技术卷

中国科学技术
经·典·文·库

工程控制论（下册）

（第三版）

钱学森 宋 健 著

科学出版社

内 容 简 介

本书是《工程控制论》(第三版)的下册。这一册共九章。第十三章讨论摄动理论在控制系统设计中的应用，其中特别说明在飞行控制系统中的应用。第十四、十五两章介绍控制系统在随机干扰下的分析和设计。第十六、十八章讨论了适应性控制系统的设计。第十九章介绍了提高控制系统可靠性的各种方法。第十七、二十、二十一这三章分别是：逻辑控制和有限自动机(第十七章)，信号与信息(第二十章)，大系统(第二十一章)。这些方面已构成工程控制论这门学科的重要研究方向。书末还附有"有关中文著作目录选辑"，可供读者查阅。

本书对从事自动化、计算机科学、信息处理、通信理论、宇航技术及系统工程等专业的理论研究工作者和工程设计人员是一本有重要参考价值的著作，同时也可作为高等院校相关专业的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程控制论. 下册/钱学森，宋健著. —3 版. —北京：科学出版社，2011
(中国科学技术经典文库)
ISBN 978-7-03-030099-7

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①钱…②宋… Ⅲ. ①工程控制论 Ⅳ. ①TB114.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 013257 号

责任编辑：魏英杰　王志欣　李淑兰 / 责任校对：林青梅
责任印制：赵　博 / 封面设计：王　浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
1958年8月第一版
1980年10月第二版
2011 年 2 月第　三　版　开本：B5(720×1000)
2011 年 2 月第四次印刷　印张：32 3/4
印数：21061—24060　　字数：652 000

定价：150.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　录

第十三章　摄动理论和制导系统

弹道摄动理论是用来计算炮弹、火箭等在标准弹道附近的运动状态的。标准弹道是一条有着特定的初始条件、飞行程序、大气状态以及额定的结构参数的确定性弹道。如果实际情况与这些特定的条件有差别，例如飞行器在飞行过程中受到随机的风的扰动而偏离了标准弹道，这时，实际的弹道就不同于标准弹道了。但是，如果扰动作用都很小，则受扰弹道（实际弹道）还是在标准弹道的附近，而且两者之间的差别也是很小的。标准弹道可以认为是已知的，可由精确的计算得到，所以实际弹道与标准弹道相当接近这一事实就成为实际弹道的微分方程线性化的依据。经过线性化处理后，受扰系统的运动方程就成为变系数的线性微分方程，系数随时间变化是由于飞行器本身的状态和所处的环境是随时间变化的缘故。

应用弹道摄动理论的本来目的只是计算飞行器弹道相对于标准弹道的微小修正量（这种修正是由于飞行器的重量与标准值之间的误差，大气状态的改变，风的扰动作用等因素引起的）。但是，由于现代的大型快速电子计算机的出现，完全可以分别地直接计算每一条受扰弹道，所以弹道摄动理论在弹道计算问题上的用处也就随之消失了。然而，变系数线性控制系统的设计问题却恰好可以应用弹道摄动理论。在这一章里，我们将要通过远程导弹制导问题的讨论来说明这种理论。德瑞尼克（Drenick）曾经研究过这个问题[7]，但是，我们的讨论将是更完善的，除了要谈到这样一类飞行器的制导问题外[14]，还要把这个问题的讨论推广成为设计一类高精度变系数线性控制系统的一般理论[2]。最后，将摄动理论和控制理论相结合，用于弹道火箭惯性制导系统的设计[3]。

13.1　飞航式导弹的运动方程

为了使讨论不过分复杂，我们假设火箭在旋转着的地球的赤道平面内运动，如图 13.1-1 所示。在赤道平面内的运动因为不会受到柯氏（Coriolis）力的作用，所以就可以保持平面运动。我们所选取的坐标系统对于旋转的地球来说是固定的，也就是说，坐标系统也是以地球自转的角速度 Ω 转动着的。在任何一个时刻 t，火箭在赤道平面内的位置总可以用 r 和 θ 两个量来确定，这里，r 是向径，也就是从火箭到地心的距离，θ 是到发射点的角度，也就是火箭所在的位置与发射点之间的经度差。设 r_0 是地球的半径。g 是地面上的引力加速度，其中不包含地球自转的离心力的因素。设 R 和 Θ 分别是火箭的每单位质量平均受到的推力与空气动

力的径向(半径方向)分量和切向(垂直于半径的方向)分量。于是,火箭的重心的运动方程就是

$$
\begin{aligned}
&\frac{dr}{dt} = \dot{r} \\
&\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \\
&\frac{d\dot{r}}{dt} = R + r(\dot{\theta} \pm \Omega)^2 - g\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \\
&r\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \Theta - 2\dot{r}(\dot{\theta} \pm \Omega)
\end{aligned} \tag{13.1-1}
$$

如果火箭从西向东飞行,方程(13.1-1)的右端的第二项中就必须取+号,如果,火箭从东向西飞行,就取一号。

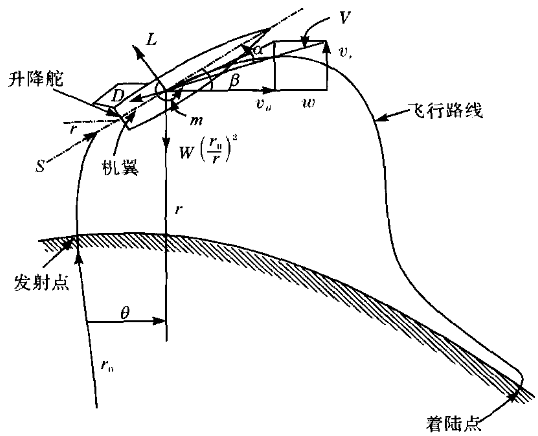

图 13.1-1

R 和 Θ 这两个力都是由推力 S,升力 L 和阻力 D 组成的。设 W 是火箭对于 g 而言的瞬时重量(也就是火箭的瞬时质量与 g 的乘积);V 是空气对于火箭的相对速度的大小。我们引进下列公式定义的三个参数 Σ,Λ 和 Δ 可以使讨论更方便些

$$
\Sigma = \frac{Sg}{W}, \quad \Lambda = \frac{Lg}{WV}, \quad \Delta = \frac{Dg}{WV} \tag{13.1-2}
$$

假设实际的风速 w 是水平方向的,而且也在赤道平面之内,如果是迎风,w 就取正号;反之,如果风向和火箭的飞行方向相同,w 就取负号。我们把 w 看作只是高度 r 的函数。如果 v_r 是径向速度,v_θ 是切向速度,也就是说

$$
\begin{aligned}
v_r &= \dot{r} \\
v_\theta &= r\dot{\theta}
\end{aligned} \tag{13.1-3}
$$

相对的空气速度 V 就可以这样计算

$$V^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta} + w)^2 \tag{13.1-4}$$

如果 β 是推力方向与水平方向之间的角度，那么，单位质量上所受的推力和空气动力的径向分量 R 和切向分量 Θ 就是

$$\begin{aligned} R &= \Sigma\sin\beta + (v_\theta + w)\Lambda - v_r\Delta \\ \Theta &= \Sigma\cos\beta - v_r\Lambda - (v_\theta + w)\Delta \end{aligned} \tag{13.1-5}$$

如果 N 是对于重心的力矩被火箭对于重心的转动惯量除得的商数，那么，角加速度的方程就是

$$\frac{d\dot{\beta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} + N \tag{13.1-6}$$

为了完全确定火箭的运动状态，必须用时间函数的形式把升力 L，阻力 D 和对于重心的力矩 m 表示出来。按照空气动力学的习惯，我们用升力系数 C_L 和阻力系数 C_D 来表示 L 和 D

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\rho V^2 A C_L \\ D &= \frac{1}{2}\rho V^2 A C_D \end{aligned} \tag{13.1-7}$$

其中，ρ 是空气的密度，是高度 r 的函数。A 是一个固定的特征面积，譬如说，可以设火箭的尾翼面积是 A。在我们所考虑的这个问题里，既然火箭只在赤道平面内运动，从空气动力学计算的角度来看，火箭的运动状态是由冲角 α 决定的（冲角就是推力的作用线与空气的相对速度向量之间的角度（图 13.1-1））。然而，对于火箭的运动的控制是通过升降舵角 γ 的控制来执行的。所以，能够影响 C_L 和 C_D 的参数就是 α 和 γ。此外，这些空气动力学的系数还是雷诺（Reynold）数 Re 和马赫（Mach）数 M 的函数。如果 a 是空气的音速，马赫数就是

$$M = \frac{V}{a} \tag{13.1-8}$$

设 a 也是高度 r 的函数。如果 l 是火箭的一个特征长度，μ 是空气的黏性系数，雷诺数就是

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V l}{\mu} \tag{13.1-9}$$

黏性系数 μ 也是高度 r 的函数。这样，我们就有

$$\begin{aligned} C_L &= C_L(\alpha, \gamma, M, \mathrm{Re}) \\ C_D &= C_D(\alpha, \gamma, M, \mathrm{Re}) \end{aligned} \tag{13.1-10}$$

我们再假定，推力作用线通过火箭的重心；因此，推力就不产生力矩。不难想到在火箭发动机工作的飞行过程中，火箭的角度运动（转动）一定很慢，所以喷射阻尼力矩是可以忽略不计的。因此，空气动力力矩 m 是作用在火箭上的唯一的力

矩，m 也可以按照下列公式用系数 C_m 表示

$$m = \frac{1}{2}\rho V^2 A l C_m \tag{13.1-11}$$

力矩系数 C_m 也是四个变数 α,γ,M 和 Re 的函数

$$C_m = C_m(\alpha,\gamma,M,\mathrm{Re}) \tag{13.1-12}$$

如果 I 是火箭对于重心的瞬时的横向转动惯量，方程(13.1-6)里的 N 就是

$$N = \frac{m}{I} \tag{13.1-13}$$

利用以上引入的符号，运动的微分方程组可以写成以下形式

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= v_r \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{v_\theta}{r} \\
\frac{d\beta}{dt} &= \dot{\beta} \\
\frac{dv_r}{dt} &= \Sigma\sin\beta + (v_\theta + w)\Lambda - v_r\Delta + r\left(\frac{v_\theta}{r} \pm \Omega\right)^2 - g\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = F \\
\frac{dv_\theta}{dt} &= \Sigma\cos\beta - v_r\Lambda - (v_\theta + w)\Delta - 2v_r\left(\frac{v_\theta}{r} \pm \Omega\right) + \frac{v_\theta v_r}{r} = G \\
\frac{d\dot{\beta}}{dt} &= \frac{1}{r}\left\{\Sigma\cos\beta - v_r\Lambda - (v_\theta + w)\Delta - 2v_r\left(\frac{v_\theta}{r} \pm \Omega\right)\right\} + N = H
\end{aligned} \tag{13.1-14}$$

这个方程组是六个未知函数 $r,\theta,\beta,v_r,v_\theta$ 和 $\dot{\beta}$ 的一阶方程组。如果要解这个方程组，就必须先知道开始时($t=0$)这些未知函数的初始值；而且，推力 S，重量 W 和转动惯量 I 在每一时刻 t 的瞬时值也必须事先给定。如果要确定各个空气动力，升降舵角 γ 的运动也要用一个时间函数 $\gamma(t)$ 事先给定。大气的状态也必须知道，即风速 w，密度 ρ，空气的黏性系数 μ 以及音速 a 都必须是高度 r 的已知的函数。冲角 α 不能预先给定，它必须根据角度 β 和相对的空气速度向量 V 来计算。

我们将取标准大气状态和弹体、发动机的额定参数作为式(13.1-14)的参数。利用这些具体的数据，只要给定了升降舵角度 γ 的运动规律 $\gamma=\gamma(t)$，我们就可以把方程组(13.1-14)积分，从而把火箭的飞行路线(弹道)计算出来。计算工作可以用计算机完成。这样计算出来的飞行路线，是一个标准的火箭在标准的大气状态下的飞行路线，这也就是标准飞行路线或标准弹道。

标准弹道的最重要的特性就是它的射程。所谓射程就是发射点和着陆点之间的距离。所谓火箭的制导问题就是要算出火箭发动机合适的关机时间并且找出飞行过程中升降舵角度的合适的运动规律，使得射程正好是我们所需要的数值。对于标准火箭在标准大气中的制导问题，可以在火箭发射之前用数学方法完

全解决，因为计算这条标准弹道所需要的全部资料都是已知的或者是预先给定了的。

13.2 摄动方程

实际的大气的特性并不一定与所说的标准大气状态相符合。每一个高度上的风速都随气候条件变化；温度 T 也是随时间变化的。因此，我们可以想到，由于大气条件的不同，实际的飞行弹道与标准弹道一定也有些差别。实际的火箭在重量以及发动机性能等方面与理想的标准火箭也总会有些差别，因此，如果升降舵角度 γ 仍然采用原来给定的动作程序，那么，实际的飞行弹道就会与标准弹道不同。所以，实际的火箭的制导问题就是要适当地随时修正升降舵角度的动作程序，设法使实际的射程与标准弹道的射程相同，准确无误地在标准着陆点着陆。因为火箭的速度非常高，这样一个制导问题就不能用普通的方法来解决，在普通的制导问题（譬如汽车或轮船的驾驶问题）中，因为速度相当低，惯性作用相当小，所以只要随时根据位置的偏差改正运动路线就可以使总的运动路线符合要求，完全不需要考虑惯性的影响。但是，对于像火箭这样的高速度飞行器的情形来说，就不能只根据运动学的考虑来进行操纵，因为惯性作用相当大，所以，必须考虑系统的动力学的效应才能使路线符合要求，对于这种情形，制导问题就必须依靠高速的自动计算系统来解决，对于每一个离开标准情况的偏差，这个计算系统都能在一段几乎等于零的时间内发生反应，同时发出修正运动状态的信号。我们把实现这种制导的控制系统称为制导系统。

一般性的制导问题实在是非常困难的。但是，我们可以相信离开标准状态的偏差总是很小的，因为，标准弹道毕竟是一条最有代表性的平均弹道。这个事实使我们立刻想到，作为初步近似只要考虑偏差的一阶量就够了。这个“线性化”的做法就是弹道摄动理论的基础。经过线性化以后，新的方程组（当然是线性方程组）的系数都只是根据标准弹道的参数计算出来的，一般说来，这些系数都是随时间变化的。我们关于远程火箭的制导问题所作的讨论也就是这一类控制系统设计的一个例子。这个例子的特定的设计要求，就是设法消除射程的误差。这里，被控制的“输入”就是升降舵角度的修正动作。在以下的讨论中我们就通过具体的情况来说明这些概念。

本章我们用符号上的横线“-”表示标准弹道的各个状态分量，用 δ 符号表示相同时间上各个状态分量的偏差。所以实际的飞行路线的各个状态分量就是

$$r = \bar{r} + \delta r,\quad \theta = \bar{\theta} + \delta\theta,\quad \beta = \bar{\beta} + \delta\beta$$

$$v_r = \bar{v}_r + \delta v_r,\quad v_\theta = \bar{v}_\theta + \delta v_\theta,\quad \dot{\beta} = \bar{\dot{\beta}} + \delta\dot{\beta} \tag{13.2-1}$$

实际的大气状态与标准大气状态之间的偏差是用密度偏差 $\delta\rho$，温度偏差 δT 和风

速偏差 δw 来表示的，所以

$$\rho=\bar{\rho}+\delta\rho, \quad T=\overline{T}+\delta T, \quad w=\overline{w}+\delta w \tag{13.2-2}$$

如果我们假设在任何一个高度上空气的化学成分都与标准大气在这个高度上的成分相同，那么，只要知道 $\delta\rho$ 和 δT 也就可以计算出压力偏差（如果需要的话）。假设实际的火箭与标准火箭之间只有重量偏差 δW 和转动惯量偏差 δI，也就是说

$$W=\overline{W}+\delta W, \quad I=\bar{I}+\delta I \tag{13.2-3}$$

还假设推力 S 与标准值完全相同。此外，火箭的尾翼面积 A 以及方程(13.1-10)和(13.1-12)所表示的空气动力特性也都假定是不变的。

把方程(13.2-1)，(13.2-2)和(13.2-3)代入方程(13.1-14)，然后，再从每一个方程里减去相应的标准飞行路线的方程，根据线性化的原则只保留各个偏差的一阶量。我们就得到下列方程

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta r}{dt}&=\delta v_r\\
\frac{d\delta\theta}{dt}&=-\frac{\bar{v}_\theta}{\bar{r}^2}\delta r+\frac{1}{\bar{r}}\delta v_\theta\\
\frac{d\delta\beta}{dt}&=\delta\dot{\beta}
\end{aligned} \tag{13.2-4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta v_r}{dt}&=a_1\delta r+a_2\delta\beta+a_3\delta v_r+a_4\delta v_\theta+a_5\delta\gamma+a_6\delta\rho+a_7\delta T+a_8\delta w+a_9\delta W\\
\frac{d\delta v_\theta}{dt}&=b_1\delta r+b_2\delta\beta+b_3\delta v_r+b_4\delta v_\theta+b_5\delta\gamma+b_6\delta\rho+b_7\delta T+b_8\delta w+b_9\delta W\\
\frac{d\delta\dot{\beta}}{dt}&=c_1\delta r+c_2\delta\beta+c_3\delta v_r+c_4\delta v_\theta+c_5\delta\gamma+c_6\delta\rho+c_7\delta T+c_8\delta w+c_9\delta W+c_{10}\delta I
\end{aligned} \tag{13.2-5}$$

方程中的系数 a_i, b_i, c_i 都是式(13.1-14)所定义的函数 F, G, H 在标准弹道上计算的偏导数。例如

$$\begin{aligned}
a_1&=\overline{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)}, \quad a_2=\overline{\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)}, \quad a_3=\overline{\left(\frac{\partial F}{\partial v_r}\right)}\\
a_4&=\overline{\left(\frac{\partial F}{\partial v_\theta}\right)}, \quad a_5=\overline{\left(\frac{\partial F}{\partial \gamma}\right)}, \quad a_6=\overline{\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)}\\
a_7&=\overline{\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)}, \quad a_8=\overline{\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)}, \quad a_9=\overline{\left(\frac{\partial F}{\partial W}\right)}
\end{aligned} \tag{13.2-6}$$

这些系数的详细表达式见本章附录。

方程(13.2-4)和(13.2-5)是六个偏差量的变系数线性微分方程组。如果已知大气状态的偏差 $\delta\rho, \delta T$ 和 δw，并且给定 $\delta\gamma, \delta W$ 和 δI，则从这个方程组里我们可以解出 $\delta r, \delta\theta, \delta\beta, \delta v_r, \delta v_\theta$ 和 $\delta\dot{\beta}$。然而，制导问题的提法和这个问题是不同的，在制导系统的设计里要求根据弹体运动的状态参数来确定控制函数 $\delta\gamma$（升降舵的修正

程序)使射程偏差为零。正如德瑞尼克所建议的,这个制导问题可以用布利斯(Bliss)的伴随函数法来解决[6]。

13.3 伴随方程

设 $y_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$是由下列 n 阶线性微分方程组确定的函数

$$\frac{dy_i}{dt}-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j=Y_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{13.3-1}$$

其中 a_{ij} 是给定的系数,它们可以是时间 t 的函数。$Y_i(t)$是"驱动"函数(输入)。现在我们再引进一组新的函数 $\lambda_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$,它们满足下列齐次方程组

$$\frac{d\lambda_i}{dt}+\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\lambda_j=0,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{13.3-2}$$

这样一组函数 $\lambda_i(t)$就称为原来一组 $y_i(t)$的伴随函数。方程(13.3-2)称为(13.3-1)的伴随方程。用 λ_i 乘方程(13.3-1),再用 y_i 乘方程(13.3-2),然后再对于 i 把这些方程加起来,我们就得出

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\lambda_i y_j-a_{ji}\lambda_j y_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Y_i$$

显然,双重和符号后面的两项刚好互相对消,所以,我们就得到

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Y_i \tag{13.3-3}$$

把这个方程从时刻 $t=t_1$ 积分到时刻 $t=t_2$,我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i\Big|_{t=t_2}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i\Big|_{t=t_1}+\int_{t_1}^{t_2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Y_i\Big)dt \tag{13.3-4}$$

布利斯称这个方程为基本公式。

对于我们所讨论的远程导弹问题,y_i 就是那些摄动量

$$\begin{aligned}&y_1=\delta r,\quad y_2=\delta\theta,\quad y_3=\delta\beta\\&y_4=\delta v_r,\quad y_5=\delta v_\theta,\quad y_6=\delta\dot{\beta}\end{aligned} \tag{13.3-5}$$

根据方程(13.2-4)和(13.2-5),这时伴随函数满足下列方程组

$$\begin{aligned}-\frac{d\lambda_1}{dt}&=-\frac{\bar{v}_\theta}{\bar{r}^2}\lambda_2+a_1\lambda_4+b_1\lambda_5+c_1\lambda_6\\-\frac{d\lambda_2}{dt}&=0\\-\frac{d\lambda_3}{dt}&=+a_2\lambda_4+b_2\lambda_5+c_2\lambda_6\\-\frac{d\lambda_4}{dt}&=\lambda_1+a_3\lambda_4+b_3\lambda_5+c_3\lambda_6\end{aligned}$$

$$-\frac{d\lambda_5}{dt}=\frac{1}{r}\lambda_2+a_4\lambda_4+b_4\lambda_5+c_4\lambda_6$$

$$-\frac{d\lambda_6}{dt}=\lambda_3 \qquad (13.3\text{-}6)$$

各个输入 Y_i 为

$$Y_1=Y_2=Y_3=0 \qquad (13.3\text{-}7)$$

和

$$\begin{aligned} Y_4&=a_5\delta\gamma+a_6\delta\rho+a_7\delta T+a_8\delta w+a_9\delta W\\ Y_5&=b_5\delta\gamma+b_6\delta\rho+b_7\delta T+b_8\delta w+b_9\delta W\\ Y_6&=c_5\delta\gamma+c_6\delta\rho+c_7\delta T+c_8\delta w+c_9\delta W+c_{10}\delta I \end{aligned} \qquad (13.3\text{-}8)$$

13.4　射程控制基本方程

方程(13.3-6)并不能完全确定 λ 函数。如果要完全确定 λ 函数，就必须给出在某一个一定时刻的一组 λ 值。至于应该在哪一个时刻选取一组 λ 的值并且究竟等于什么数值，这个问题是与特定的控制系统设计的要求有关的。在我们的制导问题中，我们的设计要求射程偏差是零。或者，作为一次近似，要求射程偏差的一阶量为零。所以，我们感兴趣的量就是 $\delta\theta_2$（火箭落地时刻的 $\delta\theta$）。以后，我们用下标"$_2$"表示落地时刻的各个量。下面可以看到：射程偏差为零的条件足以完全确定所有的 λ。

如果 t_2 是实际的火箭落地时刻，$\bar{t}_2$ 是标准弹道的落地时刻，于是，可以用一阶偏差 δ 近似地代表绝对偏差 Δ

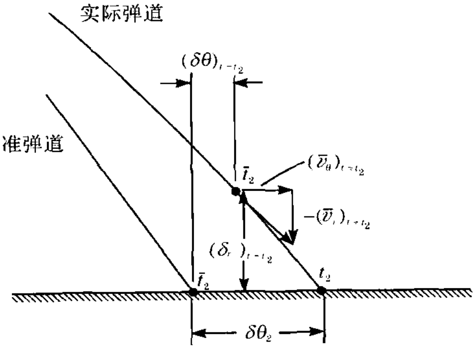

图 13.4-1

$$t_2=\bar{t}_2+\delta t_2 \qquad (13.4\text{-}1)$$

同样

$$r_2 = \bar{r}_2 + \delta r_2$$
$$\theta_2 = \bar{\theta}_2 + \delta\theta_2 \tag{13.4-2}$$

当用一阶偏差近似地表示全偏差，用$(\delta\cdot)_t$表示t时刻的等时偏差，则有

$$\delta r_2 = (\bar{v}_r)_{t=\bar{t}_2}\delta t_2 + (\delta r)_{t=\bar{t}_2}$$
$$\delta\theta_2 = \frac{1}{r_0}(\bar{v}_\theta)_{t=\bar{t}_2}\delta t_2 + (\delta\theta)_{t=\bar{t}_2} \tag{13.4-3}$$

然而，因为不论什么弹道的落地点都在地球表面上，即$r_2=\bar{r}_2=r_0$，所以δr_2一定是零。从方程组(13.4-3)中消去δt_2就得

$$\delta\theta_2 = \left[-\frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{\bar{v}_\theta}{\bar{v}_r}\right)\delta r + \delta\theta\right]_{t=\bar{t}_2} \tag{13.4-4}$$

因此，如果让各个λ函数在标准落地时刻$t=\bar{t}_2$时的值为

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{\bar{v}_\theta}{\bar{v}_r}\right),\quad \lambda_2 = 1 \tag{13.4-5}$$
$$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$$

于是射程偏差就是

$$\delta\theta_2 = \sum_{i=1}^{6}\lambda_i y_i\Big|_{t=\bar{t}_2} = [\lambda_1\delta r + \lambda_2\delta\theta + \lambda_3\delta\beta + \lambda_4\delta v_r + \lambda_5\delta v_\theta + \lambda_6\delta\dot{\beta}]_{t=\bar{t}_2} \tag{13.4-6}$$

如果标准弹道已经确定，则方程组(13.3-6)的各个系数就都是已知的时间函数。方程组(13.3-6)加上终点条件(13.4-5)唯一地完全确定伴随函数λ_i。可以用计算机从$t=\bar{t}_2$开始把方程组(13.3-6)进行"倒向"积分(在逆转了的时间内)。伴随函数确定后，我们就可以利用式(13.3-4)来描述制导问题的设计要求

$$\delta\theta_2 = 0 = [\lambda_1\delta r + \lambda_2\delta\theta + \lambda_3\delta\beta + \lambda_4\delta v_r + \lambda_5\delta v_\theta + \lambda_6\delta\dot{\beta}]_{t=\bar{t}_1} + \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2}[\lambda_4 Y_4 + \lambda_5 Y_5 + \lambda_6 Y_6]dt \tag{13.4-7}$$

这就是射程控制的基本方程。

13.5　制导系统

对于远程飞航式地地导弹来说，从$t=0$到$t=\bar{t}_1$是发动机工作的助推段，从$t=\bar{t}_1$以后到落地时刻为止是滑翔段。在前面我们曾经假设推力S与标准值完全相同，这点对于飞航式导弹的冲压式发动机，在采取适当形式的推力控制条件下是可能的。发动机工作的时间对应于一定的射程而言也是固定不变的，即我们准确地按时间$t=\bar{t}_1$关闭发动机。在助推段可以不采用弹道控制，也可以采用弹道控制，我们将区别这两种情况来讨论制导系统的设计问题以满足基本方程(13.4-7)。

第一种情况：我们只控制滑翔段的弹道，即我们选择升降舵在滑翔段的机动

规律，使基本方程(13.4-7)在任意干扰规律作用下得到满足。由于助推段的弹道是不控制的，所以在一般情况下式(13.4-7)中的第一项$[\lambda_1\delta r+\lambda_2\delta\theta+\lambda_3\delta\beta+\lambda_4\delta v_r+\lambda_5\delta v_\theta+\lambda_6\delta\dot{\beta}]_{t=\bar{t}_1}$自然是不等于零的，但是我们的制导问题并没有必要要求基本方程(13.4-7)中的两项都分别为零。我们只要求在任意干扰规律作用下这两项的总和为零就足够了。当发动机在$t=\bar{t}_1$关机以后，根据实际测得的弹道参数和事先存储的标准弹道参数，我们立即可以从制导计算机里得到

$$[\lambda_1\delta r+\lambda_2\delta\theta+\lambda_3\delta\beta+\lambda_4\delta v_r+\lambda_5\delta v_\theta+\lambda_6\delta\dot{\beta}]_{t=\bar{t}_1}=K \tag{13.5-1}$$

对应助推段的不同干扰情况来讲K当然是变化的，但是只要发动机一关机，K就是一个确定的数。所以从这个意义上讲对于滑翔段K是一个常值。这样的常值偏差我们很容易在滑翔段用一个常值的升降舵偏角来消除掉。现在来看基本方程(13.4-7)的第二项，考虑式(13.3-8)，并引入符号

$$\begin{aligned}
d_5&=\lambda_4a_5+\lambda_5b_5+\lambda_6c_5\\
d_6&=\lambda_4a_6+\lambda_5b_6+\lambda_6c_6\\
d_7&=\lambda_4a_7+\lambda_5b_7+\lambda_6c_7\\
d_8&=\lambda_4a_8+\lambda_5b_8+\lambda_6c_8\\
D&=-(\lambda_4a_9+\lambda_5b_9+\lambda_6c_9)\delta W-\lambda_6c_{10}\delta I
\end{aligned} \tag{13.5-2}$$

和

$$\delta\gamma=\delta\gamma_1+\delta\gamma_2 \tag{13.5-3}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2}[\lambda_4Y_4+\lambda_5Y_5+\lambda_6Y_6]dt&=\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2}d_5\delta\gamma_1dt\\
&+\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2}[d_5\delta\gamma_2+d_6\delta\rho+d_7\delta T+d_8\delta w-D]dt
\end{aligned} \tag{13.5-4}$$

我们把滑翔段升降舵偏角分成两部分，其中常值部分$\delta\gamma_1$用以消除助推段干扰的影响K，这样就可以确定

$$\delta\gamma_1=-\frac{K}{\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2}d_5dt} \tag{13.5-5}$$

现在我们讨论如何确定$\delta\gamma_2$来消除滑翔段干扰的影响。对于滑翔段δW和δI是常值性质的干扰，譬如说，在燃料箱内装有液面传感器，发动机关机后就可以确定剩余的燃料量，这样，只要一关机，δW，δI也就确定下来了。然而，大气状态的偏差量$\delta\rho$，δT和δw就不同了，只有随时随地加以测量才能得到这些量的数据。它们的变化可以是任意的，事前无法确定它们的规律。因此，要求式(13.5-4)中右端第二项积分在任意干扰规律下等于零的条件就是被积函数必须在整个时间区间上恒等于零，亦即

$$d_5\delta\gamma_2 + d_6\delta\rho + d_7\delta T + d_8\delta w = D \tag{13.5-6}$$

方程组(13.2-5)可以改写成

$$\begin{aligned}
a_5\delta\gamma + a_6\delta\rho + a_7\delta T + a_8\delta w &= A \\
b_5\delta\gamma + b_6\delta\rho + b_7\delta T + b_8\delta w &= B \\
c_5\delta\gamma + c_6\delta\rho + c_7\delta T + c_8\delta w &= C
\end{aligned} \tag{13.5-7}$$

其中

$$\begin{aligned}
A &= \frac{d}{dt}\delta v_r - a_1\delta r - a_2\delta\beta - a_3\delta v_r - a_4\delta v_\theta - a_9\delta W \\
B &= \frac{d}{dt}\delta v_\theta - b_1\delta r - b_2\delta\beta - b_3\delta v_r - b_4\delta v_\theta - b_9\delta W \\
C &= \frac{d}{dt}\delta\dot{\beta} - c_1\delta r - c_2\delta\beta - c_3\delta v_r - c_4\delta v_\theta - c_9\delta W - c_{10}\delta I
\end{aligned} \tag{13.5-8}$$

如果弹上的测速定位系统和制导计算机随时测量和计算 A,B,C 这三个量，而且，弹上仪器又能把 $\delta\rho,\delta T$ 和 δw 这三个量中的某一个随时加以测量，利用这些测量的结果，根据方程组(13.5-7)中的两个方程就可以把其余两个大气情况偏差量用 $\delta\gamma_2$ 和已知的时间函数表示出来(譬如说，弹上仪器随时把温度偏差 δT 测量出来，再从测得的三个量 A,B,C 中选用 A 和 B 两个量，最后，利用方程组(13.5-7)的前两个方程就可以把 $\delta\rho$ 和 δw 用已知的时间函数和 $\delta\gamma$ 表示出来)。这个作法的实质也就是借助于火箭本身来确定 $\delta\rho,\delta T$ 和 δw。这样定出 $\delta\rho,\delta T$ 和 δw 以后，把这些量代入方程(13.5-6)就得出 $\delta\gamma_2$ 的方程

$$\delta\gamma_2 = \frac{1}{d_5}[D - d_6\delta\rho - d_7\delta T - d_8\delta w] \tag{13.5-9}$$

在式(13.5-5)所确定的常值 $\delta\gamma_1$ 上再叠加按式(13.5-9)确定的升降舵机动规律 $\delta\gamma_2$，我们就可以满足基本方程(13.4-7)。前面已经讲过，这些 a,b,c 和 A,B,C,D 中有一部分是可以预先根据标准弹道计算出来的，而另一部分则是根据对于火箭的位置和速度的测量得出的。如果在实际飞行中使升降舵就按照 $\delta\gamma_1 + \delta\gamma_2$ 的规律运动，那么，尽管实际飞行情况与标准情况之间有各种偏差，火箭还是在规定的地点着陆，这样就达到了预定的目的：射程偏差等于零。

如果对助推段的弹道也加以控制，就可以做到使基本方程(13.4-7)的两项分别为零。不难看出，只要在助推段和滑翔段升降舵都按照式(13.5-9)所确定的规律机动，控制整条弹道，两项分别为零的要求就满足了。我们同样可以对式(13.4-7)的第一项应用布利斯基本公式，取起飞时刻为积分的下限，发动机关机时刻为积分上限，于是

$$\begin{aligned}
&[\lambda_1\delta\gamma + \lambda_2\delta\theta + \lambda_3\delta\beta + \lambda_4\delta v_r + \lambda_5\delta v_\theta + \lambda_6\delta\dot{\beta}]_{t=\bar{t}_1} \\
&=[\lambda_1\delta r + \lambda_2\delta\theta + \lambda_3\delta\beta + \lambda_4\delta v_r + \lambda_5\delta v_\theta + \lambda_6\delta\dot{\beta}]_{t=0}
\end{aligned}$$