

高等学校数学教材配套辅导书

高等数学辅导

同济·高等数学

(上下册合订本配套用书)

主 编 北京大学数学科学学院
邹本腾 漆毅 王奕倩
总策划 胡东华



科学技术文献出版社

高等数学辅导

同济·高等数学

(上下册合订本配套用书)

主 编 北京大学数学科学学院
邹本腾 漆毅 王奕倩
总策划 胡左华

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

B821-49/S709/

B821-L170

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/邹本腾等主编.-北京:科学技术文献出版社,1999.6

ISBN 7-5023-3298-7

I. 高… II. 邹… III. 高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 09978 号

出 版 者:科学技术文献出版社

图 书 发 行 部:北京市复兴路 15 号(公主坟)中国科学技术信息研究所
大楼 B 段/100038

图 书 编 务 部:北京市西苑南一院 8 号楼(颐和园西苑公汽站)/100091

邮 购 部 电 话:(010)68515544-2953

图 书 编 务 部 电 话:(010)62878310, (010)62877791, (010)62877789

图 书 发 行 部 电 话:(010)68515544-2945, (010)68514035, (010)68514009

门 市 部 电 话:(010)68515544-2172

图 书 发 行 部 传 真:(010)68514035

图 书 编 务 部 传 真:(010)62878317

E-mail: stdph@istic. ac. cn

策 划 编 辑:王清富

责 任 编 辑:郭吴昊

责 任 校 对:李新之

责 任 出 版:李雅红

封 面 设 计:胡东华

发 行 者:科学技术文献出版社发行 新华书店总店北京发行所经销

印 刷 者:中国农业出版社印刷厂

版 (印) 次:1999 年 6 月第 1 版 1999 年 6 月第 1 次印刷

开 本:850×1168 大 32 开

字 数:550 千字

印 张:22:06

定 价:22 元

© 版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

盗版举报电话:(010)62878310(出版者), (010)62534708(著作权者)

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书是与高等院校数学教材紧密结合的辅导教材,是高等工科院校不同专业的学生不可缺少的学习资料。

书中侧重对基础知识的详解与分析,旨在帮助考生练就扎实的基本功,以便在解题过程中融汇贯通。另外,本书还对重点、难点进行具体分析,对考试内容进行概括总结,以帮助考生理解记忆,达到复习的综合性、整体性,培养较强的“应试思维”、“应试能力”。

声明:本书封面及封底均采用专用图标(见右图),该图标已由国家商标局注册受理登记,未经本策划人同意禁止其他单位使用。



科学技术文献出版社
向广大读者致意

科学技术文献出版社成立于1973年,国家科学技术部主管,主要出版科技政策、科技管理、信息科学、农业、医学、电子技术、实用技术、培训教材、教辅读物等图书。

我们的所有努力,都是为了使您增长知识和才干。

前 言

高等数学在各个学科领域中的重要性是有目共睹的。但现在一个越来越突出的矛盾却摆在我们的面前：其一是学生课内、外时间的减少；其二是各科后续专业课及考研对高等数学的要求越来越高。如何解决这一矛盾，成为教和学双方共同面临的一个问题。

这本书正是为解决这一问题而精心编写的。在每一节的开头，我们用表格的形式分类列出这一节的主要内容，节省了读者做同样工作的时间。这一创意是在胡东华老师的直接指导下完成的，在同类书中尚属首例。对于例题，作者按分类的方式编排，把各种解题的技巧、方法、思路详细介绍给读者。并加了大量的注解，把容易出现的问题指出来，使读者少走弯路。其中加*号的内容较难，读者可根据需要自行选择。另外，每章都有一份提纲挈领的知识网络图，还附有最近几年考研真题评析，使读者对研究生入学考试的高等数学题的形式、难度有一定的了解，也便于考研的读者有针对性地复习。最后是同步自测题及答案。

在编写过程中，主编鄂本腾及总策划胡东华做了大量组织编写及体例策划工作，特此致谢！由于编者水平有限，时间又仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评、指正。

编者

1999年5月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
§ 1.1 函数	(1)
§ 1.2 极限	(13)
§ 1.3 函数的连续性	(28)
§ 1.4 无穷小量	(45)
本章知识网络图	(50)
历届考研真题评析	(51)
同步自测题	(55)
同步自测题参考答案	(56)
第二章 导数、微分及其应用	(63)
§ 2.1 导数	(63)
§ 2.2 微分与高阶导数	(82)
§ 2.3 导数的应用	(90)
本章知识网络图	(139)
历届考研真题评析	(140)
同步自测题	(150)
同步自测题参考答案	(153)
第三章 不定积分	(172)
本章知识网络图	(195)
历届考研真题评析	(196)
同步自测题	(199)
同步自测题参考答案	(199)
第四章 定积分及其应用	(203)
§ 4.1 定积分的定义与积分方法	(203)
§ 4.2 定积分的应用	(237)
§ 4.3 广义积分	(255)
本章知识网络图	(272)
历届考研真题评析	(273)

同步自测题	(282)
同步自测题参考答案	(284)
第五章 级数	(299)
§ 5.1 数值级数	(299)
§ 5.2 函数项级数	(324)
§ 5.3 幂级数	(333)
§ 5.4 傅立叶级数	(353)
本章知识网络图	(365)
历届考研真题评析	(366)
同步自测题	(370)
同步自测题参考答案	(371)
第六章 空间解析几何	(379)
§ 6.1 向量代数	(379)
§ 6.2 平面和直线	(401)
§ 6.3 空间曲面和曲线	(425)
本章知识网络图	(440)
历届考研真题评析	(441)
同步自测题	(444)
同步自测题参考答案	(445)
第七章 多元函数及其微分学	(446)
§ 7.1 多元函数的极限与连续性	(446)
§ 7.2 偏导数、全微分与微分法	(457)
§ 7.3 多元函数微分学的应用	(472)
本章知识网络图	(482)
历届考研真题评析	(483)
同步自测题	(486)
同步自测题参考答案	(487)
第八章 重积分	(491)
§ 8.1 二重积分	(491)
§ 8.2 三重积分	(513)
§ 8.3 重积分的应用	(528)

本章知识网络图	(534)
历届考研真题评析	(535)
同步自测题	(538)
同步自测题参考答案	(542)
第九章 曲线积分、曲面积分及场论初步	(563)
§ 9.1 第一型曲线积分与第二型曲线积分	(563)
§ 9.2 Green 公式、平面上曲线积分与路径无关的条件	(579)
§ 9.3 曲面积分	(587)
§ 9.4 Gauss 公式与 Stokes 公式及其应用	(599)
§ 9.5 场论初步	(608)
本章知识网络图	(614)
历届考研真题评析	(615)
同步自测题	(621)
同步自测题参考答案	(624)
第十章 常微分方程	(640)
§ 10.1 基本概念	(640)
§ 10.2 初等积分法(I)	(643)
§ 10.3 初等积分法(II)	(654)
§ 10.4 二阶线性微分方程	(663)
§ 10.5 一阶常系数线性微分方程组	(672)
本章知识网络图	(683)
历届考研真题评析	(684)
同步自测题	(692)
同步自测题参考答案	(693)

第一章 函数与极限

在这一章里,我们首先简单复习一下函数的定义、性质和几个常用的初等函数。然后研究序列、函数的极限,这其中包括它们几种情况下的不同定义形式和例题。最后我们讨论函数的连续性,以及如何利用函数的连续性的一些性质证明一些命题。

§ 1.1 函数

1.1.1 考试内容及理解记忆方法

表 1.1.1 函数及相关的定义

名称	定 义	要点	补充说明
函数	给定集合 X , 若存在某种对应规则 f , 对于 $\forall x \in X$, 存在唯一 $y \in R$ 与之对应, 称 f 是从 X 到 R 的一个函数, 记作 $y = f(x)$; X 称为定义域, x 称为自变量, y 为因变量。 $\{f(x) x \in X\}$ 为值域	对应规则、定义域	
函数的图形	平面上点集 $\{(x, f(x)) x \in X\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图形		并非所有的函数都有图形。 例如:狄雷克莱函数 $D(x) = \begin{cases} 1, x \text{ 为有理数} \\ 0, x \text{ 为无理数, 没有图形} \end{cases}$

续表 1.1.1

名称	定义	要点	补充说明
复合函数	<p>设函数 $y = f(u)$ 的定义域包含 $u = g(x)$ 的值域, 则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y = f[g(x)]$, 称 g 与 f 的复合函数。记作 $y = f[g(x)]$ 或 $y = f \circ y$</p>	<p>对应规则、定义域、值域</p>	<p>结合律成立 $f[g(h)] = f \circ (g \circ h)$, 但没有交换律, 即 $f \circ g \neq g \circ f$</p>
一一对应	<p>设 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 若由 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, 或者由 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上是一一对应的</p>		<p>一一对应的函数把不同的 x 变成不同的 y</p>
反函数	<p>设 $y = f(x)$ 在 X 上是一一对应的, 值域为 $Y, \forall y \in Y$, 用满足 $f(x) = y$ 的唯一确定的 $x \in X$ 与之对应, 由这样的关系所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 就称为原来函数 $y = f(x)$ 的反函数</p>		<p> $f: X \rightarrow Y;$ $f^{-1}: Y \rightarrow X;$ $f^{-1}(f) = I_X: X \rightarrow X;$ $f \circ f^{-1} = I_Y: Y \rightarrow Y;$ $(f^{-1})^{-1} = f: X \rightarrow X;$ I_X 表 X 上恒同变换。 </p>
初等函数	<p>基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算后所得到的函数</p>	<p>有限次复合</p>	

表 1.1.2 函数的几种特性

性质	定 义	图例或说明
奇偶性	奇函数 函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $x, -x \in X$, 且 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数	
	偶函数 函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $x, -x \in X$, 且 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数	
单调性	单调上升(单调递增) 函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	
	单调下降(单调递减) 函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	
若严格不等号成立, 则称严格单调上升(下降)		

续表 1.1.2

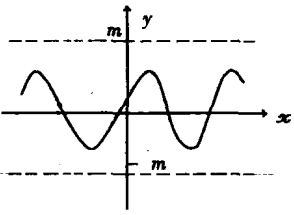
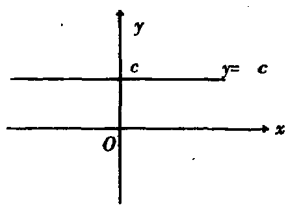
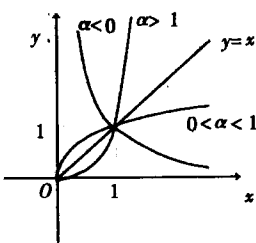
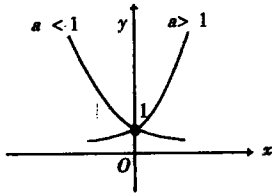
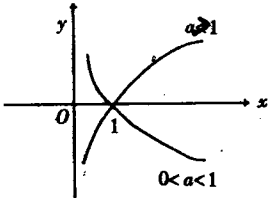
性质	定义	图例或说明
有界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, 若 $\exists M > 0, \forall x \in X$, 有 $ f(x) \leq M$. (或 $\exists m, M$, 使得 $m \leq f(x) \leq M$ 成立), 则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界函数	 <p>即函数的图形位于 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间</p>
无界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, 若 $\forall M > 0, \exists x' \in X$, 使得 $ f(x') > M$, 则称 $f(x)$ 在 X 上无界	例: $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界, 因为 $\forall M > 0$, 取 $x' = \frac{1}{3M}$, 则 $f(x') = 3M > M$
周期性	函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义, 若 $\exists T > 0, \forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数. 若在无穷多个周期中, 有最小的正数 T , 则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的最小周期, 简称周期	若 T 是 $f(x)$ 的周期, 则 1° $f(x+kT) = f(x)$, (k 为整数); 2° $f(ax+b)$ ($a \neq 0, b \in \mathbb{R}$) 是一个以 $\left \frac{T}{a} \right $ 为周期的函数

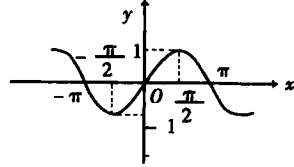
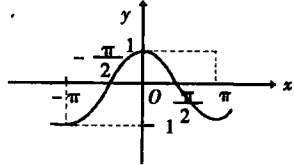
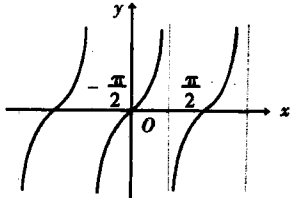
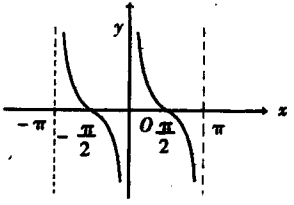
表 1.1.3 基本初等函数

名称	定义式及性质	图例
常数函数	$y(x) = C, (-\infty < x < +\infty)$. 平行于 x 轴, 过 $(0, C)$ 点的直线	

续表 1.1.3

名称	定义式及性质	图例
幂函数	$y = x^\alpha, (0 < x < +\infty, \alpha \neq 0)$ $\alpha > 0$ 时, 函数 x^α 在 $(0, +\infty)$ 上严格上升 $\alpha < 0$ 时, 函数 x^α 在 $(0, +\infty)$ 上严格下降 $y = x^\alpha$ 与 $y = x^{\frac{1}{\alpha}}$ 互为反函数	
指数函数	$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ $a > 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格上升 $a < 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格下降	
对数函数	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1, 0 < x < +\infty)$ $a > 1$ 时, 函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格上升 $a < 1$ 时, 函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格下降 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 互为反函数。(若 $a = e$, 记 $y = \log_e x$ 为 $y = \ln x$)	

续表 1.1.3

名称	定义式及性质	图例
三 函 角 数	正弦函数 $y = \sin x, (-\infty < x < +\infty)$	
	余弦函数 $y = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x), (-\infty < x < +\infty)$	
	正切函数 $y = \tan x (x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$	
	余切函数 $y = \cot x (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$	

续表 1.1.3

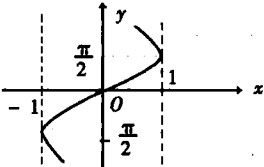
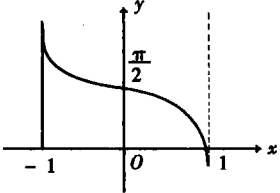
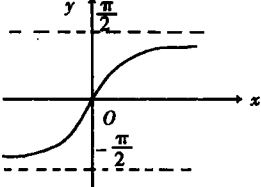
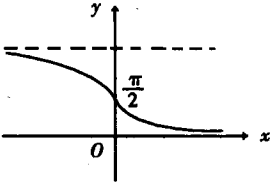
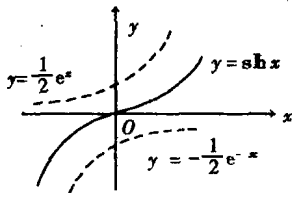
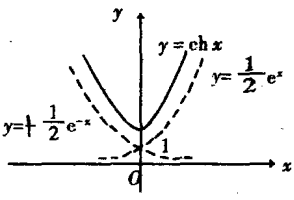
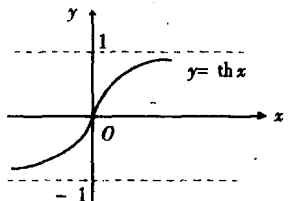
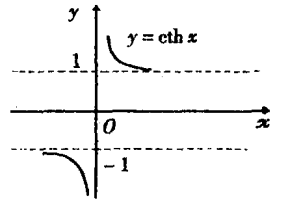
名称	定义式及性质	图例
反三角 函数	反正弦函数 $y = \arcsin x$, $(-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$	
	反余弦函数 $y = \arccos x$, $(-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi)$	
	反正切函数 $y = \arctan x$, $(-\infty < x < +\infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$	
	反余切函数 $y = \text{arccot} x$, $(-\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi)$	

表 1.1.4 双曲函数

名称	定 义	图 形
双曲正弦	$y = \operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	
双曲余弦	$y = \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	
双曲正切	$y = \operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$	
双曲余切	$y = \operatorname{cth}x = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$	

1.1.2 典型例题解析

例1 求 $f(x) = \arcsin \frac{3x}{1+x}$ 的定义域。

解: 由反三角函数的定义域要求可得

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{3x}{1+x} \leq 1, \\ 1+x \neq 0, \end{cases}$$

解上面的不等式组可得 $\begin{cases} -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ x \neq -1, \end{cases} \Rightarrow f(x)$ 的定义域为 $-\frac{1}{4} \leq$

$x \leq \frac{1}{2}$ (或表示成 $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$)。

例2 求 $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{\cos x}$ 的定义域。

解: 只有 $\sqrt{4-x^2}$, $\lg \cos x$ 同时有意义, 且分母不为0的 x 才是 $f(x)$ 的定义域, 即

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0, \\ \cos x > 0, \\ \cos x \neq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ 2n\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2}, (n = 0, \pm 1 \dots) \\ x \neq n\pi \end{cases}$$

上述不等式组的解为 $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$, 因此 $f(x)$ 的定义域为 $[-\frac{\pi}{2},$

$0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ 。

例3 设 $f(x) = \begin{cases} x^3 + 4x + 1, & \text{当 } x \geq 1 \text{ 时,} \\ x + 2, & \text{当 } x < 1 \text{ 时.} \end{cases}$ 求 $f(x+4)$ 。

解: 把 $f(x+4)$ 中, $x+4$ 作为自变量, 代入到 $f(x)$ 的定义式中自变量 x 的位置, 再考查各分段定义域上新的 x 应满足的条件。当 $x+4 \geq 1$ 时, 也即 $x \geq -3$; 同理, 当 $x+4 < 1$ 时, $x < -3$ 。

因此, 我们有

$$f(x+4) = \begin{cases} (x+4)^3 + 4(x+4) + 1, & \text{当 } x \geq -3 \text{ 时,} \\ (x+4) + 2 = x + 6, & \text{当 } x < -3 \text{ 时.} \end{cases}$$

例题