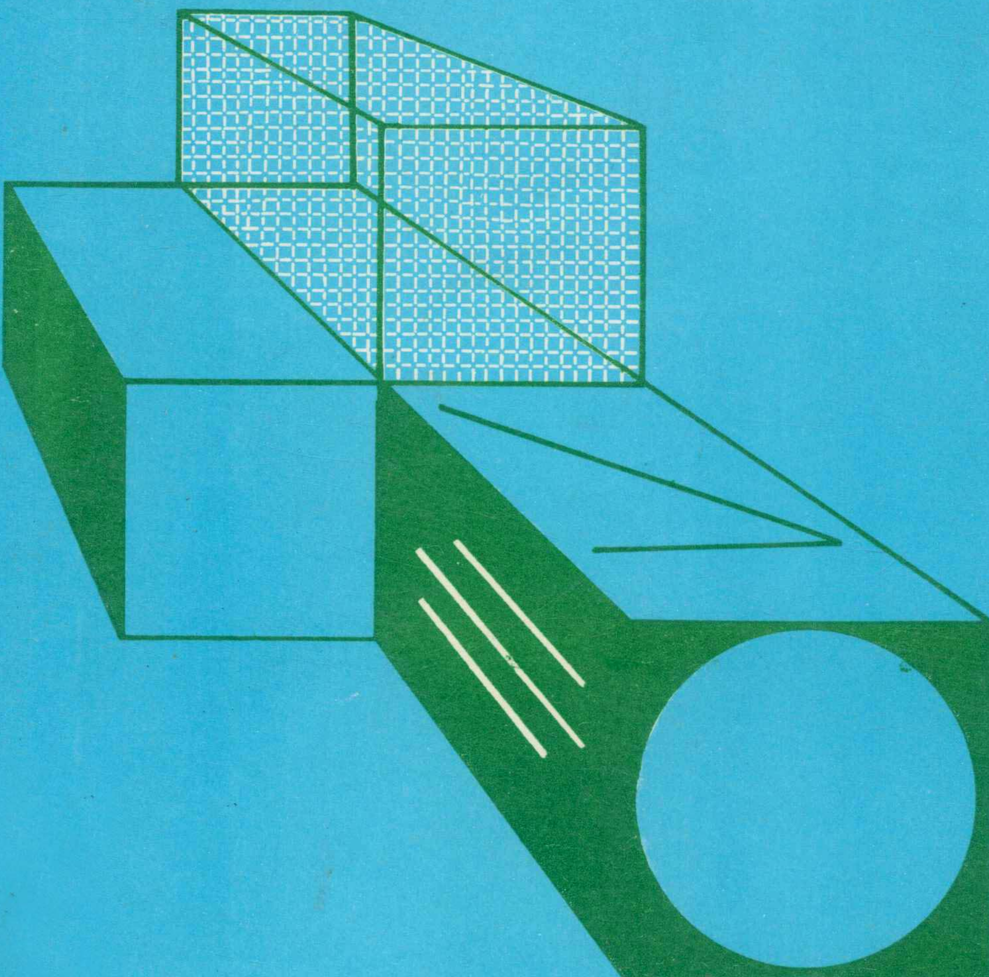
新修訂第五版

工程數學(上)

C. RAY WYLIE
LOUIS C. BARRETT

蘇炎坤 編譯



復文書局

新修訂第五版

工程數學

蘇炎坤 編譯

復 文 書 局

新修訂第五版

工 程 數 學

(1987)民國七十六年四月初版發行

著作權執照台內著字第　　號

編譯者：蘇　炎　坤

發行者：吳　主　和

發行所：復　文　書　局

地址：台南市長榮路2段24巷71弄10號
門市：台南市林森路二段63號
電話：(06) 2370003 · 2386937
郵政劃撥帳戶 0032104－6號

NO. 63 SECTION 2 LIN-SEN ROAD.
TAINAN. TAIWAN. R.O.C.

本書局經行政院新聞局核准登記發給
出版事業登記證局版台業字第0370號

精裝 280 元 • 平裝 240 元

序言

本書初版之編着，目的在介紹微積分以後的數學其他分支，以提供一般重視分析的工程師或物理學者學習，以便有效的推進其工作，且與這些工作領域的進代發展，齊頭並進。此版本中，大多數的內容雖改寫、增刪及修改，但和以前第二、三及四版本相同，均希望對上述的目的，有更多的貢獻。

學習應用科學的學生，在微積分之後，馬上需要用到的數學爲常微分方程，且因爲解簡單常微分方程的技巧，以微積分爲起源，因此本書第一章就討論首階常微分方程式及應用。後面的一章則說明線性微分方程式的理論和應用，並特別的注意一些屬於常係數的。爲了對常係數線性微分系統的討論作準備，所以另外一章將介紹線性代數。它內容的主要用途在第四章，用來研究聯立微分方程式系統，但如果讀者已經熟悉矩陣、行列式及聯立線性代數方程式的解法，則可以略過本章。第五章討論有限差分，並含有插值法、數值微分和積分中的應用。對於微分方程式的逐步數值解法，則介紹龍奇一庫塔及米納的方法。希望依本章的內容，能提供傳統有限差分的可靠背景，以作爲計算機性向，數值分析課程的基礎。第六章將前面幾章的觀念，應用於機械系統及電氣線路上，而且和以前的四種版本一樣，特別的重視不同領域的數學相關性。

從第六章討論的週期現象，自然的延伸到第七章所述的傅立葉級數及傅立葉積分。本書比以前的版本更重視傅立葉積分的應用。第八章所談爲由傅立葉積分所產生的拉普拉斯轉換法，並且詳細的討論它的性質和應用。後面的兩章分別說明偏微分方程式及邊界值問題；並談到貝賽爾函數和賴勒特多項式，而且內容和第四版大致相同。這裏的傅立葉級數在滿足原始及邊界條件時，產生很重要的作用；並促使討論和利用一般性的正交函數展開的情形。這幾章中列出許多新增加的例題，並且另外增加了兩節，一節說明偏微分方程式的特徵線

和分類，另一節說明偏微分方程式的數值解。

第十一、十二兩章又回到線性代數，討論向量空間、線性變換、葛林函數的存在性，以及矩陣的其他性質，和特徵値及特徵向量等。第十三章是向量分析，且和第四版類似，爲幾何觀念的發展而形成。第十四章說明變分學及在動力學中的應用。最後四章介紹複函數的理論，及在流體力學和二維位勢理論中的應用，實數定積分的求出，拉普拉斯變換理論中的複數反積分，穩定性的判斷，保角的映象，及席瓦茲－克里斯多夫變換法等。

總括言之，本書可分爲三大部份，前面十章對於常微分方程式，偏微分方程式及應用，有相當完整的說明，後面四章包含線性代數、向量分析、及變分學的有關項目。最後四章爲複變函數的基本理論和應用。上面的內容含有足夠的教材，以提供微積分以後，二學年應用的數學課程用；且可以用作短期個別課程的教材用。

本書和前四次版本一樣，盡力使說明能夠詳細清晰，同時保持精密性及正確性到相當的地步。爲達到這目標，特別含有比較常見的例題，及仔細繪製的圖形，且在每一次推演的過程中，特別將每一步驟逐步加以詳細的說明，以便使一般已經具有良好的微積分的基礎的，只是用紙、筆就可以實施，而且不會猶疑過久。本書增加許多新的習題。現在總數已經超過 3100 題。其中或有涉及比本書範圍更深入的，或有因篇幅限制來不及介紹的項目。有很多習題附有提示，且本書附有習題中單數題的答案。且和前四次版本一樣，凡是有非正式定義的名詞和詞句，都用黑體字排印，而斜體字常用在應該重視的地方，課文中的例題，改用較小的字體。

本人對於授業恩師、同事及學生的感激，難以一一列名致謝；而對於本書著作，曾大力相助及鼓勵的人，也只能在這裏一起道謝。尤其是對使用本書的教師及學生，不時的來信提供以前四版的意見、批評和指正；及對本版本提出與改革的地方，深感謝意。最後還須感謝拙荊 Ellen 及 Betty ，不但由於她們的幫助和鼓勵，且因本人長期專注於原稿期間，她們付出的耐心和了解。

C.Ray Wylie

Louis C. Barrett

致 學 生

本書的編着，在幫助各位成為一個應用科學家；而不論是工程師、物理學家、化學家、或是數學家。書中的內容都很重要，不但今後在技術方面的課程中有用，就算畢業後，在各位專長範圍內的專業工作，遭遇到分析性的問題時，亦將有用。

本人希望此書能使各位感到有用，而且容易學習，至少也要達到高等數學中容易學的程度。書中有些理論的部份，將作為將來對不是常規的應用的基礎，但是沒有任何一個地方是為了理論本身着想，用來迎合純數學家的興趣及合法性。本人對理論的探討，只是用來說明原理，指導它的推廣，以便建立對某些技巧的使用安全極限，或者指出缺點，避免誤用。在另一方面，利用許多的例題，表示出如何從已知的資料建立物理問題的數學模式，再進行運算及求解，並說明其結果等等常用的步驟。這些例題，沒有一個例外，都要小心的規劃並完全加以整理，但是只列出其中最簡單的步驟，所以必需隨時利用紙和筆小心研讀，以便全部了解。若能如此，各位將發現書中具挑戰性的習題，各位仍有能力解決。

課文中未正式定義的項目，常常利用黑體字排印，而斜體字用於該重視的地方。本人建議閱讀的時候，先流覽各節一遍以了解大意，然後再集中詳細敍述。有時會發現一段中不容易了解的地方，將在下一段中加以說明並討論。

本書內容很多，而且適合多種課程的教材，所以各位的指導老師或許會選擇其中的一章開始。但依本書的構造來說：前面十章致力於常微分方程式及偏微分方程式，及有關項目的一般性主題。各位將會發現對於連續變量的物理問題，其方程式的建立，及求解時分析的技巧。第十一到十四章是線性代數、矩陣理論、向量分析，以及變分學的相關課題。第十五到十八章，是複變函數的

初步理論及應用。

使用本書的讀者，曾來信表示閱讀的反應，指出書中之錯誤，並建議改進等，本人非常感激。各位若對本書有任何意見，尚祈不吝賜教。最後祝順利及成功。

C. Ray Wylie
Louis C. Barrett

目 錄

第一章　首階常微分方程式……1

1－1　函數及方程式……1
1－2　微分方程式之分類……5
1－3　微分方程式的解答……8
1－4　解答曲線及積分曲線……16
1－5　指定解答之微分方程式……21
1－6　解答的存在性與唯一性……26
1－7　恰常首階方程式……30
1－8　首階方程式的積分因數……38
1－9　可以分離的首階方程式……43
1－10　齊次首階方程式……50
1－11　線性首階方程式……59
1－12　特殊的首階方程式……63
1－13　可以降階的二階方程式……68
1－14　正交軌線……72
1－15　首階微分方程式……78

第二章　線性微分方程式……115

2－1　基本存在及唯一定理……115
2－2　解答的族類……119
2－3　非齊次方程式的解……134

2－4　參數代換及降階法……142
2－5　常係數二階齊次方程式……151
2－6　高階齊次方程式……165
2－7　係常數非齊次方程式……170
2－8　猶拉——柯西微分方程式……190
2－9　常係數線性微分方程式的應用……196
2－10　葛林函數……218

第三章　線性代數的介紹……237

3－1　向量代數……237
3－2　矩陣代數……248
3－3　特殊矩陣……262
3－4　行列式……279
3－5　線性代數方程式系統……309
3－6　特殊線性系統，反矩陣，伴隨矩陣及克來姆法則……325
3－7　特徵值問題……347

第四章　聯立線性微分方程式……357

4－1　線性微分方程式的解，相容，等值特性……357
4－2　化減微分系統成爲等值系統……362
4－3　關於首階系統的基本觀念及定理……375
4－4　線性微分系統的餘函數和特積分……386
4－5　常係數線性微分系統……406

第五章　有限差分……433

5－1　函數的差分……433
5－2　插值公式……447

5－3　數值微分及積分……459
5－4　微分方程式的數解值……468
5－5　差分方程式……490
5－6　差分方程式及微分方程式的數值解……515

第六章　機械系統和電路……521

6－1　介紹……521
6－2　一度自由系統……521
6－3　平移機械系統……534
6－4　串聯電路……558
6－5　多度自由系統……571

解答……595

第一章
首階常微分方程式

1-1 函數及方程式

多年來工程師及科學家們已瞭解利用數學的方法可以很順利的描述及分析他們所碰到的各種問題。這首先需要確定問題中所研究的事物及準確地敍述並表達其行爲定律，這些定律中大多數均包含有各種的函數及方程式。基於這一原因，我們必需充份瞭解這兩種重要觀念。

在某一函數 f 之定義範圍內，對應於每一 x 值，必定有一函數值 $f(x)$ 與其相對應，由於不同性質之定義範圍，變數 x 可以代表爲一個數目或其他種類之數量（Entity）。

【例 *1.*】

因爲對於所有的實數值 x，均能滿足 $2+\cos\pi x\geq 1$ 的關係，因此，$f(x)=\ln(2+\cos\pi x)$ 可定義爲一函數 f。而以所有之實數集合爲其定義範圍，當 x 值等於 1 時，f 之值爲 $f(1)=\ln(2+\cos\pi)=\ln 1=0$，而 $f(2)=\ln 3$ 係表示當 x 值等於 2 時之 f 值。在此例題中可以用任何實數代替變數 x。

【例 2.】

設定義爲：$g(y)=\int_0^1 y(t)\,dt$ 之函數 g，其定義範圍爲封閉區間〔 0 , 1 〕內爲連續之所有函數的集合。若在〔 0 , 1 〕區間內，則

$y_1(t)=t$ ，則 $y_2(e)=\cos\pi t$ ，$g(y_2)=\int_0^1\cos\pi t\,dt=0$ 此處變數 y 可以用在〔0，1〕區間內任何具有連續性的函數來代替。

實際上常使用 $f(x)$ 爲函數之公認符號，此種方法雖然不正確，但很少會產生混淆，因此本書中將採用 $f(x)$ 代表函數。

通常一已知函數的數值，可以用一適當的解析方法來代替各個變數而求出。此種表達方法通常稱爲函數在該範圍內代表該對應的函數值之表達式（Representation）如例題一及例題二中，函數之所有各個值，常常可以利用一單獨之表達方式而加以決定，但也不是所有情況都是如此，在許多不同的物理問題中，時常需要在不同的範圍中，以不同的表達式子來表示極數的特性。

【例3.】

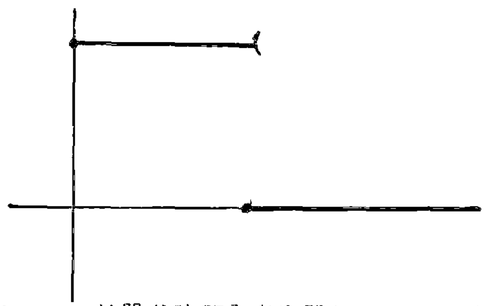


圖 1－1　於單位時間內產生單位電壓波圖形

一電路於時間 $t=0$ 開始到 $t=1$ 爲止，單值電壓脈波如圖 1－1 所示。

此電壓函數 $E(t)$ 在時間範圍 $0\leq t<1$ 內可以正確地表示爲

$$E(t)=1$$

而在時間範圍 $1\leq t$ 時，可以正確地表示爲

$$E(t)=0$$

因此在時間範圍$0 \leq t$中，電壓函數可以用兩種表示式加以表示即

$$E(t)=\begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t \end{cases}$$

在其他問題中，有些函數可以在全部範圍內用一適當的表示式來加以表示，但却不適合計算其函數的值。在此種情況下，需要以不同的表示式來表示不同的部份。

【例4.】

函數$\mathrm{Tan}^{-1} x$ 之定義範圍爲所有實數的集合，在這些數值中，$\mathrm{Tan}^{-1} 1=\pi/4$，$\mathrm{Tan}^{-1}(-1)=-\pi/4$，若需要編列一函數表以表示$\mathrm{Tan}^{-1} x$時，則可先將此函數表示爲$x$之冪級數(Powers sevies)若參考標準數學函數表可知需要三種不同的表達方程式來表示$\mathrm{Tan}^{-1} x$函數，而每一方程式各代表每一不同範圍的數值。

$$\mathrm{Tan}^{-1} x=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)x^{2n+1}} & x<-1 \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} & -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{\pi}{2}-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)x^{2n+1}} & x>1 \end{cases}$$

在以往學習數學的過程中，時常論及包含一個或更多個變數的方程式，而欲尋求其解答，須熟習下面幾個範例：

〔註〕：例如參考得威特氏(H.B.Dwinght)編著的"Tables of Integrals and Other Mathematical Data"一書中第112頁，Mac Millan 公司，紐約1947年出版。

$$x^2+3x+2=0 \quad \tan\theta=\frac{2}{3} \quad t=e^{-1} \quad \{v=u^2,\ 8u=v^2\}$$

如今我們將進一步考慮微分方程式。其中包含一個或更多個變數的導數（Derivative ）或微分式（Differentials）之方程式即稱爲微分方程式，在純粹及應用的科學與工程範圍內，佔有基本之重要特性，故本書的大部份章節將研討各有關的問題。

下面所列的爲微分方程式的四個例題：

(1) $$\frac{dy}{dx}=e^x+\sin x$$

(2) $$y''-2y'+y=\cos x$$

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

(4) $$3x^2dx+2ydy=0$$

代表一函數值的變數，我們稱爲因變數（Dependent Variable ）。而自變數（Independent Variable）係在因變數值所表示的函數領域內，可以任意變化的變數值，例如在方程式(1)(2)中，y 爲因變數而 x 則爲自變數，而在方程式(3)中 u 爲因變數，而 x，y，t 等則爲自變數，但是在方程式(4)中，x 或者 y 均可以當作因變數，而其他一個變數即爲自變數。

習　題

在 1 － 5 之習題中，假設 f 爲已知表示式的函數。

1. $f(x)=\sin+(\pi-x)\sinh x$，x 爲實數；試求(a) $f(0)$，(b) $f(\pi)$

，(c) $f(-\pi)$ 之值。

2. $f(x)=\{x\}+\mathrm{Tan}^{-1}x$ ，x 爲實數；試求(a) $f(0)$ ，(b) $f(1)$ ，(c) $f(-1)$ 之值。

3. $f(x)=\Sigma_{n=0}^{\infty}[1+(-1)^n]x^n/n!$，$x$ 爲實數；試求(a) $f(0)$，(b) $f(1)-f(-1)$ ，(c) $f(\ln 2)$ 。

提示：試回想 e^x 值的馬克勞林級數 *(Maclaurin Series)。

4. $f(x,y)=\int_{\pi}^{2\pi} x(t)\,y(t)\,dt$ ，x、y 在 $[\pi, 2\pi]$ 區域內爲連續；若 $x_1(t)=\cos t$ ，$y_1(t)=\sin 2t$ ，試求(a) $f(1, y_1)$，(b) $f(x_1, 1)$ ，(c) $f(x_1, y_1)$ 的値。

5. $f(x,y,z)=2\int_0^x[3y(t)-z(t)]\,dt$ 對所有的實數値 x，y 與 z 均爲連續性；設 $y_1(t)=1/(1+t^2)$ ，$z_1(t)=\mathrm{Tan}^{-1}t$，試求(a) $f(\infty, y, 0)$ ，(b) $f(1, y_1, z_1)$ ，(c) $f(-1, y_1, z_1)$ 之值。

6. 一函數 f 於實數集合的範圍內可表示爲 $f(t)=2(1-\cos^2 t)+\ln e^t$ 試求於實數集合內，且不包含對數，函數項之其他三種 f 之表達式。

7. 在 8 小時期間內，每 40 分鐘一裝載車可卸下砂石一次，在 t 小時之後，試求該裝載車可以卸下砂石多少次？假設卸砂石一次之時間爲 40 分鐘。

8. 試求出下列各微分方程式中之因變數及自變數：

(a) $3xy''+\tanh y'=y$

(b) $z''+zy'+yx=\sec x$

(c) $u_{xx}+v_{yy}-xyuv=0$

1-2 微分方程式之分類

〔註〕：此級數係紀念蘇格蘭數學家馬克勞林而命名。

微分方程式可以利用各種不同之特性區分爲許多可以區別之型態，常（ordinary）微分和偏（Partial）微分方程式，可以由方程式中所含自變數數數目及其導數之種類，而加以區別。

《定義1》　若微分方程式內所含之所有導數，對於單一自變數而言均爲一個或多個因變數之常導數（Ordinary derivatives）時，則稱爲常微分方程式。

很明顯地，1－1節中之方程式(1)及(2)，均爲常微分方程式，同理，(4)式亦爲常微分方程式；因爲在此方程式中，無論選擇 x 或 y 作爲自變數，且將方程式除以微分量 dx 或者 dy，則方程式中祇含有 dy/dx 或 dx/dy 等常導數。

《定義2》　若微分方程式中，至少包含某一個因變數之偏導數時，即稱爲偏微分方程式。

1－1節中之方程式(3)，即爲一偏微分方程式。

微分方程式亦可用其階數（Order）而加以區分。

《定義3》　微分方程式之階數（Order）係以該方程式所包含之最高階之導數爲基準。

1－1節中之方程式(1)及(4)均爲一階之微分方程式；而方程式(2)和(3)則爲二階之微分方程式。

微分方程式之另外較廣義之區分方式，係以方程式中之因變數及其各階導數在方程式中出現之特性而定。

《定義4》　若且唯若微分方程式中的每一項所包含的因變數及其所有的導數均係一次方者，則該微分方程式，稱爲線性（linear）微分方程式。

若一微分方程式對於其中某一因變數爲非線性，則稱此方程式對該因變數爲非線性（Nolinear），一微分方程式，若對所有因變數集合，均爲非線性時，則稱爲非線性。

【例1.】

方程式 $y''+4xy'+2y=\cos x$ 爲一二階線性常微分方程式，其中 xy' 和 $\cos x$ 等項的存在並不改變該方程式的線性，因爲由定義可知，方程式的線性是由因變數加以決定。

【例2.】

方程式 $y''+4yy'+2y=\cos x$ 因含有 y 和其導數的乘積，所以爲一非線性方程式。

【例3.】

偏微分方程式 $\partial^2 v/\partial x^2+\partial v/\partial t+u+v=\sin u$，就因變數 v 而言，係線性方程式，但對因變數 u 而言，則爲非線性方程式，因爲 $\sin u$ 項爲 u 之非線性函數，因此方程式仍屬於非線性。

【例4.】

方程式 $d^2x/dt^2+dy/dt+xy=\sin t$ 就個別因變數 x 與 y 而言，均爲線性方程式，但因爲有 xy 項，因此就因變數的集合 $\{x, y\}$ 而言，並非線性，因此，此方程式爲非線性。

【例5.】

若方程式寫成 $3x^2dx+(\sin x)\,dy=0$ 時，既不是線性亦不是非線性。但若除以 dx 使方程式成爲 $3x^2+(\sin x)y'=0$，則就 x 而言，即成爲非線性方程式。

由定義4可知，一個 n 階的線性常微分方程式，祇含有一個因變數時，其最普遍化的形式如下：

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

其中在某一區間中 $a_0(x)\neq 0$。

習　　題