数学

升级版

TAN JIU YING YONG XIN SI WEI

探究应用新思维

九年级

★蔚蓝的思维
★清澈的理性
★经典的传承
★创新的发展

黄东坡 著

湖北长江出版集团
湖北人民出版社

数学

探究应用新思维

责任编辑　邹桂芬　熊昕绘
装帧设计　汉工作室

本丛书依据课程标准新理念，重新审视传统考试的得与失，重新评估考试命题的新与旧，重新思考当前教学的进与退。以“注重探究，强化应用”为宗旨，解构与重筑从基础到能力的科学培训新路。

黄东坡　数学教育学硕士，国家级骨干教师，数学奥林匹克高级教练。

从《新帮手》的解题思维评价到《新方法》的思想方法总结，再到《新思维》的数学文化感悟，他完成了数学学习指导的三部曲，也完成了数学教育的三级跳。

人文关怀，诗意表达，于理性中饱含着激情，在抽象中凝集着形象，他的作品以独特的视角从一个侧面诠释了近十年来数学教育、考试命题的变化趋势与新特点。由于其中承载了独特的思想和特殊的价值，赢得了广大读者的赞誉，成为全国百余所名校开展数学课外活动的首选或必备的读物。

联系地址：武汉市武昌雄楚大街268号
湖北出版文化城B座16楼（发行部）
邮　　编：430070
电　　话：027-87679639
作者地址：湖北省水果湖第二中学
邮　　编：430071
东坡热线：027-87309112

ISBN 978-7-216-06398-2
定价：25.00元

升级版

TAN JIU YING YONG XIN SI WEI

探究应用新思维

数学

九年级

黄东坡 著

湖北长江出版集团
湖北人民出版社

鄂新登字 01 号
图书在版编目(CIP)数据

数学探究应用新思维·升级版·九年级/黄东坡著.
武汉:湖北人民出版社,2010.5
ISBN 978-7-216-06398-2

Ⅰ.数…
Ⅱ.黄…
Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 070953 号

数学探究应用新思维·升级版
九年级

黄东坡　著

出版发行:湖北长江出版集团
湖北人民出版社

地址:武汉市雄楚大街 268 号
邮编:430070

印刷:巴东县三峡印刷厂
开本:880 毫米×1230 毫米 1/16
字数:438 千字
版次:2010 年 5 月第 1 版
印数:1-20 000
书号:ISBN 978-7-216-06398-2

经销:湖北省新华书店
印张:15
定价:25.00 元
印次:2010 年 5 月第 1 次印刷

本社网址:http://www.hbpp.com.cn

与时俱进的“新思维”
——升级版说明

当新课程从实验走进常态，我们在经历了新旧思想的碰撞、传统观念与现代理念的交融所带来的阵痛后，也感受到新课程带来的巨变与希望。

澳大利亚教育学会主席 J. Bacr 教授说：教师是一把钥匙，这钥匙应该充满魔力，可以打开许多门，门外的道路至少有三条——实际应用、知识的深入理解和探索性思维的培养。

探究与应用是课程标准中的两个关键词，新增内容对传统内容的渗透，影响考试命题的立意、设问与呈现方式；平面几何淡化证明技巧，通过图形变换、实验操作、运动变化，引导探索与发现；新中考关注对学习新知识的能力、搜集处理信息的能力、合情推理能力、猜想论证及提出新问题的能力的考查。

为了及时反映这种变化，笔者从以下两个方面对原书进行了修订。

1.调整内容，展现课程改革新成果

修订过程中，增加了“自然数的排序”、“供应站的最佳位置的确定”、“平面镶嵌”、“s-t 图象问题”、“面积与反比例函数”、“勾股定理再探索”、“滚动的圆”、“圆的平面覆盖”等数学小品，它们清新活泼，趣味盎然，旨在为教师开展探究或应用性活动，提供翔实的素材。

修订过程中，增补了“图形与坐标”、“函数与方程、不等式”、“坐标系中的图形变换”、“抛物线的平移、翻折与旋转”等内容，力图反映新课程理念，展现课程改革新成果，即新课程以创新精神与实践能力为重点，强化知识间内在联系的揭示。

2.更换问题，反映命题创意新特点

修订过程中，在保留部分精典问题的基础上，增补近年优秀的中考试题、竞赛试题，通过新问题反映命题创意新特点，即能力立意，注重问题的情境性、应用性、开放性及探索性，关注知识的整合、生成与发展，着意对归纳类比、推广发现能力的考查。

黄东坡

2010 年 5 月于湖北省水果湖第二中学

目录

数与代数

空间与图形

目录（续）

统计与概率

伯恩哈德·黎曼（1826—1866），德国著名数学家．黎曼研究数学创立的以他名字命名的几何学，是爱因斯坦广义相对论的数学基础，没有黎曼几何学之助，广义相对论的理论大厦便无从构建．“黎曼猜想”在很多数学家眼里，是比哥德巴赫猜想更有价值的数学猜想．20世纪数学大师希尔伯特说过：“如果我在一千年以后复活，第一个问题就是，黎曼猜想解决了没有．”

1 二次根式的运算

解读课标

式子$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$叫二次根式，二次根式的性质是根式化简的依据，而化二次根式为最简根式，又是根式运算的基础，常用的基本性质有：

1. $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$；

2. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$；

3. $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0)$；

4. $\sqrt{a^2}=|a|$.

最简二次根式、同类二次根式是二次根式中重要概念，因为二次根式的加减实质就是合并同类二次根式．

二次根式的运算是在整式、分式运算的基础上发展起来的，因此，恰当运用公式、分解因式、字母化等是二次根式运算中的常用技巧．

问题解决

例1 已知$a<0$，化简$\sqrt{4-(a+\frac{1}{a})^2}-\sqrt{4+(a-\frac{1}{a})^2}=$________.

（宁波市中考题）

试一试 从化简被开方数入手，注意$\sqrt{a}$中$a\geqslant 0$的隐含制约．

视野窗

英国著名数学家赫尔曼·韦尔总结20世纪前半叶的数学历史时，这样说：“希尔伯特问题就像一张航图，在过去50年间，数学家总是按照这张航图来衡量他们的进步．”

被开方数的因数是整数、因式是整式，且被开方数中不含能开得尽方的因数或因式，这样的二次根式叫最简二次根式．

同类二次根式的条件是：

(1)最简二次根式；

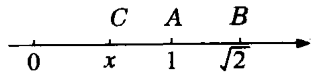
(2)被开方数（或式）相同．

二次根式通过$\sqrt{a^2}=|a|$与绝对值有机联系起来，有些二次根式问题可以转化为绝对值问题加以解决．

想一想

$(\sqrt{a})^2$与$\sqrt{a^2}$有怎样的区别与联系？

例 2 如图，数轴上与 1、$\sqrt{2}$对应的点分别为 A、B，点 B 关于点 A 的对称点为 C，设点 C 表示的数为 x，则 $|x-\sqrt{2}|+\frac{2}{x}=$(　　).



A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. 2

(2009 年深圳市中考题)

试一试　B 点到 A 点的距离等于 A 点到 C 点的距离，由此求出 x 值.

例 3　计算

(1)$(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})$；

(2)$(\sqrt{3}+1)^{2001}-2(\sqrt{3}+1)^{2000}-2(\sqrt{3}+1)^{1999}+2001$；

(天津市竞赛题)

(3)$\frac{\sqrt{1997}}{(\sqrt{1997}-\sqrt{1999})(\sqrt{1997}-\sqrt{2001})}+\frac{\sqrt{1999}}{(\sqrt{1999}-\sqrt{1997})(\sqrt{1999}-\sqrt{2001})}+\frac{\sqrt{2001}}{(\sqrt{2001}-\sqrt{1997})(\sqrt{2001}-\sqrt{1999})}$.

("希望杯"邀请赛试题)

试一试　对于(2)，先提取公因式$(\sqrt{3}+1)^{1999}$；对于(3)，设$\sqrt{1997}=a$，$\sqrt{1999}=b$，$\sqrt{2001}=c$，把二次根式的运算化为分式的运算.

例 4　阅读材料：

黑白双雄、纵横江湖；双剑合璧，天下无敌．这是武侠小说中的常见描述，其意是指两个人合在一起，取长补短，威力无比．在二次根式中也有这种相辅相成的"对子"．如：$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$，$(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})=3$，它们的积不含根号，我们说这两个二次根式互为有理化因式，其中一个是另一个的有理化因式．于是，二次根式除法可以这样解：如$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$．像这样，通过分子、分母同乘以一个式子把分母中的根号化去或把根号中的分母化去，叫做分母有理化．

解决问题：

(1)$4+\sqrt{7}$的有理化因式是________，$\frac{2}{3\sqrt{2}}$分母有理化得________.

(2)计算：

①$\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\sqrt{27}-6\sqrt{\frac{1}{3}}$；

(陕西省中考题)

视野窗

运用二次根式性质解题时，既要注意每一性质成立的条件，又要学会性质的"正用"与"逆用".

二次根式的除法一般要通过分母有理化来进行，利用平方差公式找出分母有理化因式是常用的方法，如

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$；

$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$.

②$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2004}}$.

（全国初中数学联赛题）

(3)已知 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$，$y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$，求 x^4+y^4 的值.

（天津市竞赛题）

试一试 对于(3)，把 x、y 分母有理化，将 $x+y$、xy 的结果整体代入求值.

例 5 已知 $a=\sqrt{7}-1$，求代数式 $3a^3+12a^2-6a-12$ 的值.

（2009 年全国初中数学联赛题）

试一试 若直接代入计算，则显然较繁. 由 $a=\sqrt{7}-1$ 得 $a+1=\sqrt{7}$，两边平方整理得 $a^2+2a=6$，把待求式用 a^2+2a 表示.

视野窗

把无理式有理化是解二次根式问题的重要策略，有理化的常用方法是：

(1)把被开方式改为完全平方式；

(2)乘有理化因式；

(3)主动平方，利用平方关系，如 $(\sqrt{a})^2=a$.

数学冲浪

知识技能广场

1. 函数 $y=\sqrt{2-x}+\frac{1}{x-3}$ 中自变量 x 的取值范围是________.

（2009 年兰州市中考题）

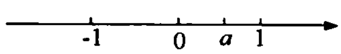
2. 计算：

(1)$\frac{2}{\sqrt{2}-1}-(\frac{1}{2})^{-1}+\sqrt{18}=$________；

（广西玉林市中考题）

(2)$\frac{\sqrt{12}+\sqrt{27}}{\sqrt{3}}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=$________；

（河南省中考题）

(3)已知实数 a 在数轴上的位置如图所示 

，则化简 $|1-a|+\sqrt{a^2}$ 的结果为________.

（2009 年长沙市中考题）

视野窗

3. 观察下列各式：$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$，$\sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$，$\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$…请你将猜想到的规律用含自然数 $n(n\geqslant1)$ 的代数式表示出来是________.

（山西省中考题）

4. 已知 $x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$，计算代数式$\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)$的值为____.

（2009 年荆州市中考题）

5. 若 x,y 为实数，且 $|x+2|+\sqrt{y-2}=0$，则$\left(\frac{x}{y}\right)^{2009}$的值为（　　）.

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

（2009 年天津市中考题）

6. 若$\sqrt{x-1}-\sqrt{1-x}=(x+y)^2$，则 $x-y$ 的值为（　　）.

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 3

（2009 年荆门市中考题）

7. 若化简$|1-x|-\sqrt{x^2-8x+16}$的结果为 $2x-5$，则 x 的取值范围是（　　）.

A. x 为任意实数　　B. $1\leqslant x\leqslant4$

C. $x\geqslant1$　　D. $x\leqslant4$

（杭州市中考题）

8. 已知整数 x、y 满足$\sqrt{x}+2\sqrt{y}=\sqrt{50}$，那么整数对$(x,y)$的个数是（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

（第 19 届江苏省竞赛题）

9. 计算：

(1) $(\sqrt{6}-2\sqrt{15})\times\sqrt{3}-6\sqrt{\frac{1}{2}}$；

(2) $\sqrt{18}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}-8\sqrt{\frac{1}{2}}$；

(3) $\sqrt{18}-\sqrt{\frac{9}{2}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}+(\sqrt{3}-2)^0+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

（2009 年烟台市中考题）

10. 已知 $x=1+\sqrt{2}$，求代数式$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}-\frac{x}{x-1}$的值.

（宁波市中考题）

思想方法天地

11. 计算$\sqrt{2005\times2006\times2007\times2008+1}-2006^2$ 的结果是________.

12. 当 $1\leqslant x\leqslant2$ 时，化简$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=$________.

（2009 年北京市竞赛题）

13. 已知 $x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，则 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=$________.

（“希望杯”邀请赛试题）

14. 当 $a=-\frac{1}{2+\sqrt{5}}$，化简 $\frac{9-6a+a^2}{a-3}+\frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$ 的结果是________.

（河南省竞赛题）

15. 已知 $x+\frac{1}{x}=7(0<x<1)$，则 $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的值为（　　）.

A. $-\sqrt{7}$　　B. $-\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{7}$　　D. $\sqrt{5}$

（2009 年天津市竞赛题）

16. 化简 $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ 所得的结果为（　　）.

A. $1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$　　B. $1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$

C. $1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$　　D. $1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

（武汉市选拔赛试题）

17. 已知 $2x-3\sqrt{xy}-2y=0(x>0)$，则 $\frac{x^2+4xy-16y^2}{2x^2+xy-9y^2}$ 的值是（　　）.

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{16}{25}$　　D. $\frac{16}{27}$

（太原市竞赛题）

18. 已知 $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}=2$，则 $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$ 的值为（　　）.

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

（山东省竞赛题）

19. 设 $x=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，$y=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$，$n$ 为自然数，如果 $2x^2+197xy+2y^2=1993$ 成立，求 n 的值.

20. 先阅读再化简求值.

(1)在化简 $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ 的过程中，小王和小李的化简结果不一样：

小王的化简过程如下：

原式 $=\sqrt{2-2\sqrt{2\times5}+5}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}=\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

小李的化简过程如下：

原式 $=\sqrt{(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

请判断谁的化简结果正确，并说明理由.

(2)化简求值：已知 $x=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$，求 $(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2})\cdot\frac{x^2-4}{2(x-1)}$ 的值(结果保留根号).

（云南省中考题）

应用探究乐园

视野窗

21. 我国古代数学家秦九韶在《数书九章》中记述了"三斜求积术",即已知三角形的三边长,求它的面积. 用现代式子表示即为:$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}$…①(其中$a$、$b$、$c$为三角形的三边长,$S$为面积). 而另一个文明古国古希腊也有求三角形面积的海伦公式:$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$…②(其中$p=\frac{a+b+c}{2}$).

(1)若已知三角形的三边长分别为5,7,8,试分别运用公式①和公式②,计算该三角形的面积S;

(2)你能否由公式①推导出公式②? 请试试.

(浙江省台州市中考题)

22. 已知$\sqrt{7x^2+9x+13}+\sqrt{7x^2-5x+13}=7x$,求$x$的值.

(全国初中数学联赛题)

数海拾贝

世纪的宣言——希尔伯特问题

1900年8月,第二次国际数学家大会在法国美丽的首都巴黎举行.

这一天,著名的德国数学家希尔伯特正开始他即将影响整个世纪数学进程的精彩演讲:"有谁不想揭开未来的帷幕,看一看今后的世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘? 有谁不想知道我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标? 在广阔而丰富的数学思想领域里,新世纪将会带来什么样的新方法和成果?"希尔伯特那极富感染力的演讲深深吸引住了与会的数学家们. 紧接着他向与会者提出了23个数学问题作为献给20世纪数学界的丰厚礼物,这便是数学史上极负盛名的"希尔伯特问题".

科学发展的每一个时代都有自己的问题,希尔伯特站在数学研究的最前沿,高瞻远瞩地用23个数学问题,预示20世纪数学发展的进程. 百年来,人们把解决希尔伯特问题,哪怕是其中一部分,都看成是至高无上的荣誉,时至今日,时光已过去一百多年,这23个问题约有一半获得解决,有一些已经取得重大进展,有一些,仍然悬而未决.

据统计,1936—1974年间,荣获数学界的最高奖项菲尔兹奖的20位数学家中至少有12人的工作与希尔伯特问题有关.

重要的问题历来是推动科学前进的杠杆之一,但一位科学家如此自觉、如此集中地提出一整批问题,并且如此持久地影响一门学科的发展,在科学史上是罕见的.

大数学家外尔在悼念希尔伯特时曾这样说:"希尔伯特就像穿杂色衣服的风笛手,他那甜蜜的笛声诱惑了如此众多的老鼠,跟着他跳进数学的深河."

阿贝尔(1802—1829),挪威数学家．自16世纪以来,随着三次、四次方程陆续解出,人们把目光落在五次方程的求根公式上,然而近300年的探索一无所获,阿贝尔证明了一般五次方程不存在求根公式,解决了这个世纪难题.在挪威皇宫有一尊阿贝尔的雕像,这是一个大无畏的青年的形象,他的脚下踩着两个怪物——分别代表五次方程和椭圆函数.

2 一元二次方程

解读课标

配方法、公式法、因式分解法是解一元二次方程的基本方法．因式分解法体现了“降次求解”的基本思想,公式法具有一般性．善于根据方程的特征,灵活选用恰当的解法,是解一元二次方程的关键,选择方法的一般顺序是:先特殊后一般．即先考虑因式分解法、配方后直接开平方,再考虑公式法．

有些与一元二次方程相关的问题,常常不是去解这个方程,而是通过变形降次、整体代入等技巧方法,促使问题的解决．

问题解决

例 1 阅读下面的例题:

解方程:$x^2-|x|-2=0$.

解:(1)当 $x\geqslant 0$ 时,原方程化为 $x^2-x-2=0$,

解得 $x_1=2$,$x_2=-1$(不合题意,舍去).

(2)当 $x<0$ 时,原方程化为 $x^2+x-2=0$,

解得 $x_1=1$(不合题意,舍去),$x_2=-2$.

∴ 原方程的根是 $x_1=2$,$x_2=-2$

请参照例题解方程 $x^2-|x-3|-3=0$,则方程的根是________.

(晋江市中考题)

试一试 通过讨论,脱去绝对值符号,把绝对值方程转化为一般的一元二次方程来解.

视野窗

我想试试(I'll Try)

——英·罗赛蒂

那个说“我想试试”的小孩

他将登上山巅

那个说“我不成”的小孩

在山下停步不前

“我想试试”每天办成很多事

“我不成”就真一事无成

因此你务必说“我想试试”

将“我不成”弃于埃尘.

对于例1(1),还可利用 $x^2=|x|^2$,将问题转化为解方程:$|x|^2-|x|-2=0$.

想一想

已知 α、β 是方程 $2x^2-3|x|-2=0$ 的两个实数根,求代数式 $\dfrac{\alpha\beta}{|\alpha|+|\beta|}$ 的值.

例 2 根据关于 x 的一元二次方程 $x^2+px+q=0$，可列表如下：

x	0	0.5	1	1.1	1.2	1.3
x^2+px+q	-15	-8.75	-2	-0.59	0.84	2.29

则方程 $x^2+px+q=0$ 的正数解满足(　　).

A. 解的整数部分是 0，十分位是 5　　B. 解的整数部分是 0，十分位是 8

C. 解的整数部分是 1，十分位是 1　　D. 解的整数部分是 1，十分位是 2

(南通市中考题)

试一试 从表中获取信息，先求出 p、q 的值.

例 3 设 x_1、x_2 是方程 $x^2+x-4=0$ 的两个实数根，求代数式 $x_1{}^3-5x_2{}^2+10$ 的值.

(第 21 届江苏省竞赛题)

试一试 若先求出 x_1、x_2 的值，再代入计算，显然较繁，根据根的定义，从变形方程入手.

例 4 先请阅读材料：

为解方程 $(x^2-1)^2-5(x^2-1)+4=0$，我们可以将 x^2-1 视为一个整体，然后设 $x^2-1=y$，则 $(x^2-1)^2=y^2$，原方程化为 $y^2-5y+4=0$，解得 $y_1=1$，$y_2=4$.

当 $y=1$ 时，$x^2-1=1$，得 $x=\pm\sqrt{2}$；当 $y=4$ 时，$x^2-1=4$，得 $x=\pm\sqrt{5}$.

故原方程的解为 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$，$x_3=\sqrt{5}$，$x_4=-\sqrt{5}$.

在解方程的过程中，我们将 x^2-1 用 y 替换，先解出关于 y 的方程，达到了降低方程次数的目的，这种方法叫作“换元法”，体现了转化的数学思想.

请你根据以上的阅读，解下列方程：

(1)$x^4-x^2-6=0$；

(2)$(\frac{1}{2}x-1)^2-(\frac{1}{2}x-1)-1=0$.

试一试 在阅读材料的基础上理解问题，解题的关键是把方程中有关联的部分用一个新字母代替.

视野窗

不解方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，常见的变形方法有：

(1)$ax^2+bx=-c$；

(2)$ax^2=-bx-c$；

(3)$ax+\frac{c}{x}=-b$.

其中(1)、(2)体现了“降次”代换的思想，(3)则是构造倒数关系作等值代换.

在解答数式、方程等问题时，常面临涉及到的数式结构过于复杂、字母个数较多或次数较高等情况，若把一部分看成一个整体或用一个新字母代替，则能达到化繁为简的目的，这种方法叫换元法.

例 5 已知 $a>2,b>2$，试判断关于 x 的方程 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 与 $x^2-abx+(a+b)=0$ 有没有公共根，请说明理由．

（河南省中考题）

试一试 由于其中一个方程根的表达形式复杂，所以可设出两方程的公共根 m，建立 a 的等式，通过消去 a 的二次项寻找解题突破口，这是解公共根问题的基本策略．

视野窗

公共根问题是一元二次方程常见问题，解这类问题的基本方法有：

(1)若方程便于求出简单形式的根，利用公共根相等求解；

(2)设出公共根，设而不求，消去二次项．

数学冲浪

知识技能广场

1. 在实数范围内定义一种运算“※”，其规则为 $a※b=a^2-b^2$，根据这个规则，方程 $(x+2)※5=0$ 的解为________．

（兰州市中考题）

2. 若分式 $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}$ 的值为 0，则 x 的值等于______．

（2009 年天津市中考题）

3. (1)用换元法解方程：$x^2+x+1=\dfrac{2}{x^2+x}$，如果设 $y=x^2+x$，那么原方程化为关于 y 的一元二次方程的一般形式为__________．

（河北省中考题）

(2)用换元法解分式方程 $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{3x}{x-1}+1=0$ 时，如果设 $\dfrac{x-1}{x}=y$，将原方程化为关于 y 的整式方程，那么这个整式方程是__________．

（2009 年上海市中考题）

4. 下面是李刚同学在一次测验中解答的填空题，其中答对的是(　　)．

A. 若 $x^2=4$，则 $\underline{x=2}$

B. 方程 $x(2x-1)=2x-1$ 的解为 $\underline{x=1}$

C. 若方程 $(m-2)x^{|m|}+3mx-1=0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 $\underline{m=-2}$

D. 若分式 $\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ 的值为零，则 $\underline{x=1,2}$

（山西省中考题）

5. 设 a、b 是方程 $x^2+x-2009=0$ 的两个实数根，则 a^2+2a+b 的值为(　　)．

A. 2006　　B. 2007　　C. 2008　　D. 2009

（2009 年烟台市中考题）

6. 严老师出示了小黑板上的题目(如下面方框中所示)，小敏回答：“方程有一根为 1”，小聪回答：“方程有一根为 2”，则你认为(　　)．

已知方程 $x^2-3x+k+1=0$，试添加一个条件，使它的两根之积为 2.

A. 只有小敏回答正确　　B. 只有小聪回答正确
C. 小敏、小聪回答都不正确　　D. 小敏、小聪回答都正确

（绍兴市中考题）

7. 解下列方程：
(1)$x^2-|x|-1=0$；
(2)$(x^2-2x)^2+(x^2-2x)-2=0$；
(3)$\frac{x^2-2}{x}+\frac{2x}{x^2-2}=3$.

8. 已知关于 x 的方程 $x^2+kx-2=0$ 的一个解与方程$\frac{x+1}{x-1}=3$ 的解相同.
(1)求 k 的值；
(2)求方程 $x^2+kx-2=0$ 的另一个解.

（大连市中考题）

9. 若 0 是关于 x 的方程$(m-2)x^2-3x+m^2+2m-8=0$ 的解，求实数 m 的值，并讨论此方程解的情况.

（四川省中考题）

思想方法天地

10. 已知 α、β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根，那么 $\alpha^4+3\beta$ 的值为______.

（天津市竞赛题）

11. 已知 a、b 都是负实数，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a-b}=0$，那么$\frac{b}{a}$的值是________.

12. **回归出发点**

在解决数学问题时，我们经常要回到基本定义与基本方法思考. 试利用方程的解的定义及解方程组的基本方法解决以下问题：

已知 a 是关于 x 的方程 $x^2-(2k+1)x+4=0$ 及 $3x^2-(6k-1)x+8=0$ 的公共解，则 $a=$________，$k=$________.

（第 3 届《时代学习报》数学文化节试题）

13. 方程$(x^2+x-1)^{x+3}=1$ 的所有整数解的个数是(　　).
A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

14. 设 x_1、x_2 是二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根，那么 $x_1^3-4x_2^2+19$ 的值等于(　　).
A. -4　　B. 8　　C. 6　　D. 0

15. 已知三个关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，$bx^2+cx+a=0$，$cx^2+ax+b=0$ 恰有一个公共实数根，则$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}$的值为(　　).
A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

（全国初中数学竞赛题）

16. 是否存在某个实数 m，使得方程 $x^2+mx+2=0$ 和 $x^2+2x+m=0$ 有且只有一