

高等院校土木工程专业教材

混凝土结构 基本构件设计与计算

Hunningtu Jiegou Jiben Goujian Sheji Yu Jisuan

郭继武 编著

知识体系循序渐进

计算公式推证详细

例题解答步骤清晰完整

编程计算器解题方法快捷便利

中国建材工业出版社

高等院校土木工程专业教材

混凝土结构基本构件 设计与计算

郭继武 编著

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

混凝土结构基本构件设计与计算/郭继武编著. —
北京:中国建材工业出版社,2010.9
ISBN 978-7-80227-809-7

I. ①混… II. ①郭… III. ①混凝土结构—结构设计—高等学校—教材②混凝土结构—结构计算—高等学校—教材 IV. ①TU37

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 129031 号

内 容 提 要

本书是参照高校土木工程专业教学大纲和《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2002)编写的。主要讲述混凝土结构基本构件的基本理论、设计和计算方法。主要内容包括:结构可靠度应用概率论简介,建筑结构荷载,建筑结构概率极限状态设计法,钢筋和混凝土材料的力学性能,受弯、受压、受拉、受扭构件承载力的计算,钢筋混凝土构件变形和裂缝的计算,预应力混凝土构件的计算,现浇钢筋混凝土楼盖设计共 10 章。

本书还介绍了使用编程计算器(CASIO α -9750G II)的一种解题方法,书中提供了 23 个主程序和 8 个子程序,基本能满足混凝土结构基本构件的计算需要。书中例题除手算外,还按编程计算器进行了演算。

本书适合作为高校土建类专业教材,也可供工程设计、监理和施工技术人员使用。

混凝土结构基本构件设计与计算

郭继武 编著

出版发行:中国建材工业出版社

地 址:北京市西城区车公庄大街 6 号

邮 编:100044

经 销:全国各地新华书店

印 刷:北京鑫正大印刷有限公司

开 本:787mm $\times$ 1092mm 1/16

印 张:18.25

字 数:459 千字

版 次:2010 年 9 月第 1 版

印 次:2010 年 9 月第 1 次

书 号:ISBN 978-7-80227-809-7

定 价:33.00 元

本社网址:www.jccbs.com.cn

本书如出现印装质量问题,由我社发行部负责调换。联系电话:(010) 88386906

前 言

《混凝土结构基本构件设计与计算》是土木工程专业的专业基础课，是本专业重点课程之一。主要讲述混凝土结构基本构件的基本理论、设计和计算方法。主要内容包括：结构可靠度应用概率论简介，建筑结构荷载，结构概率极限状态设计法，钢筋和混凝土材料的力学性能，受弯、受压、受拉、受扭构件承载力的计算，钢筋混凝土构件变形和裂缝的计算，预应力混凝土构件的计算，现浇钢筋混凝土楼盖设计共 10 章。

编写本书时，笔者力求做到内容由浅入深，循序渐进，理论联系实际，尽量对规范公式、系数的来源和有关条文加以推证和说明。例如：

(1) 在叙述以概率为基础的极限状态设计法时，为了使学生理解这一方法的实质内容，包括建筑荷载取值、混凝土强度取值等，教材对概率论的基本知识做了必要的讲解和复习。这样对什么是分位值等概念就不会生疏了。在接受荷载标准值、准永久值和频遇值及材料强度标准值等这些概念时就可迎刃而解。

(2) 混凝土正截面等效矩形应力图系数是混凝土教学中的一个难点。为了使学生掌握它的确定原则和方法，本教材用了较少的篇幅对应力图系数作了推演。无疑，这对理解问题的物理概念是有帮助的。

(3) 最小配筋率 $\rho_{\min}$ 也是困扰学生的一个问题。在复核梁的配筋率是否不小于 $\rho_{\min}$ 时，为何计算配筋率是 A_s 除以构件的全截面 bh ，而不是配筋率所定义的 $\rho = \frac{A_s}{bh_0} 100\%$ ？一般认为，这是因为定义最小配筋率时采用的就是全截面。本教材也采用了这一说法，并对公式进行了推证。

(4) 本书在叙述剪扭构件混凝土受扭承载力降低系数 β_t 时，力求把物理概念讲清楚，并运用三角公式进行推演，有别于通常方法。

(5) 在工程设计中，经常遇到双向板的计算。本教材重点介绍了塑性理论方法，特别给出了直接计算配筋面积公式，使计算得到简化。这一方法已为大量工程所证明，它是安全、可靠的。

本课程的特点是内容多、符号多、计算公式多、构造规定多。为了减轻大学生们的课业负担，本书介绍了使用编程计算器解题方法，书中提供了 23 个主程序和 8 个子程序，基本满足了基本构件的计算需要。书中例题除手算外，又都用编程计算器进行了演算，以便读者比较、对照。使用编程计算器解题，只需将已知数据输入编程计算器就可很快地得到中间结果和最后答案。若不需查阅中间结果，则可将程序中显示中间结果的显示符删除即可。

本教材所用的源程序已上传至 CASIO 公司网站。用户可无偿下载使用，网址为：www.casio.com.cn，下载路径为：首页→产品→计算器→下载中心→工程资料下载→FA - 124→Program（注：用户下载前计算机应安装 FA - 124 通信软件）。

如用户采用计算机传输数据感到不便，也可与编者联系 $fx-9750G II$ 计算器事宜，该计算器内已安装教材所用源程序，不需再作其他设置，便可使用。

编写本书过程中，参考了公开发表的一些文献和专著，谨向这些作者表示感谢。

由于笔者水平所限，有些看法仅为一孔之见，书中可能有疏漏之处，请广大读者批评指正。欢迎读者致电笔者邮箱：19331020@163.com。

编 者

2010 年 5 月

目 录

第1章 绪论	1
1.1 混凝土结构的概念	1
1.2 混凝土结构发展简况	3
1.3 本课程特点及学习方法	3
第2章 钢筋混凝土结构极限状态设计算法	5
2.1 结构可靠度应用概率论简介	5
2.2 建筑结构荷载	12
2.3 建筑结构设计使用年限和安全等级	18
2.4 建筑结构概率极限状态设计法	18
小 结	28
思考题	28
习 题	28
第3章 钢筋和混凝土材料的力学性能	30
3.1 混凝土的力学性能	30
3.2 钢筋的种类及其力学性能	39
3.3 钢筋与混凝土的粘结、锚固长度	45
小 结	47
思考题	48
第4章 受弯构件承载力计算	49
4.1 概述	49
4.2 梁、板的一般构造	50
4.3 受弯构件正截面承载力的试验研究	54
4.4 单筋矩形截面受弯构件正截面承载力计算基本理论	56
4.5 单筋矩形截面受弯构件正截面承载力计算	66
4.6 双筋矩形截面受弯构件正截面承载力计算	77
4.7 T形截面受弯构件正截面承载力计算	83
4.8 受弯构件斜截面受剪承载力计算	92
4.9 纵向受力钢筋的切断与弯起	106
4.10 受弯构件钢筋构造要求的补充	109
小 结	112

思考题.....	113
习 题.....	114
第 5 章 受压构件承载力计算.....	116
5.1 概述	116
5.2 轴心受压构件	117
5.3 偏心受压构件	122
小 结.....	138
思考题.....	139
习 题.....	139
第 6 章 受拉构件承载力计算.....	140
6.1 概述	140
6.2 轴心受拉构件承载力计算	140
6.3 偏心受拉构件承载力计算	141
小 结.....	147
思考题.....	148
习 题.....	148
第 7 章 受扭构件承载力计算.....	149
7.1 概述	149
7.2 纯扭构件承载力计算	149
7.3 剪扭和弯扭构件承载力计算	156
7.4 弯剪扭构件承载力计算	159
小 结.....	165
思考题.....	165
习 题.....	165
第 8 章 钢筋混凝土构件的变形和裂缝计算.....	166
8.1 受弯构件变形的计算	166
8.2 钢筋混凝土构件裂缝宽度的计算	175
小 结.....	180
思考题.....	180
习 题.....	180
第 9 章 预应力混凝土构件的计算.....	182
9.1 预应力混凝土的基本原理	182
9.2 预加应力的方法	183
9.3 预应力混凝土的材料	184
9.4 张拉控制应力	185

9.5 预应力损失及其组合	186
9.6 预应力混凝土轴心受拉构件的应力分析	193
9.7 预应力混凝土轴心受拉构件使用阶段的验算	200
9.8 预应力混凝土轴心受拉构件施工阶段的验算	204
小 结	210
思考题	211
习 题	211
第 10 章 现浇钢筋混凝土楼盖设计	212
10.1 概述	212
10.2 肋形楼盖的受力体系	213
10.3 单向板肋形楼盖的计算简图	214
10.4 钢筋混凝土连续梁内力计算	215
10.5 单向板的计算与构造	223
10.6 次梁的计算与构造	226
10.7 主梁的计算与构造	228
10.8 单向板楼盖计算例题	231
10.9 双向板的计算与构造	241
10.10 钢筋混凝土现浇楼梯的计算	254
小 结	262
思考题	262
习 题	263
附录 A 《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2002) 材料力学指标	264
附录 B 钢筋公称直径和截面面积	267
附录 C 《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2002) 有关规定	271
附录 D 等截面等跨连续梁在常用荷载作用下内力系数表	273
附录 E 混凝土结构构件计算程序索引	280
参考文献	281

第 1 章 绪 论

1.1 混凝土结构的概念

1.1.1 混凝土结构的分类及其应用范围

以混凝土为主制成的结构称为混凝土结构。它又分为以下三类：

1. 素混凝土结构

由无筋或不配置受力钢筋的混凝土制成的结构称为素混凝土结构。

2. 钢筋混凝土结构

由配置受力的普通钢筋、钢筋网或钢筋骨架的混凝土制成的结构称为钢筋混凝土结构。

3. 预应力混凝土结构

由配置受力的预应力钢筋通过张拉或其他方法建立预加应力的混凝土制成的结构称为预应力混凝土结构。

混凝土结构在土木建筑工程中应用十分广泛。例如，多层和高层民用建筑、单层和多层工业厂房、电视塔、桥梁、水工结构等大多采用钢筋混凝土结构或预应力混凝土结构。

1.1.2 混凝土结构配筋的作用

由建筑材料相关知识我们可以知道，混凝土的抗压强度是很高的，而其抗拉强度则很低。例如，强度等级为 C30 的混凝土，其轴心抗压强度设计值可达 14.3N/mm^2 ，而其轴心抗拉强度设计值为 1.43N/mm^2 ，后者仅为前者的 $1/10$ 。其他强度等级的混凝土，它们的轴心抗拉强度设计值与轴心抗压强度设计值之比为 $1/8 \sim 1/10$ 。

为了说明配筋在混凝土结构中的作用，现来观察混凝土梁的试验过程。图 1-1a 为素混凝土梁，图 1-1b 为配有 $2\phi 14$ 的钢筋混凝土梁。它们的其余条件相同：混凝土强度等级为 C20，截面尺寸 $b \times h = 120\text{mm} \times 180\text{mm}$ ，跨度为 2000mm ，跨中受集中荷载为 F 。

由试验可知，简支梁在集中荷载 F 作用下，两根梁在中性轴以上产生压应力，在中性轴以下产生拉应力。当梁的荷载 F 逐渐增加时，由于素混凝土梁抗拉强度低，混凝土开裂后，梁即宣告破坏，它的极限荷载仅为 8kN ；而钢筋混凝土梁受拉区混凝土开裂以后，受拉区混凝土退出工作，拉力完全由钢筋承受，随着梁的荷载 F 逐渐增加，当钢筋应力达到屈服强度和受压区混凝土达到极限应变时，梁才达到极限状态。它的极限荷载可达 45kN 。由此可见，混凝土梁在受拉区配置受拉钢筋，改变了素混凝土梁的破坏特征，极大地提高了梁的承载力和变形能力。

在钢筋混凝土梁中，受压区混凝土抵抗压力，受拉区钢筋抵抗拉力，所以，钢筋混凝土梁中的两种材料性能都能得到充分发挥，这正是钢筋混凝土梁的优点。

为了使钢筋混凝土梁两种材料共同工作，首先，要求钢筋与混凝土之间有足够的粘结

力，使两者不产生相对滑动；其次，要求钢筋与混凝土有比较一致的温度线膨胀系数 α_t ，当温度变化时，不会发生较大的相对变形而使共同工作遭到破坏。前一条件可通过采用带肋钢筋或光面钢筋加弯钩解决。后一条件，两种材料的温度线膨胀系数恰好接近，钢筋： $\alpha_t = 1.2 \times 10^{-5}/\text{C}^\circ$ ，混凝土： $\alpha_t = 1.0 \times 10^{-5}/\text{C}^\circ \sim 1.5 \times 10^{-5}/\text{C}^\circ$ 。这样，就保证了钢筋混凝土梁两种材料可以共同工作。

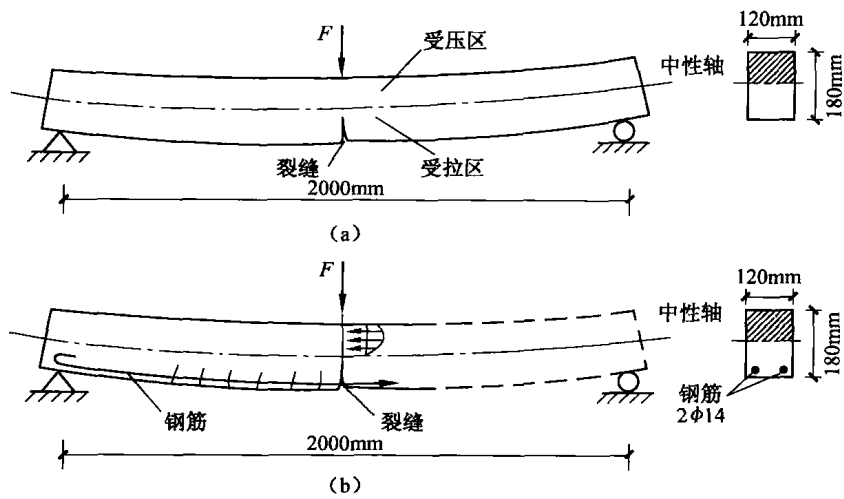


图 1-1 素混凝土梁和钢筋混凝土梁试验
(a) 素混凝土梁；(b) 钢筋混凝土梁

1.1.3 钢筋混凝土结构的优缺点

1. 钢筋混凝土结构的优点

(1) 强度较高

目前，我国生产的混凝土强度等级可达到 C80，即其立方体抗压强度 f_{cu} 可达到 $80\text{N}/\text{mm}^2$ ，普通钢筋的抗拉强度 f_y 则可达到 $400\text{N}/\text{mm}^2$ 。因此，钢筋混凝土的强度比砖、石的强度高得多。近代的一些高层建筑大都采用钢筋混凝土结构建造。

(2) 耐久性好

混凝土强度高，密实性好，钢筋配置在混凝土中，要有一定厚度的保护层加以保护。在正常情况下，不易锈蚀，维修费用很少，故钢筋混凝土结构的耐久性好。

(3) 可模性好

根据建筑和结构的需要，可浇筑成各种形状和尺寸的钢筋混凝土结构和构件。这将有利于建筑造型，同时也为选择合适的结构形式提供了可能性。

(4) 耐火性能好

钢筋混凝土为不燃烧体，以结构厚度或截面最小尺寸为 180mm 为例，其耐火极限可达 3.5h，比木结构和钢结构的耐火性能要好得多。

(5) 整体性好

现浇钢筋混凝土结构整体性好，其抗震性比砌体结构好得多，因此钢筋混凝土房屋可建得很高。由于其整体性很好，也有利于抵抗振动和冲击波的作用。

2. 钢筋混凝土结构的缺点

钢筋混凝土结构还存在一些缺点，如抗裂性能差，自重大，施工复杂，工序多等。这些

缺点可通过采用轻集料的高强混凝土和预应力混凝土结构等措施,在一定程度上得到克服。

1.2 混凝土结构发展简况

钢筋混凝土结构自 19 世纪中期开始应用,迄今已约 150 年了。它的发展可分以下几个阶段:

第一阶段:19 世纪 50 年代至 20 世纪 20 年代,是钢筋混凝土结构发展的初级阶段。由于生产技术的限制,这时混凝土和钢材的强度还都很低,钢筋混凝土多用于梁、板和柱等构件。钢筋混凝土结构计算理论尚未建立,构件截面承载力按材料力学公式计算。

第二阶段:20 世纪 20 年代至 20 世纪 50 年代,这一阶段初期至第二次世界大战爆发,开始应用装配式钢筋混凝土结构,出现了预应力混凝土结构和空间结构。钢筋混凝土结构计算开始采用破损阶段计算理论。第二次世界大战以后,混凝土强度和钢材的强度不断提高,钢筋混凝土结构有了很大发展,工业化施工方法广泛采用,结构计算开始采用三系数极限状态设计理论。

19 世纪末和 20 世纪初,我国也开始采用钢筋混凝土结构建造梁、板和柱等构件。但是,直到新中国成立前夕,钢筋混凝土结构发展十分缓慢,高层建筑寥寥无几。

随着我国社会主义建设事业的蓬勃发展,钢筋混凝土结构在工程建设中得到了广泛应用。

第三阶段:20 世纪 50 年代至 20 世纪 80 年代,这一阶段初期,我国工业蓬勃发展,兴建了大量单层工业厂房,装配式钢筋混凝土结构广泛采用。在砖混结构中,钢筋混凝土预制构件,如预应力圆孔板、进深梁等大量采用。这时,国内结构计算采用破损阶段计算理论。进入 20 世纪 80 年代,混凝土结构应用范围进一步扩大,预应力混凝土结构广泛采用,结构计算采用极限状态设计理论。

第四阶段:自 20 世纪 80 年代起进入第四阶段。随着我国改革开放进一步发展,城市建设进程加快,高层建筑如雨后春笋般拔地而起。城市有轨交通纵横交错,混凝土强度和钢材强度进一步提高,钢筋混凝土和预应力混凝土应用范围不断地扩大。这一时期结构设计理论进入了一个崭新的阶段,现行《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2002),充分反映了半个世纪以来丰富的结构设计经验及科学研究成果,规范中规定了以概率为基础的极限状态设计法进行设计,使钢筋混凝土计算理论和设计方法更加完善,也使我国混凝土结构设计理论达到了国际先进水平。

1.3 本课程特点及学习方法

《混凝土结构基本构件设计与计算》是高校土木工程专业的专业基础课程之一。主要讲述混凝土结构基本构件的受力性能、截面设计与计算和构造等基本理论。本课程有以下特点,学习时应加以注意:

1. 钢筋混凝土结构构件是由混凝土和钢筋两种材料组成的,它与材料力学所研究的均匀、连续、各向同性、弹性物体^①不同,而是非均匀、非连续、非各向同性、非弹性物体。

^① 符合这四个假定的物体称为理想弹性体。

因此，它的计算理论与理想的弹性体有很大的差别。例如，由于混凝土和钢筋的力学性能不同，构件中两者截面面积的比值小于或超过某一限值，将导致构件破坏形态发生改变。这是钢筋混凝土结构构件所独有的特点，学习时应当注意。

2. 钢筋混凝土结构构件的计算理论是建立在试验的基础上的。在学习过程中，要了解构件试验的全过程，包括试验方法、数据分析、试验结论、计算公式建立的理论依据和适用条件等。

3. 钢筋混凝土构件设计中，截面设计是一个很重要的设计问题。截面设计的步骤是：选择材料强度、截面尺寸，根据已知内力计算配筋。显然，截面设计的结果不是唯一的。这就要求我们根据已知条件进行综合分析，选择较优方案，通过设计提高分析问题和解决问题的能力。

4. 本课程的一些内容是根据国家标准和相关规范编写的，这些规范和标准包括：《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2002)、《建筑结构可靠度设计统一标准》(GB 50068—2001)、《建筑结构荷载规范》(GB 50009—2001)(2006 年版)和《建筑抗震设计规范》(GB 50011—2001)等。这些标准和规范反映了国家半个世纪以来建筑结构的设计经验及科研成果，是贯彻国家的技术经济政策、设计质量的保证，是结构设计、校核、审图及审批的依据。它是具有约束性和法律性的文件，特别是其中的强制性条文，必须严格执行。因此，在学习过程中要了解和正确运用这些标准和规范。

5. 本课程的另一特点是内容多、符号多、计算公式多、构造规定多。为了减轻学生们的课业负担，可以使用编程计算器对做过的习题进行验算，亦可直接计算习题。本教材提供了 31 个(含 8 个子程序)计算基本构件程序。书中每个例题除用手算外，还按编程计算器进行了演算，以便对照和比较。使用编程计算器解题，只需将已知数据输入编程计算器就可很快地得到中间结果和最后答案。若不需查阅中间结果，则可将程序中显示中间结果的显示符删除即可。

第 2 章 钢筋混凝土结构极限 状态设计算法

2.1 结构可靠度应用概率论简介

2.1.1 概率论基本术语

1. 随机现象和随机变量

对于具有多种可能发生的结果，究竟发生哪一结果不能事先肯定的现象称为随机现象。表示随机现象各种结果的变量称为随机变量。例如，作用在结构上的荷载、混凝土和钢筋的强度等，都是随机变量。

2. 随机事件

在概率论中，为了叙述方便起见，通常把一个科学试验或对某一事物的某一特征的观察统称为试验，而把每一可能的结果称为随机事件，简称事件。

3. 频率和概率

在试验中，事件 A 发生的次数 k (又称频数) 与试验的总次数 n 之比称为事件 A 发生的频率。

由试验和理论分析可知，当试验次数 n 相当大时，事件 A 出现的频率 $\frac{k}{n}$ 是很稳定的，即频率数值总是在某个常数 p 附近摆动。因此，可用常数 p 表示事件 A 出现的可能性的 大小，并把这个数值 p 称为事件 A 的概率，并记作 $P(A) = p$ 。

4. 频率密度直方图

下面通过工程实例说明密度直方图的用法及应用。

【例 2-1】为了分析某工程混凝土的抗压强度的波动规律性，在浇筑混凝土过程中，制做了 348 个试块并进行抗压强度试验，获得了一批试验数据，见表 2-1。试绘制该工程混凝土频率密度直方图。

表 2-1 混凝土立方体抗压强度分组统计表

组序号	分组强度 x (N/mm ²)	频数 k_i	频率 f_i^*	累积频率 Σf_i^*	频率密度 $p_i(x)$
1	17.0 ~ 18.0	1	0.003	0.003	0.003
2	>18.0 ~ 19.0	0	0	0.003	0
3	>19.0 ~ 20.0	1	0.003	0.006	0.003
4	>20.0 ~ 21.0	6	0.017	0.023	0.017
5	>21.0 ~ 22.0	3	0.009	0.032	0.009
6	>22.0 ~ 23.0	7	0.020	0.052	0.020
7	>23.0 ~ 24.0	10	0.029	0.080	0.029
8	>24.0 ~ 25.0	25	0.072	0.152	0.072
9	>25.0 ~ 26.0	33	0.095	0.247	0.095
10	>26.0 ~ 27.0	44	0.126	0.373	0.126
11	>27.0 ~ 28.0	57	0.164	0.537	0.164
12	>28.0 ~ 29.0	56	0.161	0.698	0.161

续表

组序号	分组强度 x (N/mm^2)	频数 k_i	频率 f_i^*	累积频率 Σf_i^*	频率密度 $p_i(x)$
13	>29.0 ~ 30.0	48	0.138	0.836	0.138
14	>30.0 ~ 31.0	28	0.080	0.917	0.080
15	>31.0 ~ 32.0	27	0.078	0.994	0.078
16	>32.0 ~ 33.0	2	0.006	1.000	0.006
总计	—	348	1.000		

【解】(1) 找出试验数据中最大值和最小值，并计算出它们的极差，即求出差值：

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 33.0 - 17.0 = 16.0 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

(2) 确定组距和组数

将数据从小到大分成若干组，组数可根据试验数多少而定，本例选择组距 $C = 1\text{N/mm}^2$ ，于是组数为

$$K = \frac{R}{C} = \frac{16.0}{1.0} = 16 \text{ (组)}$$

(3) 确定各组混凝土强度范围（即确定各组分点数值）

(4) 算出各组数据出现的频数 k_i

(5) 算出各组出现的频率

$$f_i^* = \frac{k_i}{n} \quad (2-1)$$

式中 n 为全部试验数据个数，本例中 $n = 348$ 。

(6) 算出累积频率

$$\Sigma f_i^* = \frac{1}{n} \Sigma k_i \quad (2-2)$$

(7) 计算各组频率密度，即各组频率与组距之比

$$f(x) = \frac{f_i^*}{C} \quad (2-3)$$

(8) 绘制频率密度直方图

绘直角坐标系，以横坐标表示混凝土抗压强度，以纵坐标表示频率密度。从各组强度分点绘出一系列高为各组频率密度的矩形（图 2-1），这个图形就是所要求的频率密度直方图（简称直方图）。

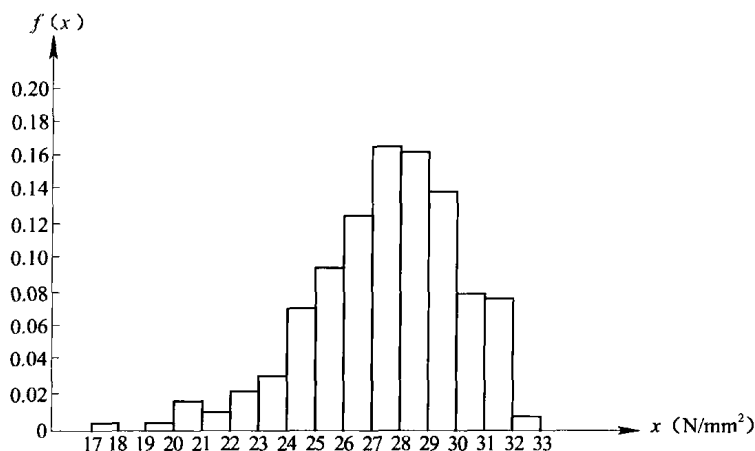


图 2-1 频率密度直方图

由直方图可以得出以下几点结论：

1) 直方图中任一矩形面积表示随机变量（混凝土强度） ξ 落在该区间（ x_i, x_{i+1} ）内的概率近似值。

因为直方图中每一矩形面积

$$P^*(x_i < \xi \leq x_{i+1}) = f(x)C = \frac{f_i^*}{C}C = f_i^* \quad (2-4)$$

等于随机变量 ξ 落在该区间（ x_i, x_{i+1} ）的频率，所以可以用来估计随机变量落在那个区间内的概率 $P(x_i < \xi \leq x_{i+1})$ 。

例如， ξ 落在第 5 组内的频率为第 5 组的矩形面积，于是

$$P(21 < \xi \leq 22) = 0.009$$

2) 直方图中各矩形面积之和等于 1。

因为

$$\sum_{i=1}^s f_i^* = \sum_{i=1}^s \frac{k_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s k_i$$

式中 k_i ——第 i 组的频数；

s ——试验数据分组数。

而

$$\sum_{i=1}^s k_i = n$$

所以

$$\sum_{i=1}^s f_i^* = 1 \quad (2-5)$$

3) 由直方图可求出随机变量 $\xi \leq x_{i+1}$ 的概率近似值。

显然

$$P(\xi \leq x_{i+1}) = \sum_{j=1}^i f_j^* \quad (2-6)$$

例如，若求混凝土强度 $x_{i+1} \leq 19 \text{ N/mm}^2$ 的概率近似值，则由式（2-6）可得

$$P(\xi \leq 19) = \sum_{j=1}^i f_j^* = 0.003 + 0 = 0.003$$

即混凝土强度小于和等于 19 N/mm^2 的概率近似值等于 0.3%。

5. 算术平均值、标准差和变异系数

(1) 算术平均值

算术平均值是最常用的平均值，又称为均值，用 μ 表示，即

$$\mu = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2-7)$$

(2) 标准差

算术平均值只能反映一组数据总的情况，但不能说明它们的分散程度，因此引入标准差的概念。它的表达式

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \quad (2-8a)$$

不难看出, σ 愈大, 这组数据愈分散, 即变异性 (相互不同的程度) 愈大; σ 愈小, 这组数据愈集中, 即变异性愈小。

为了简化计算, 式 (2-8a) 可写成

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2} \quad (2-8b)$$

应当指出, 只有当随机变量的试验数据较多时 (例如 $n \geq 30$), 按式 (2-8b) 计算随机变量总体标准差才是正确的, 这是因为随机变量总体试验数据较其部分数据分散程度大的缘故。为此, 当 $n < 30$ 时, 应将标准差公式 (2-8a) 予以修正。

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \quad (2-9a)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu^2}{n-1}} \quad (2-9b)$$

(3) 变异系数

标准差只能反映两组数据在同一平均值时的分散程度。因为标准差是有单位的量, 单位不同时不便比较数据的分散程度。为此, 提出变异系数的概念。它是标准差与算术平均值的比值。

$$\delta = \frac{\sigma}{\mu} \quad (2-10)$$

【例 2-2】表 2-2 为两批 (每批 10 根) 钢筋试件抗拉强度试验结果。试判断哪批钢筋质量较好。

表 2-2 试件抗拉强度 (N/mm^2)

批 号	试 件 号									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
第一批	1100	1200	1200	1250	1250	1250	1300	1300	1350	1400
第二批	900	1000	1200	1250	1250	1300	1350	1450	1450	1450

【解】(1) 计算两批钢筋抗拉强度平均值

经计算这两批钢筋抗拉强度平均值相同, 均为 $\mu = 1260 \text{ N/mm}^2$, 故可按它们的标准差大小来判断其质量的优劣。

(2) 分别计算它们的标准差

第一批钢筋

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 15940000$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\mu^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{15940000 - 10 \times 1260^2}{10-1}} = \sqrt{7111.11} = 84.33 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

第二批钢筋

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 16322500$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\mu^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{16322500 - 10 \times 1260^2}{10-1}} = \sqrt{49611.11} = 222.74 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

第一批钢筋的标准差小，即其抗拉强度离散性小，质量较好。

【例 2-3】已知一批混凝土试块的抗压强度标准差为 4N/mm^2 ，平均值 $\mu = 30\text{N/mm}^2$ ；钢筋试件抗拉强度标准差为 8N/mm^2 ，平均值 $\mu = 300\text{N/mm}^2$ 。试判断它们的离散性。

【解】(1) 计算混凝土的变异系数

$$\delta = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{4}{30} = 0.133 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

(2) 计算钢筋的变异系数

$$\delta = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{8}{300} = 0.027 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

由计算结果可知，混凝土的变异系数大于钢筋的值，故混凝土的离散性大。

2.1.2 概率密度函数、分布函数和特征值

1. 概率密度函数

我们知道，频率密度直方图是根据有限次的试验数据绘制的。不难设想，如果试验次数不断增加，分组愈来愈多，组距愈来愈小，则频率密度直方图顶部的折线就会变成一条连续、光滑的曲线。设它可以用函数 $f(x)$ 表示（图 2-2），这个函数就称为概率密度函数。

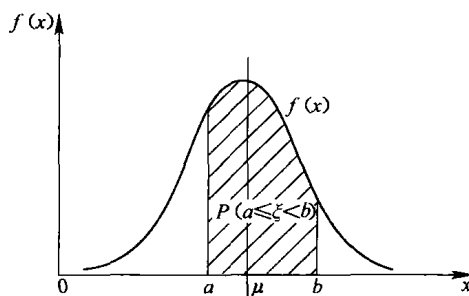


图 2-2 概率密度函数

显然，概率密度函数 $f(x)$ 有下列性质：

(1) 随机变量 ξ 在任一区间 (a, b) 内的概率等于在这个区间上曲线 $f(x)$ 下的曲边梯形面积，即：

$$P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad (2-11)$$

式中 ξ ——连续型随机变量；

$f(x)$ ——随机变量 ξ 的概率密度函数（又称分布密度函数），简称分布密度。

(2) 概率密度函数 $f(x)$ 为非负的函数，即 $f(x) \geq 0$ 。

(3) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上曲线 $f(x)$ 下的面积等于 1。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

(4) 随机变量 $\xi \leq x$ 的概率为：

$$P(\xi \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (2-12)$$