高等学校数学教材配套辅导书

高等数学辅导

同济·高等数学

（上下册合订本配套用书）

主　编　北京大学数学科学学院
邹本腾　漆　毅　王奕倩
总策划　胡东华

科学技术文献出版社

高等数学辅导

同济·高等数学

（上下册合订本配套用书）

主　编　北京大学数学科学学院
邹本腾　漆　毅　王奕倩
总策划　胡东华

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/邹本腾等主编.-北京:科学技术文献
出版社,1999.6
ISBN 7-5023-3298-7
Ⅰ.高… Ⅱ.邹… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资
料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 09978 号

出　　版　　者:科学技术文献出版社
图 书 发 行 部:北京市复兴路 15 号(公主坟)中国科学技术信息研究所
大楼 B 段/100038
图 书 编 务 部:北京市西苑南一院 8 号楼(颐和园西苑公汽站)/100091
邮 购 部 电 话:(010)68515544-2953
图书编务部电话:(010)62878310,(010)62877791,(010)62877789
图书发行部电话:(010)68515544-2945,(010)68514035,(010)68514009
门 市 部 电 话:(010)68515544-2172
图书发行部传真:(010)68514035
图书编务部传真:(010)62878317
E-mail:stdph@istic.ac.cn
策 划 编 辑:王清富
责 任 编 辑:郭吴昊
责 任 校 对:李新之
责 任 出 版:李雅红
封 面 设 计:胡东华
发　　行　　者:科学技术文献出版社发行　新华书店总店北京发行所经销
印　　刷　　者:中国农业出版社印刷厂
版 (印) 次:1999 年 6 月第 1 版　1999 年 6 月第 1 次印刷
开　　　　　本:850×1168　大 32 开
字　　　　　数:550 千字
印　　　　　张:22:06
定　　　　　价:22 元

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书是与高等院校数学教材紧密结合的辅导教材，是高等工科院校不同专业的学生不可缺少的学习资料。

书中侧重对基础知识的详解与分析，旨在帮助考生练就扎实的基本功，以便在解题过程中融汇贯通。另外，本书还对重点、难点进行具体分析，对考试内容进行概括总结，以帮助考生理解记忆，达到复习的综合性、整体性，培养较强的“应试思维”、“应试能力”。

前　言

高等数学在各个学科领域中的重要性是有目共睹的。但现在一个越来越突出的矛盾却摆在我们的面前：其一是学生课内、外时间的减少；其二是各科后续专业课及考研对高等数学的要求越来越高。如何解决这一矛盾，成为教和学双方共同面临的一个问题。

这本书正是为解决这一问题而精心编写的。在每一节的开头，我们用表格的形式分类列出这一节的主要内容，节省了读者做同样工作的时间。这一创意是在胡东华老师的直接指导下完成的，在同类书中尚属首例。对于例题，作者按分类的方式编排，把各种解题的技巧、方法、思路详细介绍给读者。并加了大量的注解，把容易出现的问题指出来，使读者少走弯路。其中加 * 号的内容较难，读者可根据需要自行选择。另外，每章都有一份提纲挈领的知识网络图，还附有最近几年考研真题评析，使读者对研究生入学考试的高等数学题的形式、难度有一定的了解，也便于考研的读者有针对性地复习。最后是同步自测题及答案。

在编写过程中，主编邹本腾及总策划胡东华做了大量组织编写及体例策划工作，特此致谢！由于编者水平有限，时间又仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评、指正。

编者

1999 年 5 月

目　录

第一章　函数与极限

在这一章里，我们首先简单复习一下函数的定义、性质和几个常用的初等函数。然后研究序列、函数的极限，这其中包括它们几种情况下的不同定义形式和例题。最后我们讨论函数的连续性，以及如何利用函数的连续性的一些性质证明一些命题。

§1.1　函数

1.1.1　考试内容及理解记忆方法

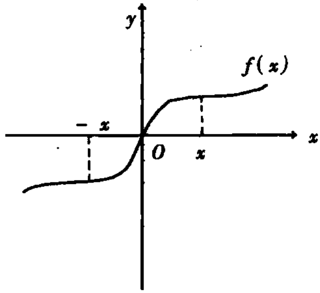
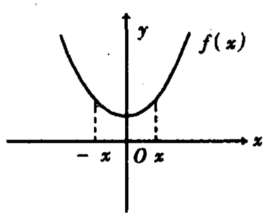
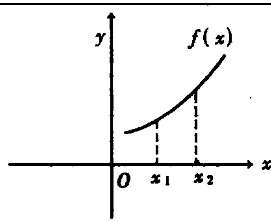
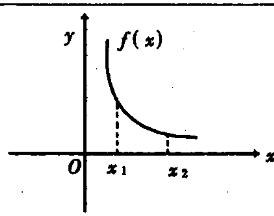
表 1.1.1 函数及相关的定义

名称	定　　义	要点	补充说明
函数	给定集合 X，若存在某种对应规则 f，对于 $\forall x\in X$，存在唯一 $y\in R$ 与之对应，称 f 是从 X 到 R 的一个函数，记作 $y=f(x)$；X 称为定义域，x 称为自变量，y 为因变量。$\{f(x)\mid x\in X\}$ 为值域	对应规则、定义域	
函数的图形	平面上点集 $\{(x,f(x))\mid x\in X\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图形		并非所有的函数都有图形。例如：狄雷克莱函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$，没有图形

续表 1.1.1

名称	定　　义	要点	补充说明
复合函数	设函数 $y=f(u)$ 的定义域包含 $u=g(x)$ 的值域，则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y=f[g(x)]$，称 g 与 f 的复合函数。记作 $y=f[g(x)]$ 或 $y=f\circ y$	对应规则、定义域，值域	结合律成立 $f[g(h)]=f\circ(g\circ h)$，但没有交换律，即 $f\circ g\neq g\circ f$
一一对应	设 $f(x)$ 在 X 上定义，$\forall x_1,x_2\in X$，若由 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$，或者由 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上是一一对应的		一一对应的函数把不同的 x 变成不同的 y
反函数	设 $y=f(x)$ 在 X 上是一一对应的，值域为 Y，$\forall y\in Y$，用满足 $f(x)=y$ 的唯一确定的 $x\in X$ 与之对应，由这样的关系所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 就称为原来函数 $y=f(x)$ 的反函数		$f:X\to Y$； $f^{-1}:Y\to X$； $f^{-1}(f)=I_X:X\to X$； $f\circ f^{-1}=I_Y:Y\to Y$； $(f^{-1})^{-1}=f:X\to X$； I_X 表 X 上恒同变换。
初等函数	基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算后所得到的函数	有限次复合	

表 1.1.2 函数的几种特性

性质	定	义	图例或说明
奇偶性	奇函数	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，x，$-x \in X$，且 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数	
	偶函数	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，x，$-x \in X$，且 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数	
单调性	单调上升(单调递增)	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，$\forall x_1, x_2 \in X$，由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$	
	单调下降(单调递减)	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，$\forall x_1, x_2 \in X$，由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$	
	若严格不等号成立，则称严格单调上升(下降)		

续表 1.1.2

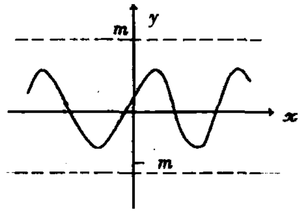
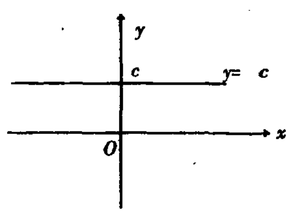
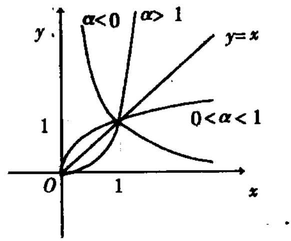
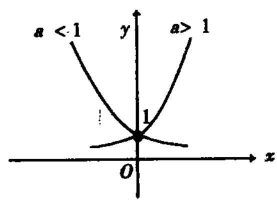
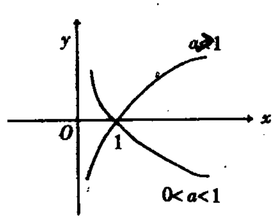
性质	定　义	图例或说明
有界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，若 $\exists M>0, \forall x \in X$，有 $\lvert f(x)\rvert \leqslant M$，（或 $\exists m, M$，使得 $m \leqslant f(x) \leqslant M$ 成立），则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界函数	 即函数的图形位于 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间
无界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，若 $\forall M>0, \exists x' \in X$，使得 $\lvert f(x')\rvert > M$，则称 $f(x)$ 在 X 上无界	例：$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界，因为 $\forall M>0$，取 $x'=\dfrac{1}{3M}$，则 $f(x')=3M>M$
周期性	函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义，若 $\exists T>0$，$\forall x \in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数。若在无穷多个周期中，有最小的正数 T，则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的最小周期，简称周期	若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 1° $f(x+kT)=f(x)$，（k 为整数）；2° $f(ax+b)(a \neq 0, b \in R)$ 是一个以 $\left\lvert\dfrac{T}{a}\right\rvert$ 为周期的函数

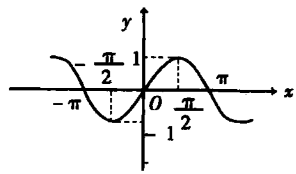
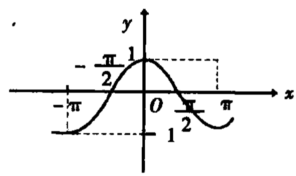
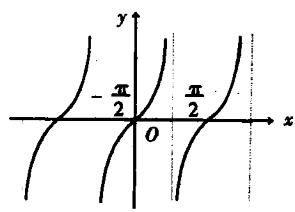
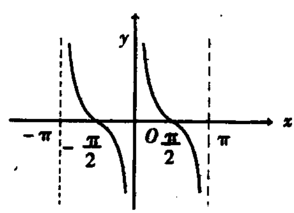
表 1.1.3 基本初等函数

名称	定义式及性质	图例
常数函数	$y(x)=C,(-\infty<x<+\infty)$。平行于 x 轴，过 $(0, C)$ 点的直线	

续表 1.1.3

名称	定义式及性质	图例
幂函数	$y=x^{\alpha}$, $(0<x<+\infty, \alpha\neq 0)$ $\alpha>0$时，函数x^{α}在$(0,+\infty)$上严格上升 $\alpha<0$时，函数x^{α}在$(0,+\infty)$上严格下降 $y=x^{\alpha}$与$y=x^{\frac{1}{\alpha}}$互为反函数	
指数函数	$y=a^{x}(a>0, a\neq 1)$ $a>1$时，函数$y=a^{x}$在$(-\infty,+\infty)$上严格上升 $a<1$时，函数$y=a^{x}$在$(-\infty,+\infty)$上严格下降	
对数函数	$y=\log_a x(a>0, a\neq 1, 0<x<+\infty)$ $a>1$时，函数$y=\log_a x$在$(0,+\infty)$上严格上升 $a<1$时，函数$y=\log_a x$在$(0,+\infty)$上严格下降 $y=a^{x}$与$y=\log_a x$互为反函数。(若$a=e$，记$y=\log_e x$为$y=\ln x$)	

续表 1.1.3

名称	定义式及性质	图例
三角函数	正弦函数 $y=\sin x$，$(-\infty<x<+\infty)$	
	余弦函数 $y=\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$，$(-\infty<x<+\infty)$	
	正切函数 $y=\mathrm{tg}x$ $(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。	
	余切函数 $y=\mathrm{ctg}x$ $(x\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。	

续表 1.1.3

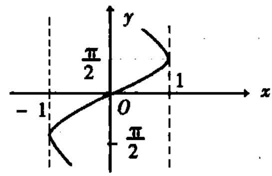
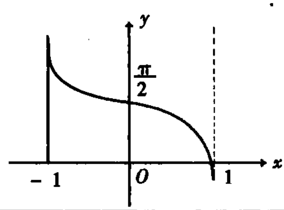
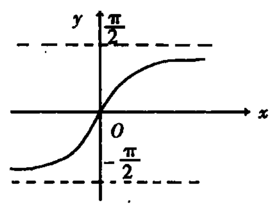
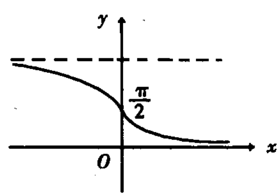
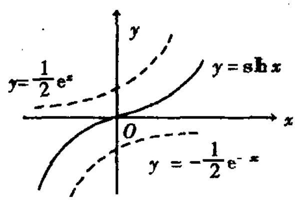
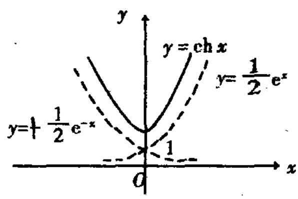
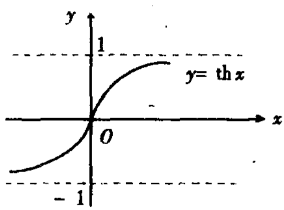
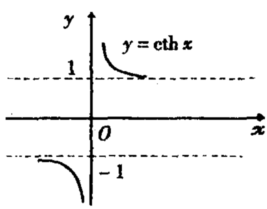
名称	定义式及性质	图例
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$，$(-1\leqslant x\leqslant 1, -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2})$	
	反余弦函数 $y=\arccos x$，$(-1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant\pi)$	
	反正切函数 $y=\mathrm{arctg}\, x$，$(-\infty<x<+\infty, -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2})$	
	反余切函数 $y=\mathrm{arcctg}\, x$，$(-\infty<x<+\infty, 0<y<\pi)$	

表 1.1.4 双曲函数

名称	定　　义	图　形
双曲正弦	$y = \mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	
双曲余弦	$y = \mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	
双曲正切	$y = \mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$	
双曲余切	$y = \mathrm{cth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$	

1.1.2 典型例题解析

例 1 求 $f(x)=\arcsin\dfrac{3x}{1+x}$ 的定义域。

解： 由反三角函数的定义域要求可得

$$\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{3x}{1+x}\leqslant 1,\\ 1+x\neq 0,\end{cases}$$

解上面的不等式组可得 $\begin{cases}-\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ x\neq -1,\end{cases}\Rightarrow f(x)$ 的定义域为 $-\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$（或表示成 $x\in[-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}]$）。

例 2 求 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\lg\cos x}$ 的定义域。

解： 只有 $\sqrt{4-x^2}$，$\lg\cos x$ 同时有意义，且分母不为 0 的 x 才是 $f(x)$ 的定义域，即

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ \cos x>0,\\ \cos x\neq 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ 2n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2},(n=0,\pm 1\cdots)\\ x\neq n\pi\end{cases}$$

上述不等式组的解为 $[-\dfrac{\pi}{2},0)\cup(0,\dfrac{\pi}{2}]$，因此 $f(x)$ 的定义域为 $[-\dfrac{\pi}{2},0)\cup(0,\dfrac{\pi}{2}]$。

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}x^3+4x+1, 当\ x\geqslant 1\ 时,\\ x+2, 当\ x<1\ 时。\end{cases}$ 求 $f(x+4)$。

解： 把 $f(x+4)$ 中，$x+4$ 作为自变量，代入到 $f(x)$ 的定义式中自变量 x 的位置，再考查各分段定义域上新的 x 应满足的条件。当 $x+4\geqslant 1$ 时，也即 $x\geqslant -3$；同理，当 $x+4<1$ 时，$x<-3$。

因此，我们有

$$f(x+4)=\begin{cases}(x+4)^3+4(x+4)+1, 当\ x\geqslant -3\ 时,\\ (x+4)+2=x+6, 当\ x<-3\ 时。\end{cases}$$