碧海书道
BOOK HOUSE

高等学校数学学习辅导丛书

概率论与数理统计

习题全解全析

配浙大三版

编著 滕素珍 李彩荣 韩海山

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

概率论与数理统计
习题全解全析

配浙大三版

编著　滕素珍　李彩荣　韩海山

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题全解全析(配浙大三版)/滕素珍,李彩荣,韩海山编著.—4版.—大连:大连理工大学出版社,2009.8
高等学校数学学习辅导丛书
ISBN 978-7-5611-2387-4

Ⅰ.概… Ⅱ.①滕… ②李…③韩… Ⅲ.①概率论—高等学校—解题②数理统计—高等学校—解题 Ⅳ.O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 075389 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm 印张:10.875 字数:442 千字
2009 年 8 月第 4 版 2009 年 8 月第 6 次印刷

责任编辑:梁 锋 王 伟 责任校对:碧 海
封面设计:季 强

ISBN 978-7-5611-2387-4 定 价:15.00 元

编者的话

近年来,大学数学方面的学习辅导书种类逐渐增多,学生们每人手中持有一种乃至数种。这其中不乏精品之作,但多数又不尽如人意。作为从教多年的教师,看到学生们渴望知识的热情,以及应试的压力,强烈的责任感驱使我们有一种将多年教学经验述于纸面的冲动,同样的责任感又使得我们迟迟没有动笔,生怕在已有的热闹非凡的出版市场上平添平庸之作,浪费时间,浪费纸张,浪费资源。

大连理工大学出版社提出要组织编写一套《习题全解(全析)》系列图书,编辑们对该系列图书清晰的思路与准确的定位,与我们的想法一拍即合,立即触发了我们的编写欲望。我们多次征求本科生、专科生,乃至研究生的意见,更加坚定了我们写好本书的信心,进一步明确了本书的定位,这就是——像习题课一样,与学生们一起通过对习题的分析、讨论、求解、总结,扎实掌握大学数学的基础,领悟大学数学的真谛。这就是我们写作本书的初衷。

浙江大学《概率论与数理统计》,现在已经推出第三版。作为教科书,该书体系完整,层次清晰,叙述深入浅出,在改革教材层出不穷的今天,仍享有其他教材无法比拟的地位,深受广大教师和学生的喜爱。本书按照该教材章节顺序编写,可以与该教材配套使用。

本书详细给出全部习题的解答。真正从学习者的角度,给出解题的每一个过程与步骤,以免略掉一些看似简单但对有些同学理解解题思路很关键的细节。在解题过程中,将习题分成三个层次:

第一层次为基本题,直接给出详细解答过程。对于其中的典型题,给出有针对性的提示和点拨。

第二层次为多知识点综合题。解题全过程控制:首先给出思路,题中重点点拨,题后归纳梳理出知识点、解题方法等。

第三层次为灵活题和难题。除给出思路、分析指导外,还给出一题多解,举一反三等,并且提示"如何才能得到答案",如何寻求"好的解题方法",从而真正提高学生分析问题和解决问题的能力。

学习是一个过程,而过程由环节组成。只有注重环节,控制过程,才能得到良好的学习效果。对学习大学数学来讲,课堂听讲和课后复习是两个重要环节。

本书一经推出,立即受到读者的厚爱,作为编者,深感欣慰。借此修订之际,我们根据读者反馈及编委会的意见,对原书进行了重新编排,并将解题方法及步骤进行优化。我们热切期望更多读者从中获益,并希望更多读者提出宝贵意见及建议。

编 者

2006 年 6 月

目录

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS

第一章 概率论的基本概念

习题解析

第 1 ～ 2 题 随机试验、样本空间、随机事件

1. 写出下列随机试验的样本空间：

（1）记录一个小班一次数学考试的平均分数（设以百分制记分）。

（2）生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数。

（3）对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上“正品”，不合格的记上“次品”，如连续查出 2 个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的结果。

（4）在单位圆内任意取一点，记录它的坐标。

解 （1）设该小班有 n 个人，每个人数学考试的分数的可能取值为 $0,1,2,\cdots,100$，n 个人分数之和的可能取值为 $0,1,2,\cdots,100n$，平均分数的可能取值为 $\frac{0}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{100n}{n}$，则样本空间为

$$S=\left\{\frac{k}{n}\,\middle|\,k=0,1,2,\cdots,100n\right\}$$

（2）样本空间 $S=\{10,11,\cdots\}$，S 中含有可数无限多个样本点。

（3）设 1 表示正品，0 表示次品，则样本空间为

$$\begin{aligned}S=\{&(0,0),(1,0,0),(0,1,0,0),(0,1,0,1),(0,1,1,0),\\&(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,1,1),(0,1,1,1),\\&(1,1,0,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}\end{aligned}$$

例如 $(1,1,0,0)$ 表示第一次与第二次检查到正品，而第三次与第四次检查到次品。

（4）设任取一点的坐标为 (x,y)，则样本空间为

$$S=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

2. 设 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列事件。

(1)A 发生，B 与 C 不发生；

(2)A 与 B 都发生，而 C 不发生；

(3)A,B,C 中至少有一个发生；

(4)A,B,C 都发生；

(5)A,B,C 都不发生；

(6)A,B,C 中不多于一个发生；

(7)A,B,C 中不多于两个发生；

(8)A,B,C 中至少有两个发生。

解 此题关键词："与"，"而"，"都" 表示事件的"交"；"至少" 表示事件的"并"；"不多于" 表示"交" 和"并" 的联合运算。

(1)$A\overline{B}\overline{C}$。

(2)$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$。

(3)$A\cup B\cup C$。

(4)ABC。

(5)$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$。

(6)A,B,C 中不多于一个发生为仅有一个发生或都不发生，即 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，$A,B,C$ 中不多于一个发生，也表明 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 中至少有两个发生，即 $\overline{A}\overline{B}\cup\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{C}$。

(7)A,B,C 中不多于两个发生，为仅有两个发生或仅有一个发生，或都不发生，即表示为

$$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

而 ABC 表示三个事件都发生，其对立事件为不多于两个事件发生，因此又可以表示为 $\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$。

(8)A,B,C 中至少有两个发生为 A,B,C 中仅有两个发生或都发生，即为

$$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$$

也可以表示为 $AB\cup BC\cup AC$。

事件 A,B,C 都发生为 ABC；都不发生为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；不都发生为 ABC 的对立事件，即为 $\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$。

第 3 ~ 12 题　概率的定义、概率的性质、古典概型

3. 设 A,B 是两事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$。问

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取得最大值,最大值是什么?

(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取得最小值,最小值是什么?

解 (1) 利用事件的包含关系。由于 $AB \subset A$,且 $AB \subset B$,所以 $P(AB) \leqslant P(A)$, $P(AB) \leqslant P(B)$,由此得

$$P(AB) \leqslant \min\{P(A), P(B)\} = \min\{0.6, 0.7\} = 0.6$$

当 $A \subset B$ 时,有 $AB = A$,这时 $P(AB)$ 取得最大值,其最大值为 0.6。

(2) 利用概率的加法公式。

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

解出

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

其中 $0 \leqslant P(A \cup B) \leqslant 1, \max\{P(A \cup B)\} = 1$。

故当 $P(A \cup B) = 1$ 时,$P(AB)$ 取得最小值,即当 $A \cup B = S$ 时,$P(AB)$ 取得最小值,其最小值为

$$P(AB) = 0.6 + 0.7 - 1 = 0.3$$

---

4. 设 A, B, C 是三事件,且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = P(BC) = 0, P(AC) = \frac{1}{8}$,求 A, B, C 至少有一个发生的概率。

解 利用概率的加法公式。

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

其中由 $P(AB) = P(BC) = 0$,而 $ABC \subset AB$,得 $P(ABC) = 0$。

---

5. 在一标准英语字典中有 55 个由两个不相同的字母所组成的单词。若从 26 个英文字母中任取两个字母予以排列,求能排成上述单词的概率。

解 样本空间 $S = \{A_{26}^2$ 个基本事件$\}$。令事件 $A = \{$任取两个字母排列成由两个不相同字母组成的一个单词$\} = \{55$ 个基本事件$\}$。于是

$$P(A) = \frac{55}{A_{26}^2} = \frac{55}{26 \times 25} = \frac{11}{130}$$

此题的样本空间的基本事件(样本点)数非常大,直接计数样本空间的基本事件数,实际上是不可能的,我们用的是排列法。从 26 个字母中取出 2 个予以排列,是考虑

顺序的，故有 $A_{26}^{2}=26\times25$ 种取法。其中 $A=\{55$ 个基本事件$\}$ 表示有利于事件 A 的基本事件数为 55。

---

6. 在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码。求

(1) 最小号码为 5 的概率；

(2) 最大号码为 5 的概率。

解 利用组合法计数基本事件数。从 10 人中任取 3 人的组合数为 C_{10}^{3}，即样本空间 $S=\{C_{10}^{3}=120$ 个基本事件$\}$。

(1) 令事件 $A=\{$最小号码为 5$\}$。最小号码为 5，意味着其余号码是从 6，7，8，9，10 的 5 个号码中取出的，有 C_5^2 种取法，故 $A=\{C_5^2=10$ 个基本事件$\}$，所求概率为

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{\dfrac{5\,!}{2\,!\,3\,!}}{\dfrac{10\,!}{3\,!\,7\,!}}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$

(2) 令事件 $B=\{$最大号码为 5$\}$，最大号码为 5，其余两个号码是从 1，2，3，4 的 4 个号码中取出的，有 C_4^2 种取法，即 $B=\{C_4^2$ 个基本事件$\}$，则

$$P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{\dfrac{4\,!}{2\,!\,2\,!}}{\dfrac{10\,!}{3\,!\,7\,!}}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$$

---

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶，黑漆 4 桶，红漆 3 桶，在搬运中所有标签脱落，交货人随意将这些油漆发给顾客。问一个订货为 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客，能按所订颜色如数得到订货的概率是多少？

解 利用组合法计数基本事件数。样本空间 $S=\{C_{17}^{9}$ 个基本事件$\}$，令事件 $A=\{$能按所订颜色如数得到订货$\}$，顾客订货 4 桶白漆，有 C_{10}^{4} 种取法，3 桶黑漆有 C_4^3 种取法，2 桶红漆有 C_3^2 种取法，于是 $A=\{C_{10}^{4}C_4^3C_3^2$ 个基本事件$\}$，则

$$P(A)=\frac{C_{10}^{4}C_4^3C_3^2}{C_{17}^{9}}=\frac{\dfrac{10\,!}{4\,!\,6\,!}\times\dfrac{4\,!}{3\,!\,1\,!}\times\dfrac{3\,!}{2\,!\,1\,!}}{\dfrac{17\,!}{9\,!\,8\,!}}=\frac{252}{2\,431}$$

---

8. 在 1 500 个产品中有 400 个次品，1 100 个正品。从中任取 200 个。求

(1) 恰有 90 个次品的概率；

(2) 至少有 2 个次品的概率。

解 (1) 利用组合法计数基本事件数。令事件 $A=\{$恰有 90 个次品$\}$，则

$$P(A)=\frac{C_{400}^{90}C_{1\,100}^{110}}{C_{1\,500}^{200}}$$

(2) 利用概率的性质。令事件 $B=\{$至少有 2 个次品$\}$，$A_i=\{$恰有 i 个次品$\}$，则

$$B=A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_{200},\quad A_iA_j=\varnothing\quad(i\neq j)$$

所求概率为

$$P(B)=P(A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_{200})=\sum_{i=2}^{200}P(A_i)$$

显然，这种解法太麻烦，用对立事件求解就很简单。令事件 $\overline{B}=\{$恰有 0 个次品或恰有 1 个次品$\}$，即 $\overline{B}=A_0\cup A_1$，而

$$P(\overline{B})=P(A_0\cup A_1)=P(A_0)+P(A_1)=\frac{C_{1\,100}^{200}}{C_{1\,500}^{200}}+\frac{C_{400}^{1}C_{1\,100}^{199}}{C_{1\,500}^{200}}$$

故

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{1\,100}^{200}}{C_{1\,500}^{200}}-\frac{C_{400}^{1}C_{1\,100}^{199}}{C_{1\,500}^{200}}$$

---

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，问这 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率是多少？

解 令事件 $A=\{4$ 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双$\}$。用 3 种方法求 $P(A)$。

① A 的对立事件 $\overline{A}=\{4$ 只鞋子中没有任何两只能配成一双$\}$，从 5 双鞋中任取 4 只，即从 10 只鞋中任取 4 只，所有可能组合数为 C_{10}^4，样本空间 $S=\{C_{10}^4$ 个基本事件$\}$，现考虑有利于 $\overline{A}$ 的基本事件数。从 5 双鞋中任取 4 双，再从每双中任取一只，有 $C_5^4 2^4$ 种取法，即 $\overline{A}=\{C_5^4 2^4$ 个基本事件$\}$，则

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^4 2^4}{C_{10}^4}=1-\frac{5\times 2^4}{210}=\frac{13}{21}$$

② 4 只鞋是不放回的一只接一只的取出，所有可能的排列数为 A_{10}^4，即样本空间 $S=\{A_{10}^4$ 个基本事件$\}$。现考虑有利于 $\overline{A}$ 的基本事件，从 10 只鞋中任取一只，与它配成双的一只不取，从其余 8 只鞋中任取一只，与它配成双的一只不取，依此类推，则 $\overline{A}=\{10\times 8\times 6\times 4$ 个基本事件$\}$。于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\times 8\times 6\times 4}{A_{10}^4}$$

$$=1-\frac{10\times 8\times 6\times 4}{10\times 9\times 8\times 7}=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$$

③ 利用组合法计数基本事件数。考虑有利于事件 A 的基本事件数，任取的 4 只鞋能配成一双的取法有 $C_5^1C_2^2C_4^2 2^2$ 种，能配成两双的取法有 $C_5^2C_2^2$种，于是 $A=\{(C_5^1C_2^2C_4^2 2^2+C_5^2C_2^2)$ 个基本事件$\}$，则

$$P(A)=\frac{C_5^1C_2^2C_4^2 2^2+C_5^2C_2^2}{C_{10}^4}=\frac{130}{210}=\frac{13}{21}$$

此题的第 1 种方法和第 2 种方法是利用概率性质：

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

首先求 $P(\overline{A})$，然后求 $P(A)$。第 3 种方法是直接求 $P(A)$。读者还可以用更多方法求 $P(A)$。

---

10. 在 11 张卡片上分别写上 Probability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求其排列结果为 ability 的概率。

解 令事件 $A=\{$排列结果为 ability$\}$，利用排列法计数基本事件数。不放回的从中一次抽 1 张的连抽 7 张，要排成单词，因此用排列法。样本空间 $S=\{A_{11}^7$ 个基本事件$\}$。排列结果为 ability，写字母 b 的卡片有两张，写字母 i 的卡片有两张，取 b 有 C_2^1 种取法，取 i 有 C_2^1种取法，其余字母都只有 1 种取法，故 $A=\{C_2^1C_2^1$个基本事件$\}$，于是

$$P(A)=\frac{C_2^1C_2^1}{A_{11}^7}=\frac{4}{11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5}=0.000\,002\,4$$

这是个小概率事件。

---

11. 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1，2，3 的概率。

解 3 个球放入 4 个杯子，利用有重复的选排列，总的放法为 4^3，即样本空间 $S=\{4^3$ 个基本事件$\}$。

① 令事件 $A=\{$杯子中球的最大个数为 1$\}$，即 3 个球分别放入 4 个杯子中的 3 个杯子，即 $A=\{A_4^3$ 个基本事件$\}$，于是

$$P(A)=\frac{A_4^3}{4^3}=\frac{4\times 3\times 2}{4^3}=\frac{24}{64}=\frac{6}{16}$$

② 令事件 $B=\{$杯子中球的最大个数为 2$\}$，即 3 个球放入 4 个杯子中的 2 个杯子，其中 1 个杯子中有 2 个球，另一个杯子中有 1 个球，这一个球是从 3 个球中取出的，故 $B=\{A_4^2C_3^1$个基本事件$\}$。又可以理解为从 3 个球中任取 2 个球放入 4 个杯子的任意 1 个杯子中，另一球放入其余 3 个杯子的任意 1 个杯中，故 $B=\{C_3^2A_4^1A_3^1$ 个基本事件$\}$，则

$$P(B)=\frac{A_1^2C_3^1}{4^3}=\frac{4\times 3\times 3}{4^3}=\frac{9}{16}$$

或

$$P(B)=\frac{C_3^2A_4^1A_3^1}{4^3}=\frac{3\times 4\times 3}{4^3}=\frac{9}{16}$$

③ 令事件 $C=\{$杯子中最大个数为3$\}$，即3个球放入4个杯子的任意1个杯中，放法为 A_4^1，即 $C=\{A_4^1$ 个基本事件$\}$，则

$$P(C)=\frac{A_4^1}{4^3}=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}$$

由于 $A_1\cup A_2\cup A_3=S$，且 $A_iA_j\neq\varnothing(i\neq j)$，故 $P(A)+P(B)+P(C)=1$。只要求出 $P(A)$ 和 $P(C)$ 即可，则有

$$P(B)=1-P(A)-P(C)=1-\frac{6}{16}-\frac{1}{16}=\frac{9}{16}$$

---

12. 50只铆钉随机地取来用在10个部件上，其中有3个铆钉强度太弱。每个部件用3只铆钉。若将3只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱。问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

解 令事件 $A=\{$恰好有一个部件强度太弱$\}$。从50只铆钉中任取3只，有 C_{50}^3 种取法，即样本空间 $S=\{C_{50}^3$ 个基本事件$\}$。3个强度太弱的铆钉都装在同一部件上，有10种可能结果，由此得 $A=\{10$ 个基本事件$\}$。所求概率为

$$P(A)=\frac{10}{C_{50}^3}=\frac{10}{50\times 49\times 8}=\frac{1}{40\times 49}=\frac{1}{1\,960}$$

第13～18题 条件概率、概率的加法公式和乘法公式

---

13. 已知 $P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，求条件概率 $P(B\mid A\cup\overline{B})$。

解 利用条件概率和概率的加法公式。首先利用条件概率公式，得

$$P(B\mid A\cup\overline{B})=\frac{P(B(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB\cup B\overline{B})}{P(A\cup\overline{B})}$$

其中 $B\overline{B}=\varnothing$，所以 $P(B\overline{B})=0$，由此得

$$\begin{aligned}P(AB\cup B\overline{B})&=P(AB)+P(B\overline{B})-P((AB)(B\overline{B}))\\&=P(AB)+P(\varnothing)-P(\varnothing)=P(AB)\end{aligned}$$

而 $AB=A-A\overline{B}$，且 $A\overline{B}\subset A$，由概率性质和概率加法公式，分别得

$$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})$$
$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$$

已知

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.3=0.7$$
$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.4=0.6$$
$$P(A\overline{B})=0.5$$

于是所求条件概率为

$$\begin{aligned}P(B\mid A\cup\overline{B})&=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}\\&=\frac{P(A)-P(A\overline{B})}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}\\&=\frac{0.7-0.5}{0.7+0.6-0.5}=\frac{0.2}{0.8}=0.25\end{aligned}$$

---

14. 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B\mid A)=\frac{1}{3}$,$P(A\mid B)=\frac{1}{2}$,求 $P(A\cup B)$。

解　利用概率加法公式和概率乘法公式。

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

解此题的关键是求 $P(B)$ 和 $P(AB)$。由概率乘法公式,得

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

又 $P(AB)=P(B)P(A\mid B)$,解得

$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A\mid B)}=\frac{1/12}{1/2}=\frac{1}{6}$$

于是所求概率为

$$P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

此题的关键是利用 $P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B)$,求出 $P(AB)$ 和 $P(B)$,再求 $P(A\cup B)$ 就迎刃而解了。

---

15. 掷两颗骰子,已知两颗骰子点数之和为 7,求其中有一颗为 1 点的概率(用两种方法)。

解　令事件 $A=\{$两颗骰子点数之和为 7$\}$,$B=\{$有一颗为 1 点$\}$。此题是求条件概率

$P(B \mid A)$。两种方法如下：

① 考虑整个样本空间。随机试验：掷两颗骰子，每颗骰子可能出现的点数都是 6 个，即样本空间 $S=\{6^2$ 个基本事件$\}$。事件 $AB=\{$两颗骰子点数之和为 7，且有一颗为 1 点$\}$，两颗骰子点数之和为 7 的可能结果为 6 个，即

$$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(6,1),(5,2),(4,3)\}$$

而 $AB=\{(1,6),(6,1)\}$。由条件概率公式，得

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2/36}{6/36}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

② 已知事件 A 发生后，将 A 作为样本空间，其中有两个结果 $(1,6)$ 和 $(6,1)$ 只有一颗骰子出现 1 点，则在缩减的样本空间中求事件 B 发生的条件概率为

$$P(B \mid A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

---

16. 据以往资料表明，某一 3 口之家，患某种传染病的概率有以下规律：

$$P\{\text{孩子得病}\}=0.6, P\{\text{母亲得病} \mid \text{孩子得病}\}=0.5$$

$$P\{\text{父亲得病} \mid \text{母亲及孩子得病}\}=0.4$$

求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率。

解 令事件 $A=\{$孩子得病$\}$，$B=\{$母亲得病$\}$，$C=\{$父亲得病$\}$，已知 $P(A)=0.6$，$P(B \mid A)=0.5$，$P(C \mid AB)=0.4$。令事件 $D=\{$母亲及孩子得病但父亲未得病$\}$，即 $D=AB\overline{C}$。由概率乘法公式，得

$$P(D)=P(AB\overline{C})=P(A)P(B \mid A)P(\overline{C} \mid AB)$$

而 $P(C \mid AB)+P(\overline{C} \mid AB)=1$，所以

$$P(\overline{C} \mid AB)=1-P(C \mid AB)=1-0.4=0.6$$

于是

$$P(D)=0.6\times 0.5\times 0.6=0.18$$

---

17. 已知在 10 只晶体管中有 2 只次品，在其中取两次，每次任取一只，作不放回抽样。求下列事件的概率。

(1) 两只都是正品；

(2) 两只都是次品；

(3) 一只是正品，一只是次品；

(4) 第二次取出的是次品。

解 利用古典概型计算所求事件发生的概率，并用组合法计数基本事件数。

(1) 令事件 $A=\{$取出的 2 只都是正品$\}$。10 只晶体管中有 2 只次品，8 只正品。从 10 只中取出 2 只，不考虑顺序，有 C_{10}^2 种取法，即样本空间 $S=\{C_{10}^2$ 个基本事件$\}$，取出的 2 只都是正品，是从 8 只正品中取出，有 C_8^2 种取法。故 $A=\{C_8^2$ 个基本事件$\}$，于是

$$P(A)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{\frac{8!}{2!6!}}{\frac{10!}{2!8!}}=\frac{8!}{2!6!}\times\frac{2!8!}{10!}=\frac{28}{45}$$

(2) 令事件 $B=\{$取出的 2 只都是次品$\}$，与(1) 类似，所求概率为

$$P(B)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{\frac{10!}{2!8!}}=\frac{2!8!}{10!}=\frac{1}{45}$$

(3) 令事件 $C=\{$取出的 2 只，一只是正品，一只是次品$\}$。一只正品是从 8 只正品中取出，有 C_8^1 种取法；一只次品是从 2 只次品中取出，有 C_2^1 种取法；一只正品，一只次品有 $C_8^1C_2^1$ 种取法。即 $C=\{C_8^1C_2^1$ 个基本事件$\}$。则

$$P(C)=\frac{C_8^1C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{8\times 2}{\frac{10!}{2!8!}}=\frac{8\times 2\times 2!\times 8!}{10!}=\frac{16}{45}$$

(4) 令事件 $D=\{$第二次取出的是次品$\}$。又可表示为 $D=\{($第一次取出的是正品，第二次取出的是次品$)\cup($第一次取出的是次品，第二次取出的也是次品$)\}$，即 $D=\{(\frac{C_8^1C_2^1}{2}+\frac{C_2^1C_1^1}{2})$ 个基本事件$\}$，于是

$$P(D)=\frac{(C_8^1C_2^1)/2+(C_2^1C_1^1)/2}{C_{10}^2}=\frac{8+1}{\frac{10!}{2!8!}}=\frac{1}{5}$$

利用概率乘法公式和概率性质(有限可加性)。

令事件 $A_i=\{$第 i 次取出正品$\}$，对立事件 $\overline{A}_i=\{$第 i 次取出次品$\}$。下面事件 A，B，C，D 的含意同第 1 种方法。

$$(1)P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{56}{90}=\frac{28}{45}$$

$$(2)P(B)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$$

$$\begin{aligned}(3)P(C)&=P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)\\&=P(A_1)P(\overline{A}_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)\\&=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{16}{45}\end{aligned}$$

其中 $(A_1\overline{A}_2)\cap(\overline{A}_1A_2)=\varnothing$，所以用有限可加性的性质。