面向 十二五 高等教育课程改革项目研究成果

中央民族大学“211”工程三期
中国少数民族经济发展研究子项目：中国少数民族地区经济社会发展分析与预测研究

常微分方程与动力系统概论

贺小明　彭名书　主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

面向“十二五”高等教育课程改革项目研究成果

中央民族大学“211”工程三期

中国少数民族经济发展研究子项目：中国少数民族地区经济社会发展分析与预测研究

常微分方程与动力系统概论

An Introduction to Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems

主 编 贺小明 彭名书

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书侧重从应用的角度出发介绍常微分方程和动力系统的基本理论和方法，力求概念清晰，理论有据，方法实用，并将这些方法和微分方程建模、图像分析结合起来。本书首先简要介绍常微分方程一些基本理论和方法，为后面学习动力系统理论做铺垫；然后介绍了线性系统、自治系统中的非线性现象等动力系统的基本理论及应用，把常微分方程理论与动力系统的知识有机地融为一体。书中有大量的例题、习题，并辅以相图分析，图文并茂，便于读者理解。本书取材适当，难易适度，是一本很好的学习动力系统的入门书。

本书可作为高等学校数学系高年级及研究生教材或教学参考书，也可供物理、化学、生物等有关专业的科技工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程与动力系统概论/贺小明，彭名书主编．—北京：北京理工大学出版社，2010.9

ISBN 978-7-5640-3775-8

Ⅰ.①常…　Ⅱ.①贺…　②彭…　Ⅲ.①常微分方程-高等学校-教材②动力系统（数学）-高等学校-教材　Ⅳ.①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 173176 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010) 68914775（办公室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址／http：//www. bitpress. com. cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／三河市南阳印刷有限公司
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／12.5
字　　数／234 千字
版　　次／2010 年 9 月第 1 版　2010 年 9 月第 1 次印刷
印　　数／1～4000 册　　　　责任校对／王　丹
定　　价／23.00 元　　　　责任印制／边心超

序

常微分方程是研究动力系统的重要基础。目前，关于常微分方程和动力系统这两门学科的著作已有许多，例如，参考文献所列的［10，13，19］相当完整地介绍了动力系统的重要内容，但是它们一般结构庞大，起点高，对于在校的青年初学者，特别是研究生来说，不易入门，不利于他们更进一步地学习和研究。编写本书的目的是希望提供一本研究生的教材，既包括这一方面的基本内容，又包含这一领域的最新成果与方法，使研究生能够尽快地到达这一研究领域的前沿。

本书共分四章：第一章介绍常微分方程的基础性内容，重视通过应用来引进和深入诠释常微分方程的概念和解法，使读者十分顺利地进入该领域的学习；第二章介绍了线性系统非耦合性、可对角化，线性系统基本理论，如特征值问题、稳定性问题等；第三章介绍常微分方程中解的存在性、唯一性、连续性、解对初始条件的依赖性以及数值逼近等基本理论；第四章介绍自治系统中的非线性现象，如平衡点的稳定性，分岔及对参数的依赖性，二维自治方程的有关理论以及分岔等非线性问题。

本书内容精练，通俗易懂，言简意赅，论证严密，各部分自成体系。作者参阅了国内外同一主题的许多著作，吸收了各书之所长，相信读者阅读本书会从中受益。

本书的出版得到了中央民族大学理学院和国家自然科学基金（项目号：10971238）的资助，谨致谢意。书中的疏漏不当之处，敬请专家、读者批评指正。

编者

目　　录

第一章　一阶常微分方程

1.1　引言

宇宙间的很多规律都是用数学语言描述的. 代数能够充分地解决静态问题，但是在很多情况下，自然现象都包含着量的变化过程，而且常用相关变量的方程来模拟.

因为函数 f 的导数 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=f'(t)$ 反映了 $x=f(t)$ 随独立变量 t 的变化率（速度），因此很自然地用包含导数的方程描述变化着的宇宙世界. 我们把含有一个未知函数及它的一阶或者高阶导数的方程叫做常微分方程.

例 1　微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2+t^2$$

包含未知函数 $x(t)$ 和它的一阶导数 $x'(t)=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$；

微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+7y=0$$

包含关于独立变量 x 的未知函数 y 及其第一、第二阶导数 y' 和 y''.

研究微分方程主要有三个目标：

- 发现描述特定现实背景的微分方程；
- 寻找方程的精确解或者近似解；
- 诠释已经找到的解，指出其现实背景意义.

在代数里，通常要找到满足类似于方程 $x^3+7x^2-11x+41=0$ 的未知数 x，而在求解微分方程时，是找出满足微分方程的未知函数 $y=y(x)$，这比较有挑战性. 如求使恒等式 $y'(x)=2xy(x)$ 成立的函数 $y(x)$，也就是求使常微分方程

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=2xy \tag{1-1}$$

在某一实数区间上成立的未知函数. 通常，如果可能的话，需要找出方程的所有解.

例 2　如果 C 是一个常数，且

$$y(x)=C\mathrm{e}^{x^2}, \tag{1-2}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C(2x\mathrm{e}^{x^2})=2xy.$$

因此，形如式(1-2)的每一个函数 $y(x)$，对于所有的 $x\in\mathbf{R}$ 都满足方程(1-1)，因此

(1－2)也就是该方程的解．式(1－2)定义了方程(1－1)无穷组不同的解（实际上是含有一个参数的解族），一个任意选定的常数 C 对应一个解．运用后面讲的变量分离方法，可以证明微分方程(1－1)的每一个解都具有方程(1－2)的形式．

例 3 证明函数 $y(x)=2x^{1/2}-x^{1/2}\ln x$ 对于所有的 $x>0$ 均满足方程

$$4x^2y''+y=0. \tag{1-3}$$

解 首先求导数，得

$$y'(x)=-\frac{1}{2}x^{-1/2}\ln x \text{ 且 } y''(x)=\frac{1}{4}x^{-3/2}\ln x-\frac{1}{2}x^{-3/2}.$$

然后将其代入方程(1－3)的左边，得到

$$4x^2y''+y=4x^2\left(\frac{1}{4}x^{-3/2}\ln x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)+2x^{1/2}-x^{1/2}\ln x=0.$$

即对所有正数 x，均使得方程(1－3)成立．

一个微分方程的阶就是未知函数的最高阶导数的阶数．一个含有自变量 x 和未知函数，或者未知函数 $y=y(x)$ 的 n 阶导数的微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{1-4}$$

其中 F 是含有 $n+2$ 个变量的特定的或给定的实值函数．

称连续函数 $u=u(x)$ 为常微分方程(1－4)在区间 I 上的一个解，是指：函数 $u(x)$ 在 I 上存在导数 $u',u'',\cdots,u^{(n)}$，且对于所有的 $x\in I$，均使得

$$F(x,u,u',\cdots,u^{(n)})=0.$$

为了表述简洁，常说 $u=u(x)$ 在 I 上满足方程(1－4)．

注 1 回顾初等微积分知识，可以知道，常微分方程的解在开区间上连续，是方程有解的一个必要条件．这就是方程的解只能是连续函数的原因．

为了学习的方便，假定任何方程出现的高阶导数都能够显式地求出，即方程能写成如下的一般形式：

$$y^{(n)}=G(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}), \tag{1-5}$$

其中，G 是一个关于 $n+1$ 个变元的特定的实值函数．

到目前为止，所涉及的方程全是常微分方程，也就是未知函数只依赖一个自变量（一元函数）．如果因变量是含有两个或多个自变量的函数（多元函数），那么有可能涉及偏导数，如果是这样，该方程就称为偏微分方程．例如，一根均匀细长杆的温度函数 $u=u(x, t)$ 在点 x 和时刻 t(简单情形）满足偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中，k 为杆的热扩散常数．

1.1.1 初值问题

现在考虑如下的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y).\tag{1-6}$$

与应用有关的一个典型的数学模型是初值问题，其由形如式(1－6)的方程及初始条件 $y(x_0)=y_0$ 组成. 注意，不论是否有 $x_0=0$，均称 $y(x_0)=y_0$ 为初始条件. 而求解初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),y(x_0)=y_0\tag{1-7}$$

是指：找到一个可微分函数 $y=y(x)$，使得其在含有 x_0 的区间上同时满足上述两个条件.

1.1.2　通解/特解

如果函数 f 独立于因变量 y，一阶方程 $dy/dx=f(x,y)$ 的表现形式将特别简单，即

$$\frac{dy}{dx}=f(x).\tag{1-8}$$

在这个特例中，只需在方程(1－8)的两边积分就可得到

$$y(x)=\int f(x)dx+C.\tag{1-9}$$

式(1－9)称为方程的通解，是指：它含有一个任意常数 C，且对于每一个选定的常数 C，它是方程(1－8)的一个解. 如果 $G(x)$ 是 f 的一个原函数，也就是 $G'(x)=f(x)$，则

$$y(x)=G(x)+C.\tag{1-10}$$

为了满足初始条件 $y(x_0)=y_0$，只需将 $x=x_0$ 和 $y=y_0$ 代入方程(1－10)，得到 $y_0=G(x_0)+C$，因此 $C=y_0-G(x_0)$. 确定了 C 后，得到方程(1－8)满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的一个特解 $y(x)=G(x)-G(x_0)+y_0$.

以后，会发现这是一阶常微分方程的典型形式. 通常，需要找到一个包含任意常数 C 的通解，然后通过选择合适的常数 C，得到满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的一个特解.

1.1.3　自然增长与消失

常微分方程

$$dx/dt=kx,\tag{1-11}$$

可以用来模拟很多自然现象——某个量随时间变化的变化率和它当前的量成正比例关系. 比如：

人口增长　假定 $P(t)$ 是某个物种（人类，昆虫或者细菌）的个体数量，有稳定的出生率 β 和死亡率 δ(是指单位时间内个体的出生量或者死亡量). 则在一个较小的时间间隔 Δt 内，新生人口大致可近似为 $\beta P(t)\Delta t$，而死亡人口大致为

$\delta P(t)\Delta t$. 因此人口数量 $P(t)$ 的变化可近似地表示为

$$\Delta P \approx (\beta - \delta)P(t)\Delta t,$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta t} = kP,$$

其中，$k=\beta-\delta$.

复合利率 设 $A(t)$ 表示一个储蓄账户在时刻 t 的资金数，且假定利率是以年利率 r 逐年连续复利计算的（注：$r=0.10$ 表示 10% 的年利率）；连续复利表示在一小段时间 Δt 内增加到账户上的利息的总数将接近 $\Delta A = rA(t)\Delta t$，因此

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = rA.$$

药物消融 在许多实例中，$A(t)$ 表示溶液中某种药物的含量，通过测定药物超过自然水平的量得知药物的消减速度与当前药物的剩余量成正比，也就是

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\lambda A,$$

其中，$\lambda>0$（参数 λ 叫做药物的消减常数）.

自然增长方程 自然增长方程原型为 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=kx$，其中，$x(t)>0$；$k$ 是常数（正数或者是负数）. 经变量分离和积分得

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int k\mathrm{d}t;$$

$$\ln x = kt + C.$$

求解得

$$\mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}^{kt+C}; \quad x = x(t) = A\mathrm{e}^{kt}.$$

因为 C 是一个常数，所以 $A=\mathrm{e}^{C}$. 显然 $A=x(0)=x_0$. 因此方程(1－11)满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的特解为

$$x(t) = x_0\mathrm{e}^{kt}.$$

由于解(1－11)中存在指数函数，因此称该方程为指数增长方程或者是自然增长方程.

1.1.4 斜率场和解曲线

对于给定的常微分方程

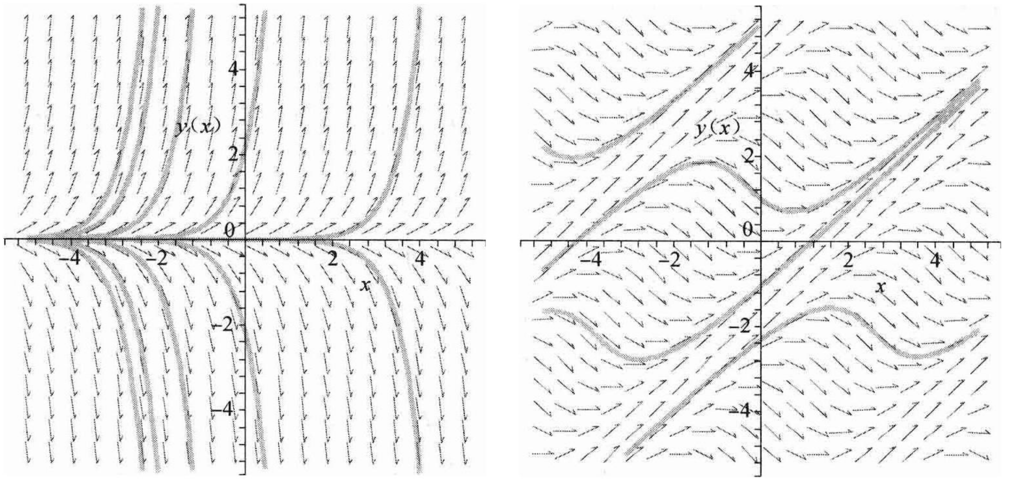
$$y' = f(x,y), \tag{1-12}$$

可以用一个简单的几何方法考虑方程的解. 对于 xy 平面上的每一个点 (x, y)，函数值 $f(x, y)$ 确定了一个斜率 $m=f(x, y)$. 微分方程的一个解实际上就是一个可微的函数 $y=y(x)$，其在每一点 $(x, y(x))$ 处都有这个斜率，即 $y'(x)=$

$f(x,\ y)$. 因此微分方程 $y'=f(x,\ y)$ 的解的曲线——方程解的曲线图形，实际上是平面上的一条曲线，在该曲线的每一点 $(x,\ y)$ 处的切线都有斜率 $m=f(x,\ y)$.

这种几何方法给出了构造微分方程 $y'=f(x,\ y)$ 的一种近似解的图形法，过平面上的代表集（二元函数 $f(x,\ y)$ 的定义域）上的每一点 $(x,\ y)$ 画一条短小线段，其斜率恰好为 $m=f(x,\ y)$. 所有这样的短小线段组成了方程 $y'=f(x,\ y)$ 的斜率场或方向场.

例如，图 1－1（a）给出了方程 $y'=2y$ 在原点（0，0）附近由计算机生成的斜率场及其四条解曲线，而图 1－1（b）给出了方程 $y'=\sin(x-y)$ 在原点（0，0）附近由计算机生成的斜率场及其解曲线.



（a）　　　　　　　　　　（b）

图 1－1　原点（0，0）附近方程

（a）$y'=2y$ 的斜率场与解曲线；（b）$y'=\sin(x-y)$ 的斜率场与解曲线.

1.1.5　局部存在唯一性定理

定理 1.1　考虑初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),y(x_0)=y_0. \tag{1-13}$$

假定函数 $f(x,\ y)$ 和它的偏导数 $D_y f(x,\ y)$ 在 xy 平面内的某一包含点 $(x_0,\ y_0)$ 的矩形区域 $\mathcal{R}$ 内连续，其中

$$\mathcal{R}=\left\{(x,y):\begin{matrix}|x-x_0|\leqslant A\\|y-y_0|\leqslant B\end{matrix}\right\},A>0,B>0.$$

则存在正数 $h\leqslant A$，使得初值问题(1－13)在区间 $I=(x_0-h,\ x_0+h)$（即 $|x-x_0|\leqslant h$）上有且只有一个解.

注 2　区间 I 可能是整个实数轴 $\mathbf{R}=(-\infty,\ +\infty)$. 例如，尽管根据定理

1.1，微分方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=-y$ 在某一个包含点 $x=a$ 的区间上存在解，但事实上，每一个解 $y(x)=be^{-(x-a)}$ 在整个 $\mathbf{R}$ 上都有定义.

注 3 解区间 I 有可能没有$\mathcal{R}$中给定的区间 $J=\{x:|x-x_0|\leqslant A\}$（实数轴 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 的一部分）那样宽，其中 f 和 $\partial f/\partial y$ 连续. 例如常微分方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=y^2$ 中，$f(x,y)=y^2$，$\partial f/\partial y=2y$. 这两个（二元）函数在平面上任一点处均连续，在矩形区域 $\{(x,y)\mid -2<x<2,\ 0<y<2\}$ 内也连续. 由于点（0，1）在矩形区域的内部，则根据定理 1.1 知，初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2,\quad y(0)=1 \tag{1-14}$$

在某一包含点 $x=0$ 的开区间上存在唯一的连续解. 事实上，这个解为

$$y(x)=\frac{1}{1-x},$$

该解在点 $x=1$ 处不连续. 因此，唯一连续的解在整个区间 $-2<x<2$ 上有可能不存在（见图 1－2）.

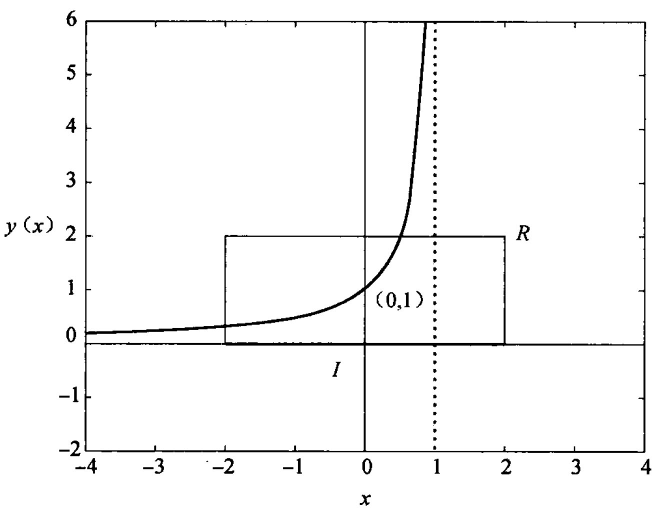


图 1－2　当过初始点（0，1）的解曲线到达区间［－2，2］的右端点时，曲线远离了长方形区域 R.

从几何上来说，在保证微分方程解存在的长方形区域上，在解曲线到达区间的两端点前，由定理所确定的解可能会越出长方形区域（图 1－2）.

1.1.6 进一步的讨论

例 4 考虑初值问题

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2y,\quad y(a)=b. \tag{1-15}$$

解 初值问题(1－15)

- 当 $a\neq 0$ 时在 (a, b) 附近有唯一的解；
- 当 $a=0$ 但 $b\neq 0$ 时，无解；
- 当 $a=b=0$ 时，有无穷多解.

进一步讨论初值问题(1－15)．考虑一个特殊的远离 y 轴的初始点 $(-1, 1)$，由图 1－3 知，过点 $(-1, 1)$ 有无穷多条解曲线．事实上，对于任意给定的常数 C，函数

$$y(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ Cx^2, & x>0,\end{cases} \tag{1-16}$$

连续且满足初值问题

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2y,\quad y(-1)=1. \tag{1-17}$$

对于任意给定的值 C，由式(1－16)定义的解曲线的左半部分为抛物线 $y=x^2$，而右半部分为抛物线 $y=Cx^2$．因此在点 $(-1, 1)$ 附近的唯一解经过原点后分成许多条解曲线（见图 1－3）．

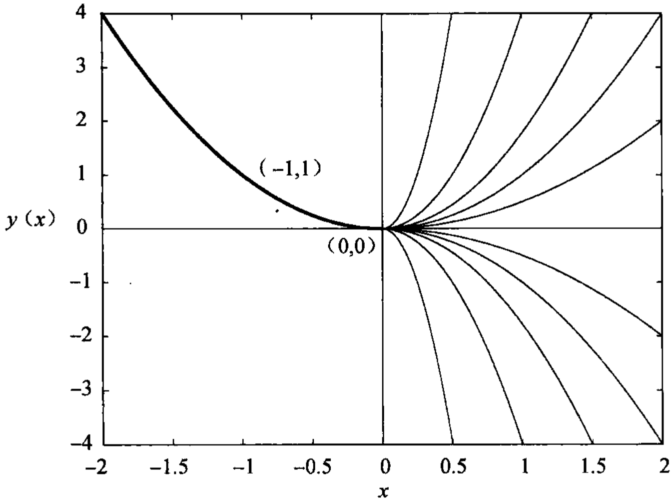


图 1－3　过点 $(-1, 1)$ 的无穷多条解曲线

由上述讨论可知，定理 1.1（如果假定的条件能够成立）保证了解在初始点 (a, b) 处的唯一性，但是过点 (a, b) 的解曲线有可能最终在其他地方分岔，从而不再有唯一性，因此解可能存在于一个比满足唯一性条件的区间更大的区间上．例如初值问题(1－17)的解（曲线）$y(x)=x^2$ 在整个 x 轴上存在，但这个解的唯一性只在负半轴 $(-\infty<x<0)$ 上成立.

n 阶微分方程的初值问题一般表示形式为

$$\begin{cases}x^{(n)}=F(t,x,x',\cdots,x^{(n-1)}),\\ x(t_0)=x_0,x'(t_0)=x_1,\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=x_n.\end{cases} \tag{1-18}$$

需要讨论如下的问题：函数 F 满足什么条件时初值问题(1－18)的解存在，或者更进一步，若存在是否唯一？这是常微分理论中一个基本的问题，将在第三章对其进行讨论，并对 $n=1$ 的情形证得：只要 F 连续，则初值问题(1－18)的解存在，并可添加某些条件，证明解的唯一性.

一般地，一个 n 阶微分方程的通解包含 n 个独立的任意常数. 反之，对于一个(关于自变量 t) n 次可微，而且包含 n 个独立的参数（任意常数）$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的函数族，存在一个形如式(1－4)的 n 阶微分方程，使得该函数族恰好是它的通解.

1.2 可分离变量方程

1.2.1 可分离变量方程的定义与求解

称一阶方程

$$\frac{dy}{dx} = H(x,y) \tag{1-19}$$

为变量可分离的，是指 $H(x, y)$ 能够写成一个 x 的函数与 y 的函数的乘积，即

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) = \frac{g(x)}{f(y)},$$

其中，$h(y) = 1/f(y) \neq 0$. 在该情形下，x 和 y 可分离——可以孤立地放在方程的两边，即

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx,$$

这样，可得到如下简洁的微分方程

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x).$$

对方程两边关于 x 进行积分，容易求出这种特殊形式的方程

$$\int f(y(x))\frac{dy}{dx}dx = \int g(x)\,dx + C, \tag{1-20}$$

或

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C. \tag{1-21}$$

接下来只需求原函数

$$F(y) = \int f(y)\,dy, G(x) = \int g(x)\,dx.$$

方程(1－20)和方程(1－21)的等价性是基于下面的链式法则得到的结果，

$$Dx[F(y(x))] = f'(y(x))y'(x) = f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) = Dx[G(x)].$$

根据两个函数的导数相同的条件：当且仅当这两个函数只差一个常数时，有

$$F(y(x)) = G(x) + C. \tag{1-22}$$

注　对于式(1 -22)，可能很难将 y 显式地表示为 x 的函数. 如果确实不能显式地表示出 y，则称式(1 -22)为方程(1 -20)的一个**隐式解**.

例 1　求解初值问题

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4-2x}{3y^2-5}. \tag{1-23}$$

解　将变量分离且在方程两边积分，得到

$$\int(3y^2-5)\,dy=\int(4-2x)\,dx;$$

$$y^3-5y=4x-x^2+C.$$

由这个方程不能显式地解出函数 $y(x)$. 有关方程(1 -23)的斜率场与解曲线见图 1 -4.

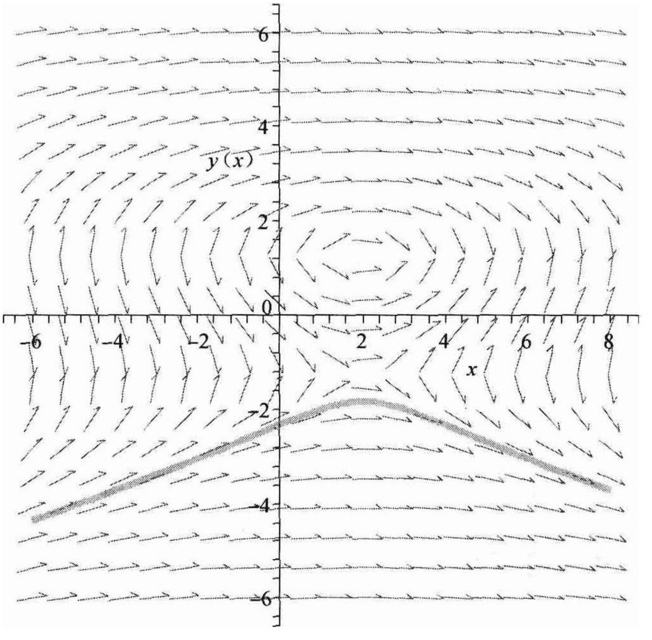


图 1 -4　方程（1 -23）的斜率场和解曲线

例 2　求解初值问题

$$\frac{dy}{dx}=-6xy,y(0)=-5. \tag{1-24}$$

解　在方程两边同时除以 y 再乘以 dx，得到

$$\frac{dy}{y}=-6x\,dx.$$

因而

$$\int\frac{dy}{y}=\int(-6x)\,dx;$$

$$\ln|y|=-3x^2+C.$$

由初始条件 $y(0)=-5$ 知，$y(x)$ 在 $x=0$ 附近为负数，去掉绝对值符号，有

$$\ln(-y)=-3x^2+C,$$

因此

$$y(x)=-e^{-3x^2+C}=-e^{-3x^2}e^C=Ae^{-3x^2},$$

其中 $A=-e^C$. 由初始条件 $y(0)=-5$ 得 $A=-5$，因而所求特解（见图 1-5 中解曲线）为

$$y(x)=-5e^{-3x^2}.$$

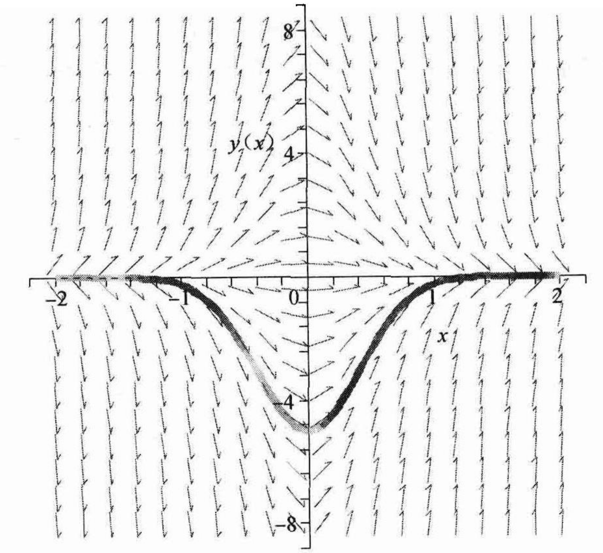


图 1-5　方程(1-24) 的斜率场和解曲线

1.2.2　隐式解与奇解

一般地，称式 $K(x,\ y)=0$ 为方程(1-19)的隐式解，是指它在某一区间上满足方程. 但请注意，由 $K(x,\ y)=0$ 确定的某个特解 $y=y(x)$ 可能满足也可能不满足给定的初始条件. 例如，对 $x^2+y^2=4$ 求微分得

$$x+y\frac{dy}{dx}=0,$$

因此 $x^2+y^2=4$ 是方程 $x+yy'=0$ 的一个隐式解. 但是下面的这两个显式解

$$y(x)=\sqrt{4-x^2},y(x)=-\sqrt{4-x^2}$$

中，仅第一个满足初始条件 $y(0)=2$（参见图 1-6).

注意　尽管一开始假定在微分方程

$$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y), \tag{1-25}$$

两边除以 $h(y)$ 就可得到变量分离方程