教师教育新行动论丛

高观点下的初等数学

GAO GUAN

DIANXIADECHUDENGSHUXUE

陈月兰 主编

华东师范大学出版社

教师教育新行动论丛

高观点下的初等数学

陈月兰　主编

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高观点下的初等数学/陈月兰主编.—上海:华东师范大学出版社,2010.6
(新行动论丛)
ISBN 978-7-5617-7835-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①数学课—教学研究—中学 Ⅳ.①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 102965 号

教师教育新行动论丛
高观点下的初等数学

主　　编　陈月兰
策　　划　王　焰
责任编辑　吴海红
审读编辑　徐慧平
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://ecnup.taobao.com/

印 刷 者　华东师范大学印刷厂
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　18.75
字　　数　355 千字
版　　次　2011 年 1 月第 1 版
印　　次　2011 年 1 月第 1 次
印　　数　2100
书　　号　ISBN 978-7-5617-7835-7/G·4561
定　　价　36.00 元

出 版 人　朱杰人

序

进入21世纪，世界各国都将提升教育质量确定为教育改革的重心，教师教育改革与创新更是成为重中之重。中国教师教育改革发展同样面临的一个核心问题，即如何把国家教师教育的战略导向和基础教育新课程改革对教师教育的要求，转化为教师教育改革实践的具体目标与措施，加快传统师范教育向现代教师教育的转变，培养造就一大批优秀教师和未来教育家。

自教师教育产生发展至今，源起于为教师提供教学法训练的学科教育，在教师培养与培训过程中一直充当着重要角色。自新中国建立以来，师范院校一直是教师教育的主阵地，因此，学科教育研究与实践的核心任务，就是研究基础教育，培养、培训中小学校教师。其遵循的一个核心原则是，对不同学科的教学规律的发现与运用，要与教育学的一般理论紧密结合起来，一般而言，教育学理论对于学科教育研究与实践具有指导作用，而学科教育反过来促进教育学理论的发展。

1986年，美国公布霍姆斯报告，新一轮教师专业化运动迅速兴起，“学科教学知识”概念应运而生。这一概念强调，学科知识既包括学科内容，也包括学科知识的逻辑结构，因此对学科知识结构的掌握，直接影响着教师传授知识的方法和效果。这就要求学科知识与教育学知识要在更深层次和更广范围上实现结合，从而对传统的学科教育理论提出了挑战。

但是，迄今为止，大多数学科教育研究与实践者仍然尊奉的是传统原则。基于各学科自身的知识逻辑，基于教师自身所需知识的逻辑结构，以及基于基础教育阶段各学科学习的认知规律和教学策略，尝试重新构建一个全新的学科教育理论框架，仍停留在一个讨论的层面。

2008年，全国学科教师教育论坛举行。教育部副部长陈小娅在论坛开幕式上作了重要讲话，要求从事学科教学研究与实践的教师，要以服务基础教育为导向，以强烈的责任感、使命感直面学科基础教育与教师教育改革的理论与

实践问题，积极开展学科教师教育的探索与创新，逐步建立起学科教师教育的研究共同体。

这样的期待，似乎并不仅仅意味着对学科教育研究与实践的激励。要改变目前学科教育在各师范院校的边缘化和研究队伍青黄不接等现状，除了各师范院校要重视学科教育的学科建设与师资队伍的建设外，学科教育也必须寻找到足以使其安身立命的新的合法性基础，即确立自身学科的理论基石与体系，积极探索形成自身的研究传统与优势。

我们也一起期待，教育界、科学界有更多的专家学者来推动和投身学科教育事业，提出更多的、更具体的理论与实践课题，为促进学科教育研究、实践和教师教育的可持续发展而共同努力。

庞辉明

2009 年 6 月 6 日

序

陈月兰博士把她的这本新作,发在我的电子邮箱里。打开一看,觉得很切中当前的需要。一个师范大学数学系的学生,如能阅读此书,一定会得益良多。

《国家高中数学课程标准》设置了许多新的内容,如算法、概率统计等;还有一些拓展性的选修课程,包括矩阵变换、差分方程、三等分角、风险与决策等等。此外,数论初步、图论等内容又成为奥赛数学的基本内容。一个中学教师,掌握这些课题,是与时俱进的一项基本专业要求。试观当前师范大学数学系所开设的课程,在知识内容上,应该说大体覆盖了以上内容。但是,这些具体课题又分散在“抽象代数”、“微分方程”、“计算数学”、“概率统计”、“离散数学”等许多课程之中,并且又往往被过度形式化的论述所淹没,没有充分展开。月兰博士的这本《高观点下的初等数学》,把上述的一些课题集中起来,更详尽地进行阐述,使之成为沟通大学数学和中学数学的一座桥梁,因而是非常有价值的工作。

杜甫的诗句云:“会当凌绝顶,一览众山小。”就事论事地看中学数学,只是知其然,用高等数学的数学方法进行解读,就会觉得豁然开朗,内心充实。我国有一句著名的教育格言是:“要给学生一杯水,教师应该有一桶水。”说的也是这层意思。

晚近以来的数学教育改革,多在教学方式上下功夫,对于数学内涵的理解,数学本质的把握,常常忽略乃至轻视,于是“去数学化”形成了一股潮流。数学教师进修的科目多半是教育理念,几乎不再关注现代数学的进展和高等数学思想的提升。一些数学教育方向的硕士生、甚至博士生,数学修养也止于数学系的本科水平,个别的甚至处于低水平。古人说:“贤者以其昭昭,使人昭昭;今以其昏昏,使人昭昭。”(《孟子·尽心下》)立意不高的数学教师,以其数学之昏昏,怎么能让学生获得数学思维能力的“昭昭”呢?。

华罗庚先生对于打好数学基础,有“从薄到厚”再“从厚到薄”的精辟论述。

这本解读，把中学数学的一些“薄薄”的内容，写得厚了起来。但是，作为读者，也许要把它咀嚼得更细些，将中学的相关内容一览无余地回归为更高层次上的“薄”。

数学教师的教育，既要有数学专业的进修，也要有教学理念的更新，并在教学实践中加以有机整合。本书是数学教师教育一项基本建设，希望能够对数学教师的成长起到有益的作用。

月兰老师在中学任教多年，后去日本因图论研究获得博士学位，继而又在大学数学教育岗位辛勤耕耘。我们曾经在一起共事，彼此熟悉。这次因她之请，写了一些感想，权作为序。

张奠宙

2010年岁尾于华东师范大学数学教育研究所

前 言

“大学学的数学如何用到中学”这是很多中学教师常常感到困惑的问题，有的甚至认为高中毕业直接可以去教高中，这些想法具有一定的代表性，我们曾对中学教师做过这样一次调查，询问当你对所教的内容感到不理解或有困难时你解决的途径主要是什么，提供的选项有上网、同事交流、教辅书、大学数学相关的内容，得到的回答基本上是同事间相互交流，几乎没有人写到要看高一级的书籍，这个答案使我们很意外，与此同时也提醒我们教大学数学数学的老师，如何提供一些对在职或未来中学教师有具体实际帮助的课程与书籍，带着这个问题我就思考着是否应该开设一门将大学数学与中学数学沟通的课程，为将来的中学教师提前做好教学准备，机会终于来了，几年之前我有幸担任了本科生《现代数学与中学数学》与研究生《高观点下的中学数学》的课程，首先根据《国家高中数学课程标准》中学数学内容来选择内容，就像目录中所示的十五章内容，在参考张奠宙、邹一沁教授所著的《现代数学与中学数学》书籍的基础上根据学生可接受程度编写讲义，力求用现代数学的思想、观点和方法对这些内容作系统的叙述，尽可能解决关于这些内容的理论问题，努力为职前和在职数学教师提供一个现代数学知识的框架，每学期上完后通过问卷方式调查教学效果，然后根据学生反馈的情况对讲义进行修改，通过不断修订、补充和积累，终于诞生了这本数的雏形。全书共分十五章，大体上可划分成两大部分，第一章至第六章作为基础部分，第七到第十五章作为拓展部分，章与章之间没有特别的逻辑关系，相对独立性较强，读者可根据自己的兴趣与需要选择。

作为现代数学与中学数学的基础，第一章较为详细地介绍了集合的一般概念，主要阐述了无限集的特征，无限集与有限集合的区别与联系，集合的公理化定义。函数是连接初中、高中和大学数学的一根重要纽带，在第二章主要探讨了不同阶段函数的不同表达形式，这种多样性旨在帮助学生从本质上理

解函数概念，并探讨了函数与对应、映射之间的区别与联系。第三章主要介绍了映射的应用，比如如何通过构造满射来解决基本的抽屉原理问题，探讨了映射与运算之间的关系、以及关系——映射——反演之间的关系。“数论”这个术语虽然未在中学数学教材中直接出现，但时时蕴含在小学、初中和高中数学内容中，为此在第四章讨论了整除与同余，介绍了现代数学中的同余关系，提出了同余关系解决中学数学问题中的优势。数学的学习离不开证明，第五章主要介绍了什么是数学证明、数学证明的主要种类，重点介绍了数学归纳法与反证法的思想与理论基础。第六章主要介绍了几何作图三大不能问题的来源，并给出了详细证明。

“对称”是中学几何图形中经常遇到的，为什么正方形比等腰三角形更对称，第七章将对“对称”概念由几何描述上升到代数刻画，从而有机地与现代数学“群”建立联系，让读者认识到“对称”不仅可以定性也可以量化，与此同时可近距离感受“群”。集合代数、命题代数、开关代数表面上不同，但透过现象我们会发现他们存在很多共性，这些共性是我们在第八章中将要探讨的布尔代数，通过本章的学习，读者会感到布尔代数并不是那么深不可测。变换不仅可以计算也可以具体表示，第九章将通过对七种初等变换的矩阵表示，让读者明白矩阵与变换之间的密切关系，体会大学《高等代数》的巨大力量，从而居高临下指导中学低阶矩阵与行列式的教与学。随着计算机科学的发展，算法成为《国家高中数学课程标准》中新内容，被列为必修，安排在《数学 · 必修 3》中，数学中的算法与计算机课程的侧重点不同，第十章将通过具体实际例子和分析算理向读者介绍什么是算法，理解基本和常用算法。解方程常常往精确解方面考虑，然而实际中方程的近似解却更实用，第十一章将从微积分、数值计算角度对与中学关系比较紧密的实系数有理方程、超越方程以及复系数一元二次方程的解进行讨论，并介绍二分法、牛顿法等几种常用求方程近似解的方法。差分和差分方程是描述离散变量变化的重要工具，第十二章我们通过引入差分概念与性质，学习差分方程及相关应用，并体会离散变量在解决实际问题中的力量。第十三章将通过与读者熟知的欧氏几何类比的方法系统介绍球面几何，在相同与差异中感受球面几何的乐趣。“风险与决策”是《国家高中数学课程标准》中的选修内容之一，也是大学决策论要研究的，第十四章将过具体实例介绍相关概念，理解风险决策灵敏度分析的意义。通过实例了解马尔

可夫型决策及其决策方法。最后一章将向读者介绍目前活跃在应用数学中的“图论”，虽然它没有特别深奥的理论，但它与代数、几何的巧妙结合后所获得的能量变得非常强有力，本章将通过介绍图论基本概念与性质，让读者体会图论在解决实际问题中所变现出的力量。

本书可作为师范院校教师教育专业课程的教材、数学教育专业研究生的参考书，也可作为在职数学教师进修学习材料。

本书涉及的领域有数论、抽象代数、几何、组合论、决策论等非常广泛，虽然参考了大量的书籍与文献，但由于作者水平有限，书中难免会出现缺点与错误，敬请读者批评指正。

在本书即将出版之际，我要特别感谢为此书写序的张奠宙教授，感谢参加本书后五章编写的蒋德慧、田倩、陈多廷、时晨、徐咪咪和吴雅蓉，以及参与校对的冯璟和沈莲波等。

陈月兰

2010 年末于华东师范大学校园

目　录

第一章　集合与无限

对于中学数学教师，集合是经常使用的一个概念. 代数、几何、统计等各方面的内容都离不开集合，但有时会产生一些疑问，如：怎么样的对象才称为集合？如何比较集合的“大小”？中学数学教材中的“集合”究竟要求到什么程度？等等. 因此我们就需要对集合有一个正确的认识.

现代数学的特点之一是统一性，它要求语言的统一和简明，这就决定了集合论的语言、思想方法以及逻辑初步成为现代数学的重要基础.

§1　集合的语言和运算

我们知道，在朴素的集合论中，集合是一个不能定义而只给予描述的原始概念，比如上海教材《数学》(高中一年级第一学期)这样写道：把能够确切指定的一些对象看作一个整体，这个整体叫做集合. 对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的(即要么属于这个集合，要么不属于这个集合).

集合论的语言中只有一个基本动词：“属于”(用$\in$表示)，由它出发，可以定义不属于($\notin$)，包含($\subseteq$)、相等($=$)、子集等概念. 再加上一些逻辑语言，如或、且、非，就可以定义集合间的运算：并($\cup$)、交($\cap$)、差($\setminus$)、余，从而建立集合论的基本运算，并形成一种代数结构. 集合论的语言与逻辑推理有密切关系，用集合表示概念、公式等数学内容时，一般有两种方式：

列举法——揭示概念外延的方式，将集合中的元素一一列出，如 $A=\{1, 3, 5, 7\}$.

描述法——揭示概念内涵的方式，即指出集合元素所满足的条件(也即 A 中元素所共有的特征性质 p：A 中每一个元素具有性质 p；具有性质 p 的元素在 A 中)，比如上述集合用描述法表示为 $A=\{n\in\mathbf{N}: n$ 为不超过 8 的奇数$\}$.

集合确定后，再通过$\subset$、$=$、$\cup$、$\cap$、$\setminus$等关系就能用集合论的语言来表示数学内容了.

关于集合的运算,有以下基本运算性质:

1. 结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
2. 交换律　$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
3. 分配律　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4. De Morgan 定理　设 A、B 均为 X 的子集,$X \backslash A$ 记为 A^c,则
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c;\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$
5. 幂等律　$A = A \cup A = A \cap A$.
6. 对合律　$(A^c)^c = A$.
7. 余补律　$A \cup A^c = X$; $A \cap A^c = \varnothing$.

§2　集合的势

2.1　集合的幂集

定义 1.1　由集合 X 的一切子集组成的集合称为 X 的幂集,记为 $P(X)$,即 $P(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$.

性质 1.1　若 $|X| = n$,则 $|P(X)| = 2^n$.

证明: 所含不同元的元素个数为 0 的相异子集有 C_n^0 个;

所含不同元的元素个数为 1 的相异子集有 C_n^1 个;

所含不同元的元素个数为 2 的相异子集有 C_n^2 个;

一般地,所含不同元的元素个数为 k 的相异子集有 C_n^k 个 $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

上述子集都互不相同,所以 X 的所有相异子集个数为

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^k + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n.$$

若 X 为无限集,情况会如何?这就产生了如何刻画无限集元素"多少"的问题.

如何来刻画和度量无限集的元素数量呢?自然数集、整数集、有理数集、实数集等所有无限集的元素一样多吗?如正整数的全体 $\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ 与正整数平方的全体 $E = \{1, 2^2, 3^2, \cdots\}$,哪一类数更多一些?有没有比实数集元素"更多"的集合?下面我们将围绕这些问题进行讨论.

2.2 有限集和无限集

听说过“希尔伯特旅店”吗？这是一个有无数多个房间的旅店，房间可以排序为 1, 2, 3, 4, ⋯. 一天来了一个 100 人的代表团，当然可以住下了，而且还有多余的房间. 等这些人走后，另一天来了一个有无数多个人的代表团，经理把代表也排了序，一对一，恰好住下，没有多余的房间. 结果刚安排好，又来了一位客人，怎么办？经理想了想，请这位客人住在第 1 号房间，再请原来的代表团的每个人顺次往后移一个房间，嗨！又住下了. 谁知，第 2 天来了另一个也有无数多个人的代表团，于是经理采取了大调动，请原来住下的人住序号为单数的房间，请刚来的人住序号为偶数的房间，真的还是住下了.

我们知道在中学课本中对有限集是这么定义的：含有有限个元素的集合称为有限集. 对无限集是这么定义的：含有无限个元素的集合称为无限集，或一个非空集合，若不是有限集，就称为无限集. 这样的定义方式没有揭示无限集的本质特征，根据中学生的认知特点，课本上这样的定义方式是可以理解的，但教师可以在允许的情况下，尽可能地揭示无限集的本质特征. 那么能揭示无限集的本质特征的定义是什么？答案是无限集能与自己的某些真子集一一对应.

全体自然数有无穷多个，那么全体平方数有多少个呢？我们可能马上能回答，有无穷多个. 奇数的全体有多少个？偶数的全体又有多少个？都是无穷多个！既然都是无穷多个，它们彼此之间有没有差异？能不能也比较一下多少？我们能否用集合所包含的元素的个数来刻画无限集的数量特征？显然不能(因为无限集包含无数个元素)，当然也不能用某个自然数表示.

比较两个有限集各自所含元素的多少通常有两种方法. 一种是分别数各个集合的元素个数. 设两个有限集 A、B 的元素个数分别为 m、n，如果 $m > n$，则 A 的元素多；如果 $m < n$，则 B 的元素多；如果 $m = n$，则他们的元素一样多. 另一种是报数，由此我们得到启发，可以利用一一对应的概念来比较两个无穷集合元素是否相等.

定义 1.2 如果两个集合 A、B 存在一一对应的关系，那么我们称这两个集合对等，即

$$A \text{ 与 } B \text{ 一一对应} \leftrightarrow A \text{ 与 } B \text{ 等价(记为 } A \sim B\text{)}.$$

易证对等关系是等价关系. 由于利用等价关系可以分类，因此利用对等关系可以对一切集合进行分类，即彼此对等的集合在同一类，给予一个标志，称之为势(或基数)，比如集合 X 的势记为$\overline{\overline{X}}$.

由定义我们可以得到 A 与 B 一一对应$\leftrightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

显然有限集合的势即为其所含元素的个数 ($M = \{a, b, c, d, e\} \sim \{1, 2, 3,$

$4, 5\}$，$\overline{\overline{M}} = 5$)，无限集的势是有限集元素个数的推广，规定空集的势为 0.

人们对无限集的认识经历了一个漫长而艰难的历史过程，很多人都不把无限集作为一个确定的整体存在，比如亚里士多德、高斯、柯西等. 直到 19 世纪，面对"数学分析"中建立严密的理论问题时，关于无限集合的许多问题再也避不开了，布尔查诺维护了实无穷集合的存在，并且强调了两个集合等价的概念(即两个集合的元素间存在一一对应关系). 19 世纪 70 年代初，康托尔(Georg Cantor，1845—1918)给出了实无穷的概念：如果一个集合能与它的一部分建立一一对应，它就是无穷集. 正因为此，无限集概念成为中学数学教学的难点.

例 1 自然数集 $\mathbf{N}$ 与正偶数集 E^+ 的势相等吗?

解：因为

$$f: \mathbf{N} \to E^+,$$

$$n \to 2n,$$

将自然数集 $\mathbf{N}$ 与正偶数集 E^+ 按上述方法建立一一对应，则它们的势相同. 这说明无限集中有许多集合与自然数集有相同的势.

例 2 自然数集 $\mathbf{N}$ 与集合 $B = [0, 1]$ 的势相等吗?

答：不相等.

若自然数集 $\mathbf{N}$ 与集合 $B = [0, 1]$ 的势相等，则 $\mathbf{N}$ 与集合 $B = [0, 1]$ 存在一一对应，

$$\begin{gathered}
\mathbf{N} \to B, \\
1 \to x_1, \\
2 \to x_2, \\
\cdots \\
n \to x_n, \\
\cdots
\end{gathered}$$

则 $B = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$.

又因为 $B = [0, 1]$，所以可用小数来表示 B 中的每一个元素：

$$\begin{gathered}
x_1 = 0.\, a_1{}^{(1)} a_2{}^{(1)} a_3{}^{(1)} a_4{}^{(1)} \cdots, \\
x_2 = 0.\, a_1{}^{(2)} a_2{}^{(2)} a_3{}^{(2)} a_4{}^{(2)} \cdots, \\
\cdots \\
x_n = 0.\, a_1{}^{(n)} a_2{}^{(n)} a_3{}^{(n)} a_4{}^{(n)} \cdots, \\
\cdots
\end{gathered}$$

其中，每个 $a_j{}^{(i)}$ 总是取 0 到 9 之间的整数. 为保持表示的唯一性，对于 $0.299\cdots$ 我们用 $0.300\cdots$ 来表示. 只有 1 可表示为 $0.999\cdots$，0 表示为 $0.000\cdots$.

现在，我们来构造一个数 $x = 0.\, b_1 b_2 b_3 \cdots b_n \cdots$ 满足以下两个条件：

(1) b_1, b_2, $\cdots$ b_n, $\cdots$都是大于 0 小于 9 的整数;

(2) $b_1 \neq a_1^{(1)}$, $b_2 \neq a_2^{(2)}$, $b_3 \neq a_3^{(3)}$, $\cdots$, $b_n \neq a_n^{(n)}$, $\cdots$

而满足(1)、(2)两个条件,显然 $x \notin \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$,但是 x 为纯小数,所以 $x \in [0, 1]$. 因此 $[0, 1] \neq \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$,矛盾.所以 $\mathbf{N}$ 与集合 $B=[0, 1]$ 不是一一对应,$\mathbf{N}$ 与集合 $B=[0, 1]$ 的势是不相同的.

从上面的两个例子,可以发现无限集的元素个数不尽相同,它们有着程度上的区别,并不像伽利略认为的无穷大量都是一样的.事实上势也可以比较"大小",为了说明这个问题,先看下面的定理.

定理 1.1 任何无限集 A 必有一子集 B 与自然数集 $\mathbf{N}$ 一一对应.

证明: 任意 $a_1 \in A$, 则 $A-\{a_1\} \neq \varnothing$,

任意 $a_2 \in A-\{a_1\}$, 则 $A-\{a_1, a_2\} \neq \varnothing$,

$\cdots$

重复上述操作,则可从 A 中取出一列元素 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$,它们构成了 A 的子集 $B=\{a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots\}$,定义映射 f,

$$f: \mathbf{N} \to B,$$
$$n \to a_n.$$

可验证 f 是一一映射,从而结论成立.

这个结论告诉我们在无限集的家族中,自然数集是一个非常重要的集合,把自然数集 $\mathbf{N}$ 的势记为$\aleph_0$(读成阿列夫零),并用阿列夫零作为度量无限集元素数量的单位.

定义 1.3 凡是能与自然数集 $\mathbf{N}$ 一一对应的集合称为可列集(或称可数集).

可列集的性质:

1. A:可列集,B:可列集,则 $A \cup B$ 也是可列集.

2. A_i:可列集 $(i=1, 2, \cdots, n)$, 则 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 也是可列集.

3. 推广 A:可列集 $A_i \subset A$ $(i=1, 2, \cdots, n, \cdots)$, A_i 为 A 的无限真子集,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 也是可列集.

例 3 证明正偶数集(E^+)是可列集.

证明:

$$f: \mathbf{N} \to E^+,$$
$$1 \to 2,$$
$$2 \to 4,$$
$$\cdots$$
$$n \to 2n,$$
$$\cdots$$

例 4　证明整数集 **Z** 是可列集.

证明：设自然数集为 **N**，我们如下建立对应：

$$
\begin{aligned}
f:\ & \mathbf{N} \to \mathbf{Z}, \\
& 1 \to 0, \\
& 2 \to 1, \\
& 3 \to -1, \\
& 4 \to 2, \\
& 5 \to -2, \\
& \quad \cdots \\
& 2n \to n, \\
& 2n+1 \to -n, \\
& \quad \cdots
\end{aligned}
$$

则可以验证 f 是一一映射. 根据定义 1.3 得到整数集是可列集.

例 5　有理数集 **Q** 是可列集.

证明：我们像下表那样构造正有理数，把有理数按照下列箭头排列则可以与自然数建立一一对应关系（相应的负有理数排在正有理数后面即可）.

表 1　构造正有理数表

分子 / 有理数 / 分母	1	2	3	4	5	6	…
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	
2	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$		
4	$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{4}$		
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$			
6	$\frac{1}{6}$				$\frac{5}{6}$		
…							

前面已经证明[0, 1]与自然数集 **N** 不对等，根据可列集定义，则[0, 1]是不可