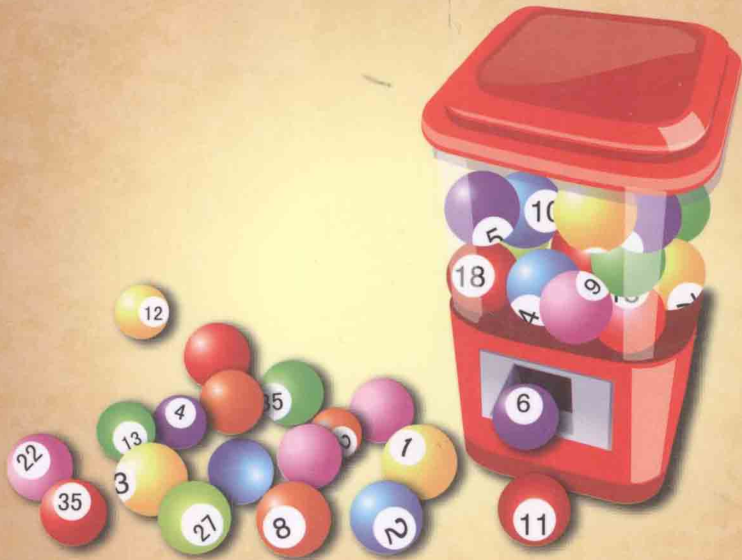
TURING 图灵数学·统计学丛书 53



Introduction to Probability Models

应用随机过程

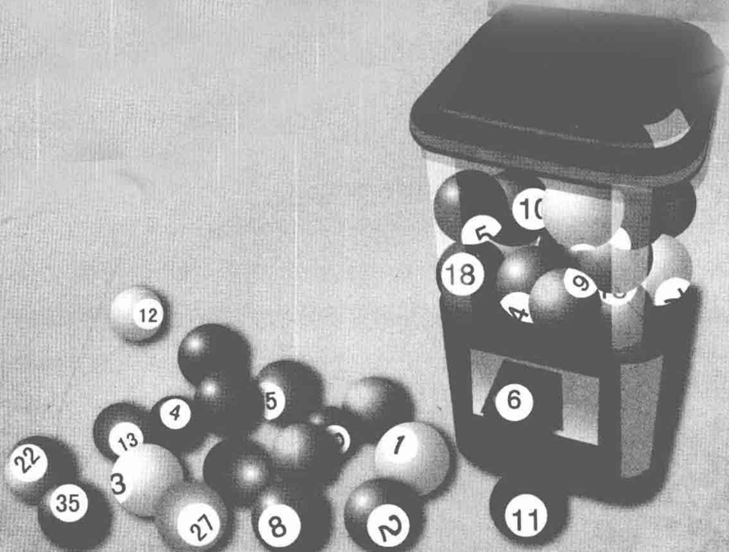
概率模型导论

（第10版）

[美] Sheldon M. Ross 著

龚光鲁 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS



Introduction to Probability Models

应用随机过程

概率模型导论

（第10版）

[美] Sheldon M. Ross 著

龚光鲁 译

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

应用随机过程：概率模型导论：第 10 版 /（美）罗斯（Ross, S. M.）著；龚光鲁译. —北京：人民邮电出版社, 2011.5

（图灵数学·统计学丛书）

书名原文：Introduction to Probability Models, Tenth Edition

ISBN 978-7-115-25031-5

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①罗… ②龚… Ⅲ. ①随机过程 Ⅳ. ①O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 036871 号

内 容 提 要

本书是一部经典的随机过程著作，叙述深入浅出、涉及面广. 主要内容有随机变量、条件期望、马尔可夫链、指数分布、泊松过程、平稳过程、更新理论及排队论等；也包括了随机过程在物理、生物、运筹、网络、遗传、经济、保险、金融及可靠性中的应用. 特别是有关随机模拟的内容，给随机系统运行的模拟计算提供了有力的工具. 本版还增加了不带左跳的随机徘徊和生灭排队模型等内容. 本书约有 700 道习题，其中带星号的习题还提供了解答.

本书可作为概率论与数理统计、计算机科学、保险学、物理学、社会科学、生命科学、管理科学与工程学等专业随机过程基础课教材.

图灵数学·统计学丛书

应用随机过程：概率模型导论（第 10 版）

◆ 著　　[美] Sheldon M. Ross
　译　　龚光鲁
　责任编辑　明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编　100061　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
　印张：37.75
　字数：757 千字　　2011 年 5 月第 1 版
　印数：1－2 500 册　　2011 年 5 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2010-6930 号

ISBN 978-7-115-25031-5

定价：99.00 元

读者服务热线：(010)51095186　印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010)67171154

前 言

本教材是初等概率论与随机过程的一个引论，特别适用于这样的人群：他们想要知道如何用概率论研究诸如工程、计算机科学、管理科学、物理和社会科学以及运筹学等领域中的种种现象.

大家普遍地感觉到，学习概率论有两种方法. 一种是直观而不严格的方法，其意图是培养学生对学科的直观感觉，以使其能 " 从概率论角度思考". 另一种方法试图用测度论工具严格地研究概率论. 本教材用的是第一种方法. 然而，因为能"从概率论角度思考" 对概率论的理解与应用都极为重要，所以本教材对于那些主要对第二种方法感兴趣的学生也是有用的.

本版更新

第 10 版包含新的内容、例子和习题，选取它们不仅由于其自身的趣味和应用性，而且也将用其强化读者的概率论知识和概率直观. 新的内容包括 2.7 节，它建立了用包含与排斥恒等式求发生事件数的分布; 3.6.6 节的不带左跳的随机徘徊，它可以用于对投资人 (或博弈者) 的财富的建模，这些人总是投资 1 个单位而收到非负的累计回报. 4.2 节是关于马尔可夫链的补充材料，它说明了当试图确定，诸如一个给定的链在某个时刻前曾经进入过给定状态类的概率，或者在从未进入过这个类的条件下某时刻的状态分布时，要怎样调整这个链. 7.2 节的一个新注释说明了经典保险破产模型的一个结果也适用于其他重要的破产模型. 书中还新增了关于指数排队模型的材料，包括 2.2 节中一个有限容量队列在忙期丢失的顾客数量的均值和方差的计算，以及 8.3.3 节的生灭排队模型. 11.8.2 节给出了一种新方法，用它可以模拟满足某些性质的马尔可夫链的精确平稳分布.

新加进的例子中有：例 1.11，这是一个有多个参赛人的博弈问题; 例 3.20，它得到了匹配轮数的方差; 例 3.30，它处理了在一个总体中随机选择的特性; 例 4.25，它处理了马尔可夫链的平稳分布.

适 用 课 程

理想状态下，本教材可用于一年的概率模型课程. 其他可能的课程是一学期的概率论引论 (包括第 1~3 章及其他章的部分内容) 或初等随机过程. 本教材设计得

足够灵活,以便能适用于各种可能的课程.例如,我曾用第 5 章与第 8 章,佐以第 4 章与第 6 章中的少许知识,作为基本内容开设排队论的一个引论课程.

例题和习题

全书有很多例题及解答,还有大量供学生解决的习题.有 100 多个带 * 号的习题,它们的解答放在正文的最后.这些带 * 号的习题,可以用于独立学习与测试准备.

组织结构

第 1 章与第 2 章介绍概率论的基本概念.在第 1 章中介绍了公理化框架,而在第 2 章引入了重要的随机变量概念.2.6.1 节简单推导了正态数据样本的样本均值与样本方差的联合分布.

第 3 章涉及条件概率和条件期望的主题."取条件"是概率论中的关键工具之一,在本书中自始至终被强调.在使用得当时,取条件的方法使我们能够容易地解决乍看起来似乎很难的问题.这章的最后一节介绍了取条件在三个方面的应用:(1) 电脑列表问题,(2) 随机图,(3) 波利亚坛子模型以及它与 Bose-Einstein 分布的联系.3.6.5 节介绍 k 记录值以及惊人的 Ignatov 定理.

在第 4 章我们遇到第一个随机过程,这是众所周知的马尔可夫链,它被广泛用于研究现实世界的许多现象.我们介绍了它在遗传学与生产过程中的应用.我们还引入了时间可逆的概念,并对它的用处作了阐述.4.5.3 节基于随机游动理论介绍了一个可满足性问题的概率算法分析.4.6 节处理马尔可夫链在其暂态上的平均停留时间.4.9 节引入马尔可夫链蒙特卡罗方法.在最后一节中,我们考虑一个最优地做出决策的模型,这是熟知的马尔可夫决策过程.

在第 5 章中,我们致力于研究一类称为计数过程的随机过程.特别地,我们研究一种称为泊松过程的计数过程,讨论了这种过程与指数分布间的紧密联系.讨论了泊松过程和非时齐泊松过程的新的衍生物.有关贪婪算法的分析、公路上超车次数最小化、奖券的收集、AIDS 病毒寻踪的例子以及复合泊松过程的材料也都包含在这一章中.5.2.4 节给出了指数型随机变量的卷积的简单推导.

第 6 章考虑连续时间的马尔可夫链,特别强调生灭模型.如同离散时间的马尔可夫链的研究一样,时间可逆性被证实是一个有用的概念.6.7 节介绍了在计算中重要的均匀化技巧.

第 7 章是更新理论,它涉及比泊松过程更为一般的一类计数过程.利用更新报酬过程,得到了极限的结论,并将它应用于不同的领域.7.9 节介绍了当观察一系列

独立同分布的随机变量时, 直至某种模式出现的时间的分布. 在 7.9.1 节中, 我们揭示了, 更新理论怎样被用来推导, 直至一个特定的模式出现的时间长度的均值和方差, 以及直至有限个数的特定模式之一出现的平均时间. 在 7.9.2 节中, 我们假定随机变量有相同的机会取 m 个可能值中的任意一个, 并计算了直至 m 个不同值都出现时的平均时间的表达式. 在 7.9.3 节中, 我们假定随机变量是连续的, 并导出了出现 m 个连续递增值时的平均时间的表达式.

第 8 章处理排队论 (即等待线) 的理论. 在对基本价格等式和极限概率的类型做了预备性的处理后, 我们考察指数排队模型, 并说明如何分析这种模型. 我们研究的是这种模型的一个重要 —— 众所周知的排队网络. 然后, 我们转而研究允许某些分布任意的模型. 8.6.3 节讨论涉及单条服务线的一般服务时间队列的优化问题; 8.8 节涉及单条服务线的一般服务时间队列, 在此其到达源是有限个潜在的使用者.

第 9 章涉及可靠性理论. 工程师和运筹工作者可能对这一章最感兴趣. 9.6.1 节阐述了确定部件不必独立的平行系统的期望寿命一个上界的方法, 而 9.7.1 节分析串联结构可靠性模型, 这时当有一个同类部件失效时, 其他部件进入一种带有暂缓行为的状态.

第 10 章涉及布朗运动以其应用. 这一章讨论了期权定价理论, 介绍了套利定理及其与线性规划的对偶定理的关系. 我们说明了套利定理如何导出 Black-Sholes 期权定价公式.

第 11 章处理统计模拟, 这是对于用解析方法难以处理的随机模型进行分析的有力工具. 这一章讨论了生成任意分布的随机变量的值的方法, 和降低方差以增加模拟的有效性的方法. 11.6.4 节引入了重要抽样这个有用的模拟技术, 并且指出了在应用此方法时倾斜分布的用处.

致 谢

我们感谢对本教材提出有益建议的众多审稿人. 在我们致力于不断改进本书的过程中, 他们的意见发挥了重大作用, 我们感激下面这些审稿人以及其他许多不知名的人士:

纽约市立大学的 Mark Brown
南加州大学的 Zhiqin Ginny Chen
南佛罗里达大学的 Tapas Das
本古里安大学的 Israel David
加州技术学院的 Jay Devore
纽约州立大学石溪分校的 Eugene Feinberg
缅因大学的 Ramesh Gupta

密歇根州立大学的 Marianne Huebner
里海大学的 Garth Isaak
威斯康星大学白水分校的 Jonathan Kane
宾州州立大学的 Amarjot Kaur
Concordia 大学的 Zohel Khalil
波士顿大学的 Eric Kolaczyk
加州州立大学长滩分校的 Melvin Lax
宾州大学的 Jean Lemaire
加州大学伯克利分校的 Andrew Lim
密歇根大学的 George Michailidis
Butler 大学的 Donald Minassian
纽约州立大学石溪分校的 Joseph Mitchell
伊利诺伊大学的 Krzysztof Osfaszewski
波士顿大学的 Erol Pekoz
西拉丘兹大学的 Evgeny Poletsky
马萨诸塞大学洛厄尔分校的 James Propp
维多利亚大学的 Anthony Quas
校对员 Charles H. Roumeliotis
卡尔加里大学的 David Scollnik
西北密苏里州立大学的 Mary Shepherd
华盛顿大学西雅图分校的 Galen Shorack
维也纳科技大学的 Marcus Sommereder
爱荷华大学的 Osnat Stramer
Bowling Green 州立大学的 Gabor Szekeley
普度大学的 Marlin Thomas
自由大学的 Henk Tijms
Binghamton 大学的 Zhenyuan Wang
哥伦比亚大学的 Ward Whitt
佐治亚理工学院的 Bo Xhang
维多利亚大学的 Julie Zhou

目录

第 1 章　概率论引论

1.1　引　　言

现实世界的现象的任何实际模型, 必须考虑到随机性的可能. 就是说, 往往我们所关注的量并不是事先可料的, 这种量所展示的内在变化必须考虑在模型之中. 为此, 通常使用的模型实质上是概率性的, 这样的模型自然而然就称为概率模型.

本书的多数章节会涉及自然现象中不同的概率模型. 显然, 为了既能掌握“如何建立模型”, 又能掌握随后对于这些模型的分析, 我们必须具有某些基本概率论的知识. 本章其余的内容和随后的两章是关于这个主题的探讨.

1.2　样本空间与事件

假设我们将完成一个试验, 其结果是预先不可料的. 然而, 尽管试验的结果并不是预先知道的, 但是, 我们可以假定所有可能结果(outcome) 的集合是已知的. 一个试验的所有可能结果的集合称为该试验的样本空间, 记为S. 以下是一些例子.

1. 如果试验由抛掷一枚硬币所构成, 那么

$$S = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$$

此处 H 表示抛掷的结果是正面 (Head), 而 T 表示抛掷的结果是反面 (Tail).

2. 如果试验由掷一颗骰子所构成, 那么样本空间是

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

此处的结果 i 表示骰子掷出的点数, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

3. 如果试验由抛掷两枚硬币所构成, 那么样本空间由以下 4 个点组成

$$S = \{(\mathrm{H}, \mathrm{H}), (\mathrm{H}, \mathrm{T}), (\mathrm{T}, \mathrm{H}), (\mathrm{T}, \mathrm{T})\}$$

如果两枚硬币都出现正面, 结果就是 (H, H). 如果第一枚硬币出现正面, 且第二枚硬币出现反面, 结果就是 (H, T). 如果第一枚硬币出现反面, 且第二枚硬币出现正面, 结果就是 (T, H). 如果两枚硬币都出现反面, 结果就是 (T, T).

4. 如果试验由掷两颗骰子所构成, 那么样本空间由下列 36 个点组成

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{array} \right\}$$

这里, 如果第一颗骰子掷出点数 i, 且第二颗骰子掷出点数 j, 那么称结果 (i,j) 发生.

5. 如果试验由测量一辆汽车的寿命所构成, 那么样本空间由所有的非负实数构成, 即

$$S = [0, \infty) \text{ ①}$$ ■

样本空间 S 的任意子集 E 称为一个事件(event). 以下是事件的一些例子.

1′. 在上述例 1 中, 如果 $E = \{\mathrm{H}\}$, 那么 E 是掷一枚硬币出现正面这一事件. 类似地, 如果 $E = \{\mathrm{T}\}$, 那么 E 是掷一枚硬币出现反面这一事件.

2′. 在例 2 中, 如果 $E = \{1\}$, 那么 E 是骰子点数为 1 这一事件. 如果 $E = \{2,4,6\}$, 那么 E 是骰子点数为偶数这一事件.

3′. 在例 3 中, 如果 $E = \{(\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{T})\}$, 那么 E 是第一枚硬币出现正面这一事件.

4′. 在例 4 中, 如果 $E = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, 那么 E 是两颗骰子点数和为 7 这一事件.

5′. 在例 5 中, 如果 $E = (2,6)$, 那么 E 是一辆汽车耐用 2 年到 6 年这一事件.■

当试验的结果在 E 中时, 我们就说事件 E 发生. 对于样本空间 S 的任意两个事件 E 和 F, 我们也可以定义新事件 $E \cup F$, $E \cup F$ 由所有在 E 中或在 F 中的结果组成. 也就是说, 如果 E 或 F 有一个发生, 事件 $E \cup F$ 就发生. 例如, 在例 1 中, 如果 $E = \{\mathrm{H}\}$ 且 $F = \{\mathrm{T}\}$, 那么 $E \cup F = \{\mathrm{H},\mathrm{T}\}$. 也就是说, $E \cup F$ 是整个样本空间 S. 在例 2 中, 如果 $E = \{1,3,5\}$ 且 $F = \{1,2,3\}$, 那么 $E \cup F = \{1,2,3,5\}$, 因此, 如果掷骰子的结果是 1 或 2 或 3 或 5, 那么 $E \cup F$ 发生. 事件 $E \cup F$ 常常称为事件 E 与事件 F 的并(union).

对于样本空间 S 的任意两个事件 E 和 F, 我们也可以定义新事件 EF, 有时写为 $E \cap F$, 称为 E 与 F 的交(intersection). EF 由所有既在 E 中又在 F 中的结果组成. 也就是说, 只有 E 和 F 都发生, 事件 EF 才发生. 例如, 在例 2 中, 如果 $E = \{1,3,5\}$ 且 $F = \{1,2,3\}$, 那么 $EF = \{1,3\}$, 因此, 在掷骰子的结果是 1 或 3 时, EF 就发生. 在例 1 中, 如果 $E = \{H\}$ 且 $F = \{T\}$, 那么事件 EF 将不包含任何结

① 集合 (a,b) 定义为由满足 $a < x < b$ 的所有的点 x 构成. 集合 $[a,b]$ 定义为由满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有的点 x 构成. 集合 $(a,b]$ 及 $[a,b)$ 分别定义为由满足 $a < x \leqslant b$ 的所有的点 x 及满足 $a < x \leqslant b$ 的所有的点 x 构成.

果, 因此它不可能发生. 为了给这样的事件一个称谓, 我们称它为不可能事件(null event), 并记为 $\varnothing$. (即 $\varnothing$ 是指不包含任何结果的事件.) 如果 $EF = \varnothing$, 则称 E 与 F 为*互不相容的* (mutually exclusive).

以同样的方式, 我们也定义两个以上事件的并和交. 如果 $E_1, E_2, \cdots$ 都是事件, 那么这些事件的并, 记为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 定义为这样的一个事件, 它由至少包含于一个 E_n 的所有结果构成, $n = 1, 2, \cdots$. 类似地, 事件 E_n 的交, 记为 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, 定义为这样的一个事件, 它由所有 E_n 中的共同结果所构成, $n = 1, 2, \cdots$.

最后, 对于任意事件 E, 我们定义一个新的事件 E^c, 称为 E 的*对立事件* (complement), 它由样本空间中不属于 E 的所有结果所构成. 也就是说, E^c 发生当且仅当 E 没有发生. 在例 4 中, 如果 $E = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, 那么 E^c 在两颗骰子的点数和不等于 7 时发生. 再注意, 因为试验必然会导致某些结果, 这就推出 $S^c = \varnothing$.

1.3 定义在事件上的概率

考察一个以 S 为样本空间的试验. 对于样本空间 S 的每一个事件 E, 我们假定一个满足以下 3 个条件的数 $\mathrm{P}(E)$:

(i) $0 \leqslant \mathrm{P}(E) \leqslant 1$. (ii) $\mathrm{P}(S) = 1$.

(iii) 对于任意互不相容的事件序列 $E_1, E_2, \cdots$, 即当 $n \neq m$ 时, $E_n E_m = \varnothing$ 的事件序列, 有

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(E_n)$$

我们将 $\mathrm{P}(E)$ 称为*事件E的概率*.

例 1.1 在掷硬币的例子中, 如果我们假定硬币出现正面与出现反面是等可能的, 那么我们有

$$\mathrm{P}(\{\mathrm{H}\}) = \mathrm{P}(\{\mathrm{T}\}) = 1/2$$

另一方面, 如果我们有一枚不均匀的硬币, 它出现正面的可能是出现反面的两倍, 那么我们有

$$\mathrm{P}(\{\mathrm{H}\}) = 2/3, \ \mathrm{P}(\{\mathrm{T}\}) = 1/3$$ ■

例 1.2 在掷骰子的例子中, 如果我们假定 6 个数的出现都是等可能的, 那么我们有

$$\mathrm{P}(\{1\}) = \mathrm{P}(\{2\}) = \mathrm{P}(\{3\}) = \mathrm{P}(\{4\}) = \mathrm{P}(\{5\}) = \mathrm{P}(\{6\}) = 1/6$$

由 (iii) 推出得到偶数的概率等于

$$\mathrm{P}(\{2,4,6\}) = \mathrm{P}(\{2\}) + \mathrm{P}(\{4\}) + \mathrm{P}(\{6\}) = 1/2$$ ■

注 我们给概率选取一个比较形式化的定义，即定义为在一个样本空间的事件上的函数. 这显示这些概率有一个非常直观的性质. 换句话说，如果我们的试验不断地重复，那么 (以概率 1) 事件 E 发生的次数的比率正是 $\mathrm{P}(E)$.

因为事件 E 和 E^c 总是互不相容的，而且 $E \cup E^c = S$. 由 (ii) 和 (iii)，我们有

$$1 = \mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(E \cup E^c) = \mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(E^c)$$

或

$$\mathrm{P}(E^c) = 1 - \mathrm{P}(E) \tag{1.1}$$

方程 (1.1) 说明，一个事件不发生的概率是 1 减去它发生的概率.

现在我们来推导在 E 中或在 F 中的所有结果的概率 $\mathrm{P}(E \cup F)$ 的公式. 为此考虑 $\mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F)$，它是 E 中所有结果的概率加上 F 中所有结果的概率. 因为所有既在 E 中又在 F 中的结果在 $\mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F)$ 中都算了两次，而在 $\mathrm{P}(E \cup F)$ 中只算了一次，所以必须有

$$\mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F) = \mathrm{P}(E \cup F) + \mathrm{P}(EF)$$

或者，等价地

$$\mathrm{P}(E \cup F) = \mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F) - \mathrm{P}(EF) \tag{1.2}$$

注意，当 E 与 F 互不相容时 (也就是，当 $EF = \varnothing$ 时)，等式 (1.2) 说明

$$\mathrm{P}(E \cup F) = \mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F) - \mathrm{P}(\varnothing) = \mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F)$$

这是一个也可以由 (iii) 得到的结果. (为什么有 $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$?)

例 1.3 假定我们掷两枚硬币. 我们假定样本空间

$$S = \{(\mathrm{H}, \mathrm{H}), (\mathrm{H}, \mathrm{T}), (\mathrm{T}, \mathrm{H}), (\mathrm{T}, \mathrm{T})\}$$

中的 4 个结果都是等可能的，因而每个的概率为 1/4. 设

$$E = \{(\mathrm{H}, \mathrm{H}), (\mathrm{H}, \mathrm{T})\}, \quad F = \{(\mathrm{H}, \mathrm{H}), (\mathrm{T}, \mathrm{H})\}$$

也就是说，E 是第一枚硬币出现正面这一事件，F 是第二枚硬币出现正面这一事件.

利用方程 (1.2) 可得到第一枚硬币出现正面或第二枚硬币出现正面的概率 $\mathrm{P}(E \cup F)$，它由下式给出

$$\mathrm{P}(E \cup F) = \mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F) - \mathrm{P}(EF) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \mathrm{P}(\{\mathrm{H}, \mathrm{H}\}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

这个概率当然能够直接算出，因为

$$\mathrm{P}(E \cup F) = \mathrm{P}\{(\mathrm{H}, \mathrm{H}), (\mathrm{H}, \mathrm{T}), (\mathrm{T}, \mathrm{H})\} = 3/4$$ ■

我们也可以计算事件 E 或 F 或 G 中任意一个发生的概率. 其做法如下：

$$\mathrm{P}(E \cup F \cup G) = \mathrm{P}((E \cup F) \cup G)$$

由 (1.2) 式, 它等于

$$\mathrm{P}(E\cup F)+\mathrm{P}(G)-\mathrm{P}((E\cup F)G)$$

现在, 我们留给你来验证：事件 $(E\cup F)G$ 与 $EG\cup FG$ 是等价的. 因此前面的项等于

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\,(E\cup F\cup G)\\
&=\mathrm{P}(E)+\mathrm{P}(F)-\mathrm{P}(EF)+\mathrm{P}(G)-\mathrm{P}(EG\cup FG)\\
&=\mathrm{P}(E)+\mathrm{P}(F)-\mathrm{P}(EF)+\mathrm{P}(G)-\mathrm{P}(EG)-\mathrm{P}(FG)+\mathrm{P}(EGFG)\\
&=\mathrm{P}(E)+\mathrm{P}(F)+\mathrm{P}(G)-\mathrm{P}(EF)-\mathrm{P}(EG)-\mathrm{P}(FG)+\mathrm{P}(EFG) \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

事实上, 对于任意 n 个事件 $E_1,E_2,E_3,\cdots,E_n$, 用归纳法可以证明

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n)=&\sum_i \mathrm{P}(E_i)-\sum_{i<j}\mathrm{P}(E_iE_j)+\sum_{i<j<k}\mathrm{P}(E_iE_jE_k)-\\
&\sum_{i<j<k<l}\mathrm{P}(E_iE_jE_kE_l)+\cdots+(-1)^{n+1}\mathrm{P}(E_1E_2\cdots E_n) \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

方程 (1.4) 就是包含与排斥恒等式, 用文字表达, 它说明, n 个事件的并的概率等于这些事件一次取一个的概率的和减去这些事件一次取两个的概率的和, 再加上这些事件一次取三个的概率的和, 依次等等.

1.4 条件概率

假定我们掷两颗骰子得到的 36 个结果都是等可能地出现的, 因而每个结果的概率为 1/36. 假定我们知道第一颗骰子的点数是 4, 那么在已知这个信息时, 两颗骰子的点数和为 6 的概率是什么呢? 为了计算这个概率, 我们做如下推理：已知第一颗骰子的点数是 4, 我们的试验至多可能出现 6 个结果, 即 $(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$. 由于这些结果中的每一个本来就是以相同的概率发生的, 它们应该仍旧有相等的概率. 这就是说, 已知第一颗骰子的点数是 4, 则出现 $(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$ 中的每一个结果的 (条件) 概率是 1/6, 而同时在样本空间中的其他 30 个点的 (条件) 概率是 0. 因此, 要求的概率是 1/6.

如果我们以 E 和 F 分别记骰子的点数和为 6 这一事件及第一颗骰子的点数为 4 这一事件, 那么我们刚才得到的概率, 就称为已知F发生的条件下E发生的条件概率, 记为 $\mathrm{P}(E|F)$. 对于所有事件 E 和 F 成立的 $\mathrm{P}(E|F)$ 的一般公式, 将在下文中以同样的方式推导出. 即如果事件 F 发生, 那么为了 E 发生, 实际出现的结果必须是一个既在 E 中又在 F 中的结果, 也就是必须在 EF 中的结果. 现在, 因为我们已知 F 已经发生, 进而 F 就成为我们新的样本空间, 因此，事件 EF 发生的概率就等于 EF 的概率相对于 F 的概率. 这就是

$$\mathrm{P}(E|F)=\frac{\mathrm{P}(EF)}{\mathrm{P}(F)} \tag{1.5}$$

注意, 方程 (1.5) 只有当 $\mathrm{P}(F)>0$ 时才是完好地定义的, 因此, 当 $\mathrm{P}(F)>0$ 时, $\mathrm{P}(E|F)$ 才有定义.

例 1.4　假定在帽子中混杂地放了写有 1 到 10 的 10 张卡片, 然后抽取了其中的一张. 如果我们被告知抽出的卡片上的数至少是 5, 那么它是 10 的条件概率是多少?

解　以 E 记抽出的卡片上的数为 10 这一事件, 而以 F 记抽出的卡片上的数至少为 5 这一事件. 要求的概率是 $\mathrm{P}(E|F)$. 现在, 由方程 (1.5)

$$\mathrm{P}(E|F)=\frac{\mathrm{P}(EF)}{\mathrm{P}(F)}$$

可是, 因为卡片上的数既是 10 又至少为 5 当且仅当它是 10, 故 $EF=E$. 因此

$$\mathrm{P}(E|F)=\frac{1/10}{6/10}=\frac{1}{6}$$ ■

例 1.5　某家庭有两个孩子. 已知两个孩子中至少有一个男孩, 问两个都是男孩的条件概率是多少? 假设给定的样本空间为 $S=\{(b,b),(b,g),(g,b),(g,g)\}$, 且所有的结果都是等可能的 (例如, (b,g) 表示老大是男孩, 老二是女孩).

解　以 B 记两个孩子都是男孩这一事件, A 记两个孩子中至少有一个男孩这一事件, 那么所求的概率由下面给出,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A)&=\frac{\mathrm{P}(BA)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{\mathrm{P}(\{(b,b)\})}{\mathrm{P}(\{(b,b),(b,g),(g,b)\})}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$ ■

例 1.6　贝芙可以修计算机课, 也可以修化学课. 如果她修计算机课, 那么她得到 A 的概率为 1/2. 如果她修化学课, 那么她得到 A 的概率为 1/3. 贝芙于是掷硬币来决定. 贝芙在化学课上能得 A 的概率是多少?

解　以 C 记贝芙修化学课这一事件, 而以 A 记不管她选修什么课都得到 A 这一事件, 那么所要求的概率是 $\mathrm{P}(AC)$. 它可以用方程 (1.5) 计算如下:

$$\mathrm{P}(AC)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A|C)=\frac{1}{2}\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$ ■

例 1.7　假定在一个坛中有 7 个黑球, 5 个白球. 我们不放回地从中摸取两个球. 假设坛中的每个球都是等可能地被摸取, 则摸取的两个球都是黑球的概率是多少?

解　以 F 和 E 分别记摸取的第一个球是黑球这一事件和摸取的第二个球是黑球这一事件. 现在, 已知摸到的第一个球是黑球时, 还有 6 个黑球和 5 个白球留下, 所以 $\mathrm{P}(E|F)=6/11$. 因为 $\mathrm{P}(F)$ 无疑是 7/12, 我们要求的概率是

$$\mathrm{P}(EF)=\mathrm{P}(F)\mathrm{P}(E|F)=\frac{7}{12}\frac{6}{11}=\frac{42}{132}$$ ■