邢誉峰　李　敏　编著

高等学校研究生教材

计算固体力学原理与方法

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

高等学校研究生教材

计算固体力学原理与方法

邢誉峰　李　敏　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书系统地论述了固体力学的计算原理和基本方法，重点强调各种近似方法的理论基础、特色及其应用技术。

本书内容主要包括三部分，第一部分以变分原理和加权残量法为基础，详细讨论有限元方法、边界元方法、无网格方法和微分求积有限单元方法的力学基础和单元构造方法，深入分析几种方法的特点及其应用范围；第二部分讨论动力学常微分方程的耗散和非耗散求解方法以及特征值求解技术，重点介绍几种常用和新发展的求解方法的格式和特点；第三部分论述非线性问题的基本理论和计算技术，重点是弹塑性问题、大变形问题、弹性稳定性问题和结构热应力问题。

本书强调基本概念和方法的物理背景，期望为读者打下扎实的计算固体力学基础，培养读者的应用意识；可以作为工程力学、航空航天工程、机械工程和土木工程专业的教材，也可以作为相关工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

计算固体力学原理与方法 / 邢誉峰，李敏编著. —北京：北京航空航天大学出版社，2011.4

ISBN 978-7-5124-0379-6

Ⅰ. ①计… Ⅱ. ①邢… ②李… Ⅲ. ①计算固体力学—研究 Ⅳ. ①O34

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 042482 号

计算固体力学原理与方法

邢誉峰　李　敏　编著

责任编辑　宋淑娟

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191)　http://www.buaapress.com.cn

发行部电话：(010)82317024　传真：(010)82328026

读者信箱：bhpress@263.net　　邮购电话：(010)82316936

北京时代华都印刷有限公司印装　各地书店经销

*

开本：787×1 092　1/16　印张：19.5　字数：499 千字

2011 年 4 月第 1 版　2011 年 4 月第 1 次印刷　印数：3 000 册

ISBN 978-7-5124-0379-6　定价：49.00 元

序　言

固体力学内容十分丰富，概括地说，包括线性和非线性问题、静力学和动力学问题。线性问题是以小变形假设为前提的各种静、动力学问题；而非线性问题的种类繁多，例如材料非线性问题（非线性弹性和弹塑性问题等）、几何非线性问题和多物理场耦合问题（流体和固体的耦合问题，电、磁、热和结构的耦合问题）等。

虽然固体力学的问题种类多，但其数学模型可以说是统一的，包括平衡方程（描述内力和外力的平衡关系）、本构方程（描述应力和应变的关系）、几何方程（描述应变和位移的关系）和边界条件以及初始条件（仅针对动力学问题）。线性问题的数学模型是线性的。非线性问题是指三类基本方程和边界条件中至少有一个包含了非线性因素的问题，或数学模型是非线性的物理问题。

虽然固体力学问题有统一的数学模型，但其解法却难以统一。固体力学的常规求解方法可以概括为：把变分原理、加权残量方法、虚功原理和 Ritz 方法结合形成的各种强有力的空间离散解法，如有限元方法、边界元方法、无网格方法和有限差分方法等；以 Taylor 级数展开方法为基础建立的动力学常微分方程的各种差分解法；非线性问题的增量迭代算法等。

固体力学的丰富内容和各种数值方法的纵横交叉融合，使得计算固体力学的内容异常丰富。仅仅通过一本教材来详细阐述全部问题是不可能的，除非出版一套计算固体力学系列著作。但通过一本书来建立理论与实际应用之间的桥梁是非常必要的，无论对学生、理论工作者，还是对工程技术人员都是有裨益的。

在介绍基本原理和方法的基础上，本书给出了具有工程性质或启发性的算例，或工程应用的建议，或可能存在的模拟问题等，希望启迪读者尽快了解或掌握各种计算固体力学的方法。本书以作者恩师诸德超教授的专著《升阶谱有限元法》为基础，主要讨论有限元方法、边界元方法、无网格方法、微分求积有限元方法和动力学方程及非线性方程的解法。在各章内容编写过程中，除了强调基本概念和基本方法的机理之外，还融入了新的研究成果。

第 1 章主要介绍变分、一阶变分和二阶变分等重要概念，并以梁为基础介绍最小势能和最小余能原理、广义变分原理、一类变量和二类变量的 Hamilton 变分原理，介绍变分原理之间的相互转化方法和条件。

第 2 章主要讨论一维结构有限元的原理和方法，根据最小总势能原理推导一维杆、Euler 梁和 Timoshenko 梁的平衡微分方程和自然边界条件，给出这些一维构件从低阶到高阶的有限元列式、固有振动和临界载荷的瑞利商。以典型结构为

例，把商用有限元软件结果与理论解进行分析和比较。

第 3 章主要介绍二维问题的有限元原理和方法，包括平面问题、薄板和剪切板的变分原理和有限元列式，简要介绍壳的有限元列式，给出四边形和三角形的高斯积分公式和系数。利用商用有限元软件对二维问题的频率和模态、几何非线性的作用和典型平面静力问题进行分析，并与解析解进行比较。

第 4 章主要介绍边界元方法的基本思想和基本概念、基本解的求解方法，针对位势和平面弹性力学问题，介绍边界积分方程的建立、离散和求解方法。针对常单元和线单元，给出部分边界积分的解析表达式，并给出算例。

第 5 章主要介绍无网格方法的基本原理和方法，给出几种构造形函数的方法，讨论弱形式、配点型和最小二乘无网格方法。给出使用无网格方法的主要步骤和每步中值得注意的问题，并给出算例。

第 6 章主要介绍动力学方程的求解方法，包括特征值求解方法、动力学常微分方程的耗散和非耗散算法，例如精细积分方法、Euler 中点辛差分格式（为 $\delta=0.5$，$\alpha=0.25$ Newmark 算法）和辛两步算法等，重点强调各种算法的特点。

第 7 章介绍微分求积有限单元方法，这是一种新型的高阶单元方法。本章介绍微分求积法则、给出 Gauss - Lobatto 积分公式和各种微分求积有限单元的刚度矩阵、质量矩阵和载荷列向量的显式，指出微分求积方法的特点和优势，并给出算例。

第 8 章为专题讨论，主要介绍弹塑性问题、几何非线性问题、结构弹性稳定性问题及热应力问题的基本理论和有限元解法，简要讨论非线性方程的 Newton - Raphson 类迭代算法，包括拟牛顿迭代法和限制增量位移向量长度的弧长法等。

各章均附有复习思考题，以强化基本概念、基本方法和基本理论；还附有适量的习题，以加深对内容的理解和运用。各章附有主要参考文献，便于读者查阅。

本书强调物理背景、概念和过程，期望为读者打下扎实的计算固体力学基础，培养读者的应用意识；可以作为工程力学、航空航天工程、机械工程和土木工程专业的教材，也可以作为相关工程技术人员的参考书。

编写本书的指导思想是“定义准确、用词规范、行文简练、深入浅出”。全书由邢誉峰主持编写和执笔，李敏参加了第 2 章和第 3 章的编写工作。另外，教研室的研究生也参加了本书的编写工作，特别要提到的是，刘波为第 7 章提供了素材，金晶编写了第 4 章和第 5 章程序并给出了算例，唐慧和赵弘阳绘制了第 4 章和第 8 章的示意图，作者谨在此表示衷心感谢。

限于水平，书中若有不足和错误之处，恳请读者批评指正。

作　者

2010 年 12 月

目　录

绪　论

作为一种数值分析工具，有限元法对促进当代科学技术的发展和工程实际应用已经发挥并将继续发挥其重要作用。有限元法这一名称虽然是由克拉夫(Clough)在 1960 年提出的，但其萌芽思想却可追溯到很早以前。18 世纪末，瑞士数学家、力学家欧拉(Euler)在创立变分法的同时，曾使用与现代有限元法相似的方法求解过直杆在轴向力作用下的平衡问题。但在缺乏强有力数值运算工具的时代，人们难以克服该方法运算量大的困难，而使它没有得到重视以致最终被湮没。

1943 年，库朗(Courant)运用最小势能原理和现代有限元法中的线性三角形单元解过圣维南(Saint Venant)弹性扭转问题，但仍没有引起学术界，特别是工程界的足够重视。直到 20 世纪 50 年代，随着电子计算机开始普及使用，才为有限元法的应用和发展提供了雄厚的物质基础。美国飞机结构工程师特纳(Turner)与合作者在 1956 年首次将有限元法用于飞机机翼的结构分析，他们的工作打破了沉闷的局面。从此，有限元法的理论研究、工程应用和软件开发蓬勃发展，其势锐不可当。如今，有限元法已从结构工程应用发展成几乎所有科学技术领域都广泛使用的计算方法。1987 年，美国出版了一本有限元手册[1]，在其序言中提到，在 20 世纪 80 年代初期，全世界用于有限元分析上的花费，估计每年高达 5 亿美元之多，仅此可见盛况之一斑。

有限元法是求解微分方程，特别是椭圆型方程的系统化、现代化的数值方法。与椭圆型方程等价的另一数学形式是变分原理。正是以变分原理为数学基础，有限元法才在理论上臻于完善，并在实践上取得巨大成功。事实上，近代有限元法和变分原理的发展是紧密联系和相辅相成的。

变分原理把求解微分方程的问题转化为在容许函数空间内寻找泛函极值或驻值的问题。若容许函数空间未受到任何人为的限制，则找到的解将与微分方程的解完全等价。实际上，有限元法并不追求问题的精确解，而是在一个大大缩小了的容许函数空间内寻找一个精度能够满足使用要求的近似解。因此，有限元法的另一个数学基础是离散逼近原理。

所谓离散逼近，首先是把求解域剖分成一系列称为单元的小区域。这样做可以带来许多好处，例如，便于处理复杂的问题，因为剖分后可使问题的性质在每一单元内尽可能地单纯化；便于处理参数的不连续性；便于适配复杂的边界几何形状等。其次是在每个单元内采用已知的函数序列——通常采用多项式函数序列——作为容许函数空间的基底函数，并在相邻单元的公共边界上设法满足按变分原理所要求的连续性条件。最后将全部单元组合拼装起来构成处理原问题的数学模型进行求解。显然，在不违反变分约束的前提下，有限元解的精度依赖于所取容许函数空间的大小，而后者则是单元网格剖分精细程度和每单元上线性独立基底函数个数这两个因素的综合。因此，有限元变化的总趋势将是随所取容许函数空间的扩大而向精确解逼近的过程。对于一个给定的问题，为了改善其有限元的精度，具体地说可以采取以下三种方法。

第 1 种方法是，不改变各单元上基底函数的配置情况，通过逐步加密有限元网格来使结果向精确解逼近。与此方法相应的收敛过程称为 h 收敛过程。这种方法在有限元应用中最为常见，并且往往采用较为简单的单元构造形式。

第 2 种方法是，保持有限元网格固定不变，逐步增加各单元上基底函数配置的个数。通过这种方法来改善结果精度的过程称为 p 收敛过程。

第 3 种方法是上述两种方法的联合使用，既加密有限元网格的剖分，又增加各单元上基底函数配置的个数，这种过程称为 $h-p$ 收敛过程。

作为实施 p 收敛过程的一种有效方法，杰凯维奇(Zienkiewicz)等在 1970 年提出了升阶谱有限元的概念，后来又做了进一步的阐述[2]。所谓的升阶谱有限元，是由常规的位移协调元结合数量逐渐增加的附加自由度构成的。这些附加自由度以不违反位移连续条件的逐次升幂多项式函数作为基底函数，并且，在自由度的安排上，使低阶升阶谱有限元的自由度是高阶升阶谱有限元自由度的一个子集。因而，其刚度、质量和几何刚度矩阵以及载荷向量成为同一问题更高阶升阶谱有限元相应矩阵的子矩阵，以及相应向量的子向量。这样，在升阶过程中，只须在原有矩阵方程的基础上扩充新的行和列，即可得到新的矩阵方程。此外，还可充分利用原有的计算结果作为出发点，求取扩大后矩阵方程的新结果。从计算角度看，这显然是一个十分有用的特性，不仅可使在 p 收敛过程中的总计算工作量大为节省，而且可为编制自适应分析程序提供极为有利的条件。

根据维尔斯特拉斯(Weirtstrass)定理，任何一个在有限区间内连续的函数，都可以用足够高次的代数多项式逼近到任意精确的程度。因此，只要使每一单元内都不存在因任何原因引起的不连续性，就总可以保证 p 收敛性。皮特勒斯卡(Petruska)指出，对于 C^0 连续性问题，即只要求位移本身连续的问题，不管近似函数是否连续可微，只要 h 收敛性存在，则 p 收敛性也必定存在。巴布斯卡(Babuska)和他的同事则进一步从数学上证明了 p 收敛性优于 h 收敛性。此外，一些典型结构静、动、断裂问题的数值研究结果也已表明，p 收敛方法确实要比 h 收敛方法优越得多。

虽然 p 收敛方法比 h 收敛方法优越，但升阶谱有限元的应用却远不如常规位移有限元那样普遍。除了历史性的因素外，前者确也存在一些自身的问题。例如，在 p 收敛方法中，有时要用到高阶甚至很高阶的多项式函数作为附加自由度的基底函数，从而可能出现数值稳定性问题。这个问题解决不好，势必限制升阶谱有限元法的应用和不能发挥其 p 收敛特性的优点。诸德超的研究成果[3]表明，对于一维或正规域内的二维或三维问题，这种数值困难是完全可以克服的。

虽然有限元方法的理论完善、用法灵活，但在处理无限域、大变形和爆炸等问题中却遇到了边界模拟和网格畸变等难题。值得庆幸的是，边界离散方法和无网格方法较好地弥补了有限元方法的这一不足。

力学边值问题的解要同时满足域内控制微分方程和边界条件。相对而言，求出只满足域内控制方程的基本解是比较容易的，对于具有复杂区域或复杂边界的问题更是如此。边界元方法 BEM(Boundary Element Methods)[4-6]是利用基本解把域内微分方程转化为边界积分方程，再用边界条件和边界离散技术进行求解的一类方法。边界元法把原问题的维数减少了一维，具有比有限元法和有限差分法的未知数少且分布在边界上的优点。与有限元方法相比，在无限域、边界裂纹和应力集中等问题中，边界元法具有优越性，并且其单元网格剖分比有限元

方法容易,单元类型也仅包含线和面单元。

在有限元法和边界元法中,位移函数是在单元级上构造的,其精度依赖于单元的形状、大小和结点配置。在处理诸如金属冲压成型、高速冲击、裂纹动态扩展、流体与固体耦合等涉及大变形和移动边界的问题时,由于网格可能发生严重扭曲,往往需要网格重构,不但精度受到严重影响,计算量也大幅提高,因此单元类方法在这些领域的应用遇到了困难。无网格方法[7-10]的位移函数是在点的邻域内构造的,并且这些区域是可以重叠的,因此在处理大变形和移动边界等问题时,没有网格的初始划分和重构问题,这不仅利于提高这类问题的计算精度,还可以减小数值计算的难度。

前述有限元方法、边界元方法和无网格方法不仅功能强大、优势互补,而且还可以联合使用,以解决绝大多数的工程问题。对于动力学问题而言,一般的解法是把空间坐标离散化而得到动力学常微分方程,再利用直接积分方法和叠加方法(对线性系统而言)进行求解。用有限元等方法来离散空间坐标所得到的动力学方程,描述了系统的运动学特性和动力学特性。经典的动力学差分算法如 Runge - Kutta 方法等都存在累加的能量耗散和相位误差问题,它们既不保证运动学特性,也不保证动力学特性,通常适用于短时或瞬态问题。冯康[11]等人从理论上清楚地阐明了经典的动力学算法导致能量耗散的根本原因,并建立了哈密尔顿(Hamilton)系统辛几何算法。无论对于线性还是非线性 Hamilton 系统,辛算法都解决了能量耗散问题,具有优越的长期跟踪性能,尤其适合计算运动学轨道等问题。但是,辛算法仍然存在相位误差累积问题,因此动力学特性得不到完全保证。

实际物理系统都有不同程度的非线性。比如,在热传导分析中,材料模量、热导率和比热容等通常是与温度有关的,尤其是热辐射问题(包含温度四次方的函数)具有高度的非线性;在结构力学中,材料可能会屈服或者蠕变,即本构关系是非线性的;结构可能出现大挠度屈曲,即平衡方程和几何方程甚至本构方程都可能是非线性的;裂纹可能张开和闭合,即边界条件是非线性的。

在结构非线性问题中,刚度和载荷通常是位形的函数,此时叠加方法不再适用,解可能不唯一,加载和卸载路径可能不同,并且每个载荷步中都需要迭代计算。由此可见,非线性问题的求解远比线性问题复杂,需要兼顾求解精度、效率和成本等问题。有限元方法、边界元方法和无网格方法都已经成为求解非线性问题的有效手段,从这个意义上讲,这些方法的应用已经超越了工程的概念,成为一种数学工具。

参考文献

[1] Kardestuncer H, Norrie D H. Finite Element Handbook. New York: McGraw-Hill Book Company, 1987.

[2] Zienkiewicz O C, Gago J P De S R, Kelly D W. The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis. Computers & Structures, 1983, 16(1-4): 53-65.

[3] 诸德超. 升阶谱有限元法. 北京:国防工业出版社,1993.

[4] Brebbia C A. Progress in Boundary Element Methods. Volume 1-2. London: Pentech Press Limited, 1981.

[5] Brebbia C A, Telles J C F, Wrobel L C. Boundary Element Techniques, Theory and Applications in Engineering. NewYork: Springer-Verlag, 1984.

[6] 姚振汉，王海涛. 边界元方法. 北京：高等教育出版社，2010.
[7] 张雄，刘岩. 无网格法. 北京：清华大学出版社，2004.
[8] 刘桂荣，顾元通. 无网格法理论及程序设计. 济南：山东大学出版社，2007.
[9] 顾元通，丁桦. 无网格法及其最新进展. 力学进展，2005，35(3)：323-337.
[10] 张雄，刘岩，马上. 无网格法的理论及应用. 力学进展，2009，39(1)：1-36.
[11] 冯康，秦孟兆. 哈密尔顿系统的辛几何算法. 杭州：浙江科学技术出版社，2003.

第 1 章　变分原理

变分学研究泛函驻立值问题。变分原理以变分形式表示物理定律，即在满足一定约束条件的所有可能物体运动状态中，真实的运动状态使某物理量（如势能泛函）取极值或驻立值。变分问题可以等价地转换为微分方程问题，即物理问题可以有变分原理和微分方程两种等价的提法[1]。

在求数值解时，若从微分方程出发，可以采用差分方法。对于规则的求解域，差分方法是有效的。但从求泛函的极值或驻立值出发来求近似解，有时比从微分方程出发更为方便。因此变分法已成为计算力学的重要数学方法之一。

变分法是以变分学和变分原理为基础的一种近似计算方法。瑞利-里兹（Rayleigh - Ritz）方法是最常用的经典变分法，其主要问题是在全域内选取满足强制边界条件的基函数。有限元法是经典瑞利-里兹方法与分片插值法相结合的产物，它避免了瑞利-里兹方法中寻找基函数的困难。不规则网格的剖分使有限元法比有限差分法有更大的灵活性和广泛性。

在连续介质力学中，变分原理之所以非常重要，至少有三方面的因素：物理学中存在拉格朗日（Lagrange）极小值原理；许多物理问题的域内平衡微分方程和自然边界条件可以直接从变分原理导出；从变分原理出发，可以用简单的方式推导有限元等数值计算方法，也可以用变分原理直接计算许多问题的数值解。本章只简单介绍与有限元方法密切相关的变分原理[1-3]的基本知识。

1.1　结构力学理论基础

工程结构的主要元件是杆、梁和板壳结构。对这些简单构件的力学分析是结构力学的基础。结构力学与有限元方法具有密切的关系。对结构力学中最基本的原理进行介绍，将有助于对有限元概念的理解。实际上，独立运用下面介绍的某些方法可以直接解决一些结构力学问题。

1.1.1　胡克定律及推论

某物体在幅值为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的外力 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_n$ 作用下处于平衡状态。下面在直角坐标系中描述物体的变形和运动。设 $P_1 : P_2 : \cdots : P_n$ 不变，即各个外力同时增加或同时减小。对于线弹性物体，有如下最基本的三条假设[2]。

假设 1：物体的自然（无应力）状态和变形状态都是连续的。

满足假设 1 的物体被称为连续体。研究连续体变形和运动的力学称为连续介质力学。

假设 2：物体的弹性变形规律满足胡克（Hooke）定律，即

$$u = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \cdots + a_n P_n \tag{1.1-1}$$

式中：$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与外力 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_n$ 的幅值 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 无关，只与位移 u 的位置以及力的作用点和方向有关。实际应用中，胡克定律并不严格要求载荷与位移的关系必须是线性的。

假设 3:物体的自然(无应力)状态是唯一的,外力移去后物体恢复到自然状态。

满足上述三条基本假设的连续体被称为线弹性体。从上述三条基本假设可以得到一些重要的推论。

推论 1:叠加原理。

根据假设 2 和假设 3 可知,由式(1.1-1)表达的胡克定律与外力 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 的施加顺序无关,并且 a_1 与 $\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 无关,a_2 与 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_3,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 无关,以此类推。这就是载荷与位移关系的叠加原理。

推论 2:外力功的唯一性。

在力的作用点上且沿着力的作用方向的位移称为与力相应的位移。物体在力 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 作用下,根据胡克定律可以得到如下相应位移表达式,即

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= c_{11}P_1 + c_{12}P_2 + \cdots + c_{1n}P_n \\ u_2 &= c_{21}P_1 + c_{22}P_2 + \cdots + c_{2n}P_n \\ &\vdots \\ u_n &= c_{n1}P_1 + c_{n2}P_2 + \cdots + c_{nn}P_n \end{aligned}\right\} \tag{1.1-2}$$

式中:$u_1,u_2,\cdots,u_n$ 分别是与力 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 相应的位移,即 u_1 是 P_1 作用点的位移,且二者方向相同,u_2 是 P_2 作用点的位移,以此类推。c_{ij} 为柔度影响系数。若用 P_1 乘以式(1.1-2)的第 1 个方程,用 P_2 乘以第 2 个方程,以此类推,然后把所有结果相加,得

$$\begin{aligned} P_1u_1 + P_2u_2 + \cdots + P_nu_n = {} & c_{11}P_1^2 + c_{12}P_1P_2 + \cdots + c_{1n}P_1P_n + \\ & c_{21}P_2P_1 + c_{22}P_2^2 + \cdots + C_{2n}P_2P_n + \\ & \vdots \\ & c_{n1}P_nP_1 + c_{n2}P_nP_2 + \cdots + c_{nn}P_n^2 \end{aligned} \tag{1.1-3}$$

式(1.1-3)的结果与力 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 的施加顺序无关。在施加载荷过程中,若保持 $P_1:P_2:\cdots:P_n$ 不变,即各个外力同时增加或同时减小,则从式(1.1-2)可知,相应位移的比例 $u_1:u_2:\cdots:u_n$ 也保持不变。因此,在外力缓慢施加直至最后状态的过程中,相应位移也按比例变化直至达到最后值。在这个缓慢比例加载过程中,$\boldsymbol{P}_1$ 作的功为 $P_1u_1/2$,$\boldsymbol{P}_2$ 作的功为 $P_2u_2/2$,以此类推。从式(1.1-3)可以推断,外力总功与外力施加的顺序无关,即外力功是唯一的。

推论 3:功的互等定理。

从外力功与载荷施加顺序无关的特点,可以证明如下 Maxwell 互等关系,即

$$c_{ij} = c_{ji} \tag{1.1-4}$$

从式(1.1-2)还可以得到如下 Betti-Rayleigh 功的互等定理,即

$$P_1u_1' + P_2u_2' + \cdots + P_nu_n' = P_1'u_1 + P_2'u_2 + \cdots + P_n'u_n \tag{1.1-5}$$

式中:$u_1,u_2,\cdots,u_n$ 分别是力 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的相应位移,$u_1',u_2',\cdots,u_n'$分别是力 $P_1',P_2',\cdots,P_n'$的相应位移。值得指出的是,式(1.1-5)中的广义外力可以包括力、扭矩和力偶等,对应的广义位移为位移、扭角和转角等。

推论 4:Castigliano 定理。

在下面的介绍中,忽略物体的热力学效应。若加载过程非常缓慢,则可以忽略物体的动能,因此外力功与物体内能相等。若物体在无应力自然状态时的内能等于零,则称具有这种性质的内能为应变能。从式(1.1-3)和式(1.1-4)可以得到应变能 U 的表达式为