优等生数学教程

高中第四册

（共四册）

上海十大名牌高中联编

直击名牌大学

主编■熊　斌　徐斌艳

本册核心作者

曹建华（交大附中）

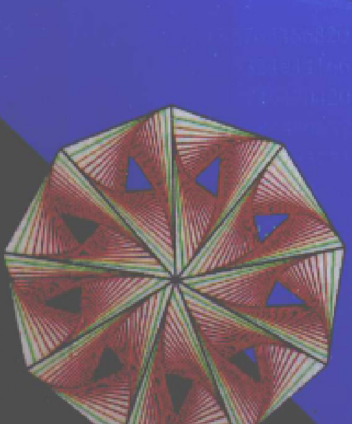
杨岚清（大同中学）

刘　云（复旦附中）

吴瑾辉（延安中学）

刘　寅（复兴高级中学）

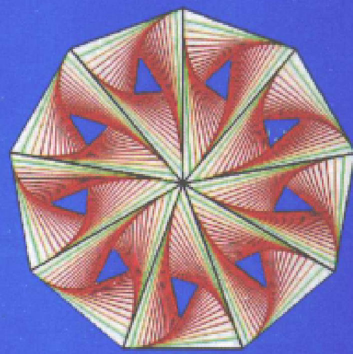
陈双双（华东师大二附中）



华东师范大学出版社

漩 涡

水流经过低洼处有时会产生漩涡，这是自然界常见的现象。漩涡也可以人为制造，把手伸进水桶里不断地绕一个方向搅拌，就会产生漩涡。



我们还可以作出“漩涡”状的图形来。

任意作一个三角形，再作一个与之相似的内接三角形；在第二个三角形内作与之相似的三角形；依次不断地作下去……我们将会惊奇地发现：原本做的都是直线段，但在完成的图形中却隐隐约约出现了曲线。

上图是在正九边形中，分别对九个全等的三角形进行上述操作，从而产生了多个“漩涡”的视觉效果。

有兴趣的读者可以采用动态几何软件——《超级画板》自行绘制。

（彭翕成）

ISBN 978-7-5617-7343-7

9 787561 773437 >

定价：22.00元

www.ecnupress.com.cn

优等生数学教程

高中第四册

主编 ■ 熊　斌　徐斌艳

本册核心作者

曹建华（交大附中）
杨岚清（大同中学）
刘　云（复旦附中）
吴瑾辉（延安中学）
刘　寅（复兴高级中学）
陈双双（华东师大二附中）

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

优等生数学教程. 高中. 第4册/熊斌,徐斌艳主编.
—上海:华东师范大学出版社,2009
(优等生数学)
ISBN 978-7-5617-7343-7

Ⅰ.优... Ⅱ.①熊...②徐... Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第210468号

优等生数学教程

高中第四册

主　　编　熊　斌　徐斌艳
策　　划　倪　明(数学工作室)
组　　稿　任念兵
审读编辑　石　岩
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
电话总机　021-62450163转各部门　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　江苏句容排印厂
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　12.75
字　　数　230千字
版　　次　2010年1月第一版
印　　次　2010年1月第一次
印　　数　11000
书　　号　ISBN 978-7-5617-7343-7/G·4232
定　　价　22.00元

出 版 人　朱杰人

前　言

亲爱的同学，如果你是一位优秀、好学、勤奋、热爱数学的学生，在学习现有教材的同时，你一定渴望有挑战自己智力又充满探究情趣的课程内容．满足你的需要是我们的义务和责任，为提高你的数学思维能力，发挥你学习数学的潜力，我们组织编写了《优等生数学教程》．希望这套教程能帮助你尽快成为一名优等生．

在21世纪的钟声敲响之时，我国迎来了新一轮的数学课程改革，它首先体现在课程和教材的多样化和多元化．新一轮的课程改革鼓励我们为学有余力、学有特长的学生设计、开发专门的校本课程，让那些学生在打好扎实基础的同时，能寻找到适合他们智力水平发展的课程内容，学习到满足自己学习需求的数学内容和思想方法，作为数学教育工作者，我们应义不容辞地承担起这一任务．

在策划编写本书的过程中，我们特别邀请了熟悉数学课程改革目标、具有丰富教学经验、又拥有高深数学专业水平的优秀教师直接参与．我们与这些优秀的编写者汇聚在一起，认真解读数学课程标准的要求，结合数学教学内容的实际需求，尤其是系统分析优秀学生的学习特点，设计出了富有特色的教程结构，然后大家通力合作、沟通协商，充分发挥自己的智慧，编写出这套教程．

这套教程包括如下几个栏目：

知识要点：为你梳理本单元涉及的知识重点和难点，提供一个知识网络．

典型例题：为你提供有代表性的数学例题，并且利用“解题指要”点拨解决每个例题的关键步骤和所包含的数学思想方法．

寻根问底：为你解答知识要点的来龙去脉，介绍相关的知识背景．

举一反三：为你提供巩固型的例题，加深对问题的理解，提高解题技能．

融会贯通：为你创设问题情境，让你充分发挥对知识的理解．

参考答案：提供解题的线索或者答案，帮助你进行学习的自我评价．

本章回顾：再次帮助你梳理所经历的概念性知识和应用性知识.

根据目前的教学情况，我们将高中的《优等生数学教程》分成四册.同时，我们还配套设计了《优等生数学习题集》，这是一个精心筛选后形成的习题库，每道习题的解答一方面检验你对数学知识的掌握程度，另一方面检验你对习题背后所涉及的思想方法的理解程度.这也是一本很适合你静静阅读、深入思考以及充分练习的“习题集”，与教程结合使用，才能达到预期的效果.

本书是这套教程中的高中第四册，适合上海市高中二、三年级的学生使用，其内容包括空间直线与平面、简单几何体、空间向量及其应用、排列组合和二项式定理、概率论初步、基本统计方法等六章.第 15 章由交大附中的曹建华和陈海兵老师编写；第 16 章由大同中学的杨岚清老师编写；第 17 章由复旦附中的刘云老师编写；第 18 章由延安中学的吴瑾辉和张雄老师编写；第 19 章由复兴高级中学的刘寅和薛建国老师编写；第 20 章由华东师大二附中的陈双双和王明玉老师编写.

对我们而言，编写主要供优等生使用的教程是一次尝试，定有不足之处，欢迎提出批评和建议，以便日臻完善.

熊　斌　徐斌艳

2009.12

目录_Contents

第15章 空间直线与平面

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科，有关空间几何的知识属于立体几何范畴. 立体几何知识在测量、绘图等方面有着广泛的应用，是学生进一步学习必不可少的基础. 本章所要研究的直线和平面是立体几何的基础部分，通过建立空间平面的概念，讨论空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，尝试在空间几何中进行简单的演绎论证，并且计算它们的夹角和距离.

15.1 平面及其基本性质

平面的概念和平面的性质是立体几何全部理论的基础. 平面是现实世界存在着的客观事物形态的数学抽象,在立体几何中是只描述而不定义的原始概念,但平面是把三维空间图形转化为二维平面图形的主要媒介,在立体几何问题平面化的过程中具有重要的桥梁作用.

知识要点

在立体几何中,“平面”是一个不定义的原始概念,就像集合论中的“集合”的概念一样只能进行描述性的解释.

平面的两个特征:(1)无限延展;(2)平的(没有厚度).

平面的表示:

(1) 用一个大写的英文字母或一个小写的希腊字母 α、β、γ 等表示,如平面 M、平面 N、平面 α、平面 β;

(2) 用表示平行四边形的两个相对顶点的字母表示,如图 15-1 中平面 AC.

当一个平面水平放置时,通常把它画成一个内角为 45°的平行四边形,其中的一边画成水平方向,使另一边的长度等于它的一半(如图 15-1).

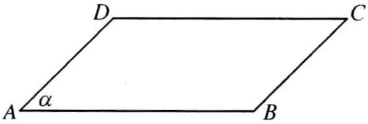


图 15-1

空间的直线和平面都可看作点的集合,点与它们的关系可用集合的语言表示,例如:

点 A 在直线 l 上或直线 l 经过点 A,记作 $A \in l$; 点 B 不在直线 l 上,记作 $B \notin l$ (如图 15-2).

点 A 在平面 α 上或平面 α 经过点 A,记作 $A \in \alpha$; 点 B 不在平面 α 上,记作 $B \notin \alpha$ (如图 15-3).

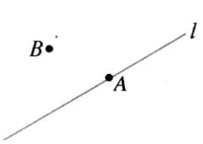


图 15-2

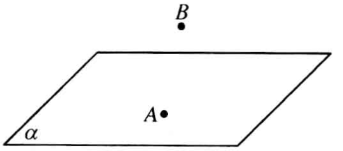


图 15-3

如果直线 l 上的所有点都在平面 α 上，那么称直线 l 在平面 α 上（或平面 α 经过直线 l），记作 $l \subsetneqq \alpha$（如图 15－4）.

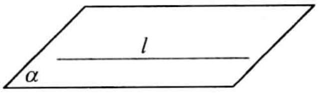


图 15－4

公理 1　如果一条直线 l 上有两点在一个平面 α 上，那么这条直线 l 在这个平面 α 上.

如果直线 l 与平面 α 只有一个公共点 A，那么称直线 l 与平面 α 相交于点 A 或称点 A 是直线 l 与平面 α 的交点. 记作 $l \cap \alpha = A$.

如果直线 l 与平面 α 没有公共点，那么称直线 l 与平面 α 平行. 记作 $l \cap \alpha = \varnothing$ 或 $l \parallel \alpha$.

直线与平面相交，把被遮住部分的线段画成虚线或不画（如图 15－5）.

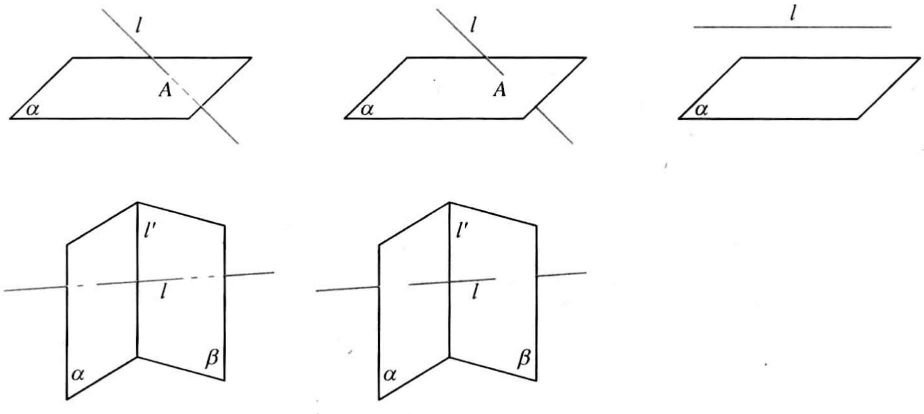


图 15－5

公理 2　如果不同的两个平面 α、β 有一个公共点 A，那么 α、β 的交集是过点 A 的直线 l.

一条直线 l 既在平面 α 内，又在平面 β 内，即 α 和 β 有一条公共的直线 l，则称 α 与 β 相交，交线是 l，记作 $\alpha \cap \beta = l$.

两个相交平面：

画两个相交平面时，若一个平面的一部分被另一个平面遮住，应把被遮住部分的线段画成虚线或不画（如图 15－6）.

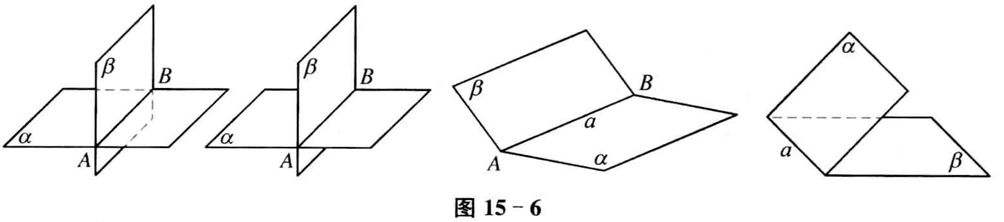


图 15－6

公理 3　不在同一条直线上的三个点，确定一个平面(这里“确定一个平面”的含义是“有且只有一个平面”).

推论 1:一条直线和直线外的一点确定一个平面(如图 15 - 7(1)).

推论 2:两条相交的直线确定一个平面(如图 15 - 7(2)).

推论 3:两条平行的直线确定一个平面(如图 15 - 7(3)).

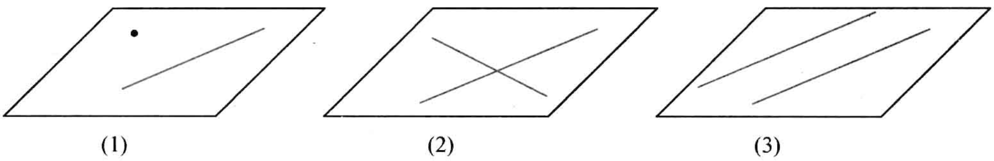


图 15 - 7

典型例题

例 1 如图 15 - 8,在四边形 $ABCD$ 中,已知 $AB \parallel CD$, 直线 AB、BC、AD、DC 分别与平面 α 相交于点 E、G、H、F. 求证:E、F、G、H 四点必定共线.

证明　因为 $AB \parallel CD$, 所以 AB、CD 确定一个平面 β.

又由于 $AB \cap \alpha = E$, $AB \subsetneq \beta$, 所以 $E \in \alpha$, $E \in \beta$, 即 E 为平面 α 与 β 的一个公共点.

同理可证 F、G、H 均为平面 α 与 β 的公共点.

因为两个平面有公共点,它们有且只有一条通过公共点的公共直线,所以 E、F、G、H 四点必定共线.

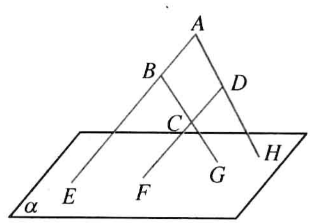


图 15 - 8

解题指要　对于点共线问题的证明,只要证明这些点都是某两个平面的公共点即可.

例 2 如图 15 - 9,点 $A \notin$ 平面 BCD, E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 上的点,若直线 EH 与 FG 交于点 P.(这样的四边形 $ABCD$ 叫作空间四边形)

求证:点 P 在直线 BD 上.

证明　因为 $EH \cap FG = P$,所以 $P \in EH$, $P \in FG$.

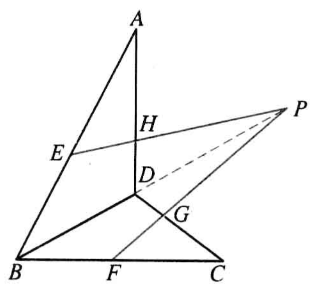


图 15 - 9

因为 $E \in AB$，$H \in AD$，所以 $EH \subsetneq$ 平面 ABD，所以 $P \in$ 平面 ABD.

同理，$P \in$ 平面 CBD.

又因为平面 $ABD \cap$ 平面 $CBD = BD$，所以点 P 在直线 BD 上.

解题指要 对于线共点问题的证明，一般是先证明某两条直线相交，然后再证明这个交点在其余直线上或者证明其余直线过这个交点.

注意：三个平面两两相交于三条直线，若这三条直线不平行，则这三条直线交于一点.

例 3 已知：a、b、c、d 是不共点且两两相交的四条直线. 求证：a、b、c、d 共面.

证明 1°若当四条直线中有三条相交于一点，不妨设 a、b、c 相交于一点 A，但 $A \notin d$，如图 15－10. 所以直线 d 和 A 确定一个平面 α.

又设直线 d 与 a、b、c 分别相交于 E、F、G，则 A、E、F、$G \in \alpha$.

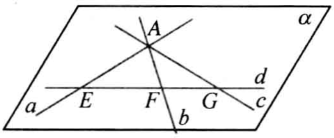


图 15－10

因为 A、$E \in \alpha$，A、$E \in a$，所以 $a \subsetneq \alpha$.

同理可证 $b \subsetneq \alpha$，$c \subsetneq \alpha$.

所以 a、b、c、d 在同一平面 α 内.

2°当四条直线中任何三条都不共点时，如图 15－11.

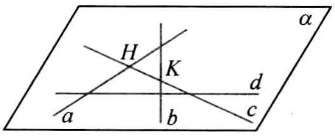


图 15－11

因为这四条直线两两相交，则设相交直线 a、b 确定一个平面 α.

设直线 c 与 a、b 分别交于点 H、K，则 H、$K \in \alpha$. 又 H、$K \in c$，所以 $c \subsetneq \alpha$.

同理可证 $d \subsetneq \alpha$.

所以 a、b、c、d 四条直线在同一平面 α 内.

解题指要 证明若干条线（或若干个点）共面可按照如下步骤进行：

(1) 由题给条件中的部分线（或点）确定一个平面；

(2) 根据公理 1 证明其余的线（或点）均在这个平面内.

本题最容易忽视“三线共点”这一种情况. 因此，在分析题意时，应仔细推敲问题中每一句话的含义.

例 4 如图 15－12，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，画出过 M、N、P 三点的截面.

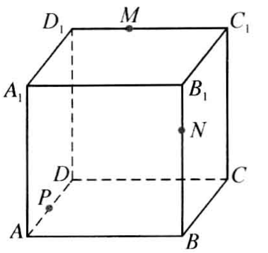


图 15－12

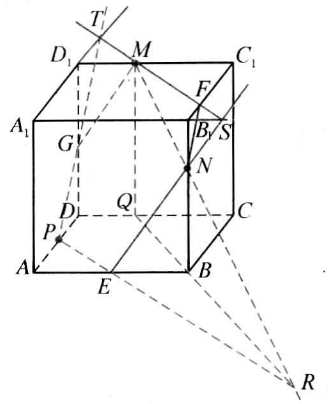


图 15－13

画法　如图 15－13,作 $MQ \perp CD$ 于 Q,连结 QB、MN 并延长交于 R,连结 PR 交 AB 于 E,连结 EN 并延长交 A_1B_1 于 S,连结 MS 交 B_1C_1 于 F,延长 FM 交 A_1D_1 于 T,连结 PT 交 DD_1 于 G,连结 GM、FN.

六边形 $PENFMG$ 即为过 M、N、P 三点的截面.

解题指要　画过 M、N、P 的截面的关键是确定截面与正方体表面的交线. 注意到正方体表面与截面都是平面的一部分,由公理 2 可知其交线都是线段. 于是,重点在于确定这些线段的端点.

例 5　已知 n ($n \geqslant 3$, $n \in \mathbf{N}^*$)条互相平行的直线 l_1、l_2、l_3、…、l_n 分别与直线 l 相交于点 A_1、A_2、…、A_n. 求证:l_1、l_2、l_3、…、l_n 与 l 共面.

证法一:因为 $l_1 \cap l = A_1$,所以 l_1 与 l 确定平面 α,设 l_k 是与 l_1 平行的直线中的任一条直线,且 $l_k \cap l = A_k$,则 $l_1 \subsetneqq \alpha$, $A_k \in \alpha$.

因为 $l_k \parallel l_1$,设 l_k 与 l_1 确定平面 β,则 $l_1 \subsetneqq \beta$, $A_k \in \beta$,因此 l_1 与 A_k 既在平面 α 内又在平面 β 内,根据公理的推论 1 知过 l_1 和其外一点的平面有且只有一个,所以平面 β 与平面 α 重合,从而由 l_k 的任意性知 l_1、l_2、l_3、…、l_n 共面.

证法二:因为 $l_1 \parallel l_2$, $l_1 \parallel l_3$,所以直线 l_1 和 l_2 及直线 l_1 和 l_3 分别确定一个平面 α 和 β,又因为 $l_1 \cap l = A_1$, $l_2 \cap l = A_2$, $l_3 \cap l = A_3$,所以 A_1、$A_2 \in \alpha$, A_2、$A_3 \in \beta$, $l \subsetneqq \alpha$ 且 $l \subsetneqq \beta$,所以 α 和 β 都是过相交直线 l_1 和 l 的平面,而过两相交直线的平面有且只有一个.

因此 l_1、l_2、l_3、l 共面,同理可证 l_4、l_5、…、l_n 都在由直线 l_1 和 l 所确定的平面内.

解题指要　证明多条直线(三条或三条以上)共面,先由两条确定一个平面,再证其他直线在这个平面内或者分别由两条直线确定几个平面,再证这些平面重合.

例 6 如图 15－14,在空间四边形 $ABCD$ 中,M、N 分别为 AD、BC 中点. 求证: $AB+CD>2MN$.

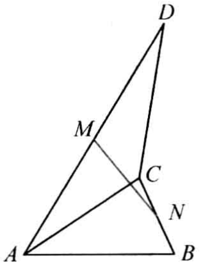


图 15－14

证明 如图 15－15,取 AC 中点 E,连结 ME、NE.

在△ACD 中,M、E 为中点,所以 ME 为中位线,所以 $ME=\frac{1}{2}CD$.

同理,在△ABC 中, $NE=\frac{1}{2}AB$.

在△MNE 中, $ME+NE>MN$, 所以 $\frac{1}{2}(AB+CD)>MN$. 即 $AB+CD>2MN$.

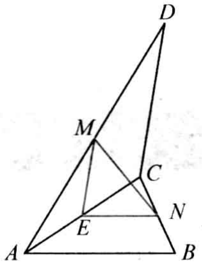


图 15－15

解题指要 要证明的结论中的三条线段不在同一平面上,利用平面把三维空间图形转化为二维平面图形,再利用三角形中三边的不等关系来证明.

举一反三

1 判断下列命题的真假,真的打"√",假的打"×".

(1) 可画一个平面,使它的长为 4 cm,宽为 2 cm. ( )

(2) 一条直线把它所在的平面分成两部分,一个平面把空间分成两部分. ( )

(3) 平面 α 与平面 β 仅有一个公共点. ( )

(4) 经过面内任意两点的直线,若直线上各点都在这个面内,那么这个面是平面. ( )

2 如图 15－16 所示,用符号表示以下各概念:

(1) 点 A、B 在直线 a 上________;

(2) 直线 a 在平面 α 内________;点 C 在平面 α 内________;

(3) 点 D 不在平面 α 内________;直线 b 不在平面 α 内________.

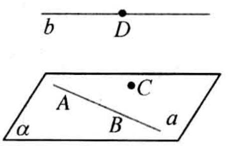


图 15－16

3 三条两两相交而不共点的直线能确定的平面个数是 ( )

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

4　空间四点中,无三点共线是四点共面的　　(　　)

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

5　三条平行直线能确定的平面个数可能是________.

6　三角形、四边形、正六边形、圆,其中一定是平面图形的有________个.

融会贯通

7　如图 15－17,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,A_1C 与面 DBC_1 交于 O 点,AC、BD 交于 M.

求证:C_1、O、M 三点共线.

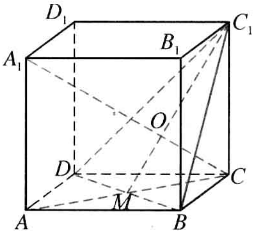


图 15－17

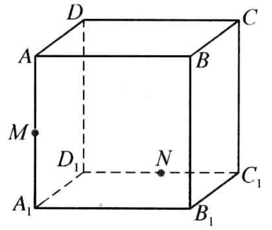


图 15－18

8　如图 15－18,在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M、N 分别是 AA_1、D_1C_1 的中点,过 D、M、N 三点的平面与正方体的下底面相交于直线 l.

(1) 画出 l 的位置;

(2) 设 $l \cap A_1B_1 = P$, 求 PB_1 的长.

9　已知直线 l 与四边形 $ABCD$ 的三边 AB、AD、CD 分别交于点 P、Q、R. 求证:四边形 $ABCD$ 为平面图形.

10　如图 15－19,已知 $a \parallel b \parallel c$, $a \cap d = A$, $b \cap d = B$, $c \cap d = C$. 求证:a、b、c、d 共面.

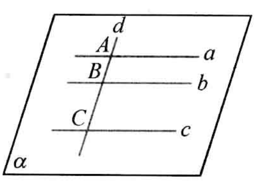


图 15－19

15.2　空间直线与直线的位置关系

立体几何是平面几何的延拓，空间两条直线的位置关系除了平行和相交以外，还有异面.

知识要点

公理 4：

平行于同一条直线的两条直线平行.

等角定理：

如果两条相交直线与另外两条相交直线分别平行，那么这两组相交直线所成的锐角(或直角)相等.

空间两条直线的位置关系：

位置关系	是否共面	公共点	记法
相交	共面	有且仅有一个公共点	$a \cap b = A$
平行		无公共点	$a \parallel b$
异面	不共面		

异面直线所成角：

过空间任意一点 O 分别作两条异面直线的平行线，所得的锐角(或直角)叫做两条异面直线所成角. 它的取值范围是 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

*** 异面直线的公垂线、异面直线的距离：**

与两条异面直线都垂直相交的直线叫做这两条异面直线的公垂线；其中夹在两条异面直线之间的线段叫做这两条异面直线的公垂线段，公垂线段的长度叫做两条异面直线的距离.