解码三大数学常数

φ π

e

π的密码

3.1416,

一个朴实无华的数——永无止境又不循环，像宇宙一样没有尽头；

古老而又年轻，像一位活力四射的老寿星，见证着整个科学史的沧桑。

它一直都是个谜，令人感到神秘奥妙、玄机莫测，

诱惑人们永无止境地探索。

陈仁政／著

科学出版社

内 容 简 介

本书生动详尽地叙述了从古到今人类对 π 不断加深的认识和艰难曲折的探索，以及有关 π 的各种知识：定义、名称、符号、性质……。林林总总的数值让人目不暇接，形形色色的算法引人拍案叫绝，多如牛毛的奇闻趣事让人心旷神怡，五花八门的名题、趣题使人赏心悦目，难解难破的谜团雾障令人萝绕魂牵……

本书不但把历史悠久、和人类如影随形的 π 融入整个数学以至科学之中，而且把人文精神融入其中，对提高人的综合素质，特别是培养人的健康心理大有裨益。

本书适合具有中等及以上文化的青少年或成人阅读，也是研究 π 的重要参考书。徜徉在 π 那“依旧”的“涛声”之中，感受阿基米德、祖冲之、贝拉德……的魅力，您会流连忘返。

“心会跟 π 一起走，说好不回头。”——看了这本书，或许您也会成为一个“π 迷”。

图书在版编目(CIP)数据

π 的密码 / 陈仁政著．—北京：科学出版社，2011

（解码三大数学常数）

ISBN 978-7-03-030884-9

Ⅰ．π…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．数学－常数－普及读物　Ⅳ．01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 073466 号

责任编辑：李 敏 赵 鹏 / 责任校对：何艳萍

责任印制：钱玉芬 / 封面设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 5 月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2011 年 5 月第一次印刷 印张：18 1/4

印数：1—6 000 字数：349 000

定价：38.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

丛书序

在美国加州谷歌公司总部的四座办公大楼中，有三座以数学符号命名："Pi"（圆周率 π）、"e"（自然对数的底）和"phi"（黄金分割数 ϕ）。可见这"三大数学常数"在这个大公司中的至尊地位。无独有偶，以色列数学史家伊莱·马奥尔在《无穷之旅——关于无穷大的文化史》一书中，也称它们为"三个最著名的无理数"。

然而，国内除了出版为数不多的关于 π，e 的小册子和个别关于 ϕ 小册子之外，至今还没有以较大篇幅介绍这"数学三圣"的系统丛书。从国外译介到国内的作品也是如此。"苔花如米小，也学牡丹开。"《解码三大数学常数》丛书（以下简称"丛书"）的作者经过断续 29 年的努力，抛出了这套丛书之"砖"，以期引出各界的"玉"。

本丛书除了"数学三圣"和涉及的数学内容之外，还把包括物理、化学、天文、地理、生物、医学、文学、美术、音乐、环保等众多领域的内容有机地结合在数学之中。这不但显示出数学的广泛威力，而且展现出各学科之间的水乳交融；在这个意义上说，"数学三圣"是承载整个科学的"诺亚方舟"。"数学，无处不在。"德国 2008 年科普活动以数学为主题的这个口号，为这种威力和交融画龙点睛。而德国联邦教研部长莎万在这个活动的开幕式上说，应该让公众，特别是让青少年认识数学的丰富多彩和重要意义——数学是所有自然科学的共同语言。

本丛书由浅入深、化难为易，力图把"可怕"变为"可爱"，以消除"数学是可怕的专业"的误解。

本丛书将人文精神融入"好玩的数学"以至整个科学之中。这样，不但精彩纷呈的内容和妙趣横生的情节引人入胜，让读者充分感受数学之真、之美、之乐、之用，而且对提升人的综合素质——特别是锤炼健康心理大有裨益。

本丛书有一千多位各领域的科学家、文学家、艺术家和政治家等“大驾光临”，他们书写的人类可歌可泣的科学史和文化史，为我们留下了形形色色的宝贵财富。现在，先贤们的身影已经越来越模糊，但也越来越清晰——我们正在享受着这些财富带来的无穷福祉。当然，我们在“理所当然”和“习以为常”地享受这些福祉的同时，千万不能忘记这些财富本身的价值和意义：科学精神、科学思想、科学方法……

“天才和我们仅仅相距一步。同时代者往往不理解这一步就是千里，后人又盲目相信这千里就是一步。”对于这些“创造历史”的天才，日本“鬼才”小说家芥川龙之介在随想集《侏儒的话》中说，“同时代为此而扼杀了天才，后代又为此而在天才面前焚香。”我们相信，读者看了这套丛书之后，对这段关于天才与“我们”的精辟名言，能有更深刻的体会，从而“在你的心上，自由地飞翔”，幸福地走过人生的“水千条山万座”而有所作为。正是：“今夜，我在看星光灿烂。明晨，我要画朝霞满天。”

陈仁政

2011年4月30日

目　　录

从书序

第 1 章　圆周率的定义——多角度给 π “拍照” ······ 1

1.1　没褪色的“黑白照”——从圆周长和直径定义开始 ······ 1

1.2　还是“彩照”吸引眼球——各家定义“八仙过海” ······ 2

1.3　爱因斯坦能帮忙吗——盼着你的“三月小船” ······ 3

第 2 章　圆周率的名称——世人给 π 改“绰号” ······ 5

2.1　古率（周三径一之率、径一周三之率） ······ 5

2.2　阿基米德数（阿氏率、亚氏率、弱率）、托勒密之值 ······ 6

2.3　歆率 ······ 6

2.4　衡率 ······ 7

2.4.1　三个衡率 ······ 7

2.4.2　$\sqrt{10}$的三件趣事 ······ 8

2.5　徽率（徽术、阿利亚巴塔之值） ······ 10

2.6　承天率（皮延宗率）、蕃率、宗率、粗率（实用率、约率、“疏率”、强率）、智率（智术、陆绩率） ······ 11

2.7　祖率（祖冲之分数、密率、姜岌之率、奥托率、梅蒂尤斯数或安托尼兹率）、三率 ······ 14

2.8　约率“摇身一变”成“疏率” ······ 16

2.9　误解祖率“祸”起三上义夫 ······ 17

2.10　正数、朒数、盈数 ······ 17

2.11　鲁道夫数 ······ 18

2.12　圆率（圜率、周率、圆周法） ······ 18

2.13 “数π”的称呼还会变吗 …… 18
第3章 圆周率的符号——π也会“变脸” …… 20
3.1 由两副“面具”组成的“脸谱” …… 20
3.2 一副“面具”“不经意”走进历史舞台 …… 21
3.3 摇身一变无人能识 …… 23
3.4 圆周率的符号在中国 …… 23
3.5 “不务正业”的π …… 24
第4章 圆周率的性质——揭开π的“庐山真面” …… 27
4.1 人文初始之后对π的认识 …… 28
4.2 无理数时期对π的认识 …… 29
4.2.1 无理数的发现 …… 29
4.2.2 无理数与π …… 30
4.3 超越数时期对π的认识 …… 33
4.4 寻找新规律时期对π的认识 …… 34
4.4.1 证明π是超越数之后 …… 34
4.4.2 π是简单正态数吗 …… 35
4.4.3 π是正态数吗 …… 37
4.4.4 π的奇趣数字中有奥秘吗 …… 38
4.4.5 等待揭秘的π …… 40
第5章 从1位到2 000万亿位——历史上如何算π …… 43
5.1 混沌初开之后——人类的第一个π值 …… 43
5.1.1 远古人用π=3 …… 44
5.1.2 不止是远古人用π=3 …… 45
5.1.3 无知或偏见闹笑话 …… 47
5.2 从阿基米德到格林贝格——古典法算π及数值 …… 51
5.2.1 并非轻而易举 …… 52
5.2.2 阿基米德割圆——223/71<π<22/7及π≈3.14，22/7 …… 53
5.2.3 “数学之神”——阿基米德 …… 58
5.2.4 编制弦表也得π——托勒密的3.141 $\dot{6}$ …… 60

5.2.5　刘徽改进割圆术——3.14 或 3.141 6 …… 60
5.2.6　祖冲之领先千年——355/113，3.141 592 6 < π < 3.141 592 7 …… 66
5.2.7　享誉世界的科学巨匠——“云中之鹤”祖冲之 …… 71
5.2.8　明清停滞——发人深省 …… 72
5.2.9　11 位和 18 位——萨马亚吉和罗曼的 π 值 …… 74
5.2.10　17 位 π 值——阿尔 - 卡西惊天下 …… 74
5.2.11　从 10 位到 18 位——韦达也来凑“热闹” …… 76
5.2.12　“以身殉 π”鲁道夫——刻在墓碑上的 36 位 π 值 …… 77
5.2.13　割圆术画上“句号”——格林贝格的 40 位 π 值 …… 78
5.3　微积分实现大突破——分析法算 π 及数值 …… 80
5.3.1　从沃利斯到莱布尼茨——分析法算 π 开辟鸿蒙 …… 80
5.3.2　由于“无事可干”——牛顿也来助兴 …… 82
5.3.3　分析法初显神威——夏普和马青的 72 位、101 位 π 值 …… 84
5.3.4　东方也不甘落后——中日算 π 点滴 …… 86
5.3.5　从德·拉尼到黎赫特——113 位到 501 位 …… 88
5.3.6　可敬可怜山克斯——墓碑上的 708 位 π 值 …… 90
5.3.7　从弗格森到史密斯——人工算 π 纪录 1 121 位 …… 91
5.4　电子计算机算 π——“芝麻开花节节高” …… 92
5.4.1　从 2 036 位到 100 万位 …… 93
5.4.2　算 π 方法的革命性大突破 …… 94
5.4.3　从 1 000 万位到 1 000 亿位 …… 99
5.4.4　最新纪录 2 000 万亿位 …… 100
5.5　从星条旗到芝麻——概率法算 π 及数值 …… 106
5.5.1　星条旗上掷短针——蒲丰法游戏算 π …… 106
5.5.2　并非只有掷针 …… 109
5.6　“单摆公式”显神通——物理实验法算 π …… 113
5.7　并不都要从“1”开始——计算 π 的单个数字 …… 114
5.7.1　花发欧罗巴，果结阿美利加 …… 114
5.7.2　π 有十进制的并行计算公式吗 …… 116

第 6 章 变“简”为“繁”出奇制胜——π 的无穷表达式 …… 119
6.1 神奇美妙的无限连分式 …… 119
6.2 和谐“奇怪”的无穷乘积式 …… 120
6.2.1 韦达首开先河 …… 121
6.2.2 沃利斯接过接力棒 …… 122
6.2.3 日本人的研究 …… 124
6.3 变化莫测的无穷级数式 …… 125
6.3.1 从莱布尼茨到牛顿 …… 125
6.3.2 夏普、欧拉、斯坦维尔、普法夫的无穷级数式 …… 126
6.3.3 无穷级数式在中国 …… 128
6.3.4 无穷级数式在日本 …… 131
6.3.5 神奇的拉马努金 …… 132
6.3.6 无穷级数式一览 …… 135
6.4 算 π 妙招反正切式 …… 139
6.4.1 反正切式一览 …… 139
6.4.2 反正切式选证 …… 142
6.4.3 求反正切式的十大妙招 …… 144
6.5 精彩纷呈的其他表达式 …… 145
第 7 章 “大明星”不是冒牌货——π 与名题 …… 148
7.1 π 与化圆为方 …… 148
7.1.1 古希腊的热门话题 …… 148
7.1.2 貌似成功的“福”倚“祸” …… 150
7.1.3 “涛声依旧”两千年 …… 151
7.1.4 从“困难”到“简单” …… 153
7.1.5 此路不通时另辟蹊径 …… 154
7.1.6 探索正未有穷期 …… 156
7.1.7 汗水没有白流 …… 157
7.2 作图求 π “十面埋伏” …… 158
7.3 π 与超越数、希尔伯特第 7 问题 …… 164

7.4　π 与近似计算 …… 166
7.5　π 与连分数、最佳逼近理论 …… 167
7.6　π 与弧度制 …… 173
7.7　π、圆方率与大自然法则 …… 175
7.8　π 与 空 隙 …… 177
7.9　π 与转圈悖论 …… 179
7.10　鼓点声中的 π …… 181
第 8 章　好伙伴形影不离——无处不在的 π …… 184
8.1　π 与伯努利难题 …… 184
8.2　π 与伯努利数 …… 186
8.2.1　伯努利数 …… 186
8.2.2　π 与伯努利数 …… 188
8.3　π 与伯努利多项式 …… 189
8.4　π 与“上帝创造的最完美的公式” …… 191
8.5　π 与曲线长度 …… 193
8.6　π 与曲线图形面积 …… 194
8.7　π 与旋转体体积 …… 196
8.8　“数学天空”任 π 飞 …… 197
8.9　“科学海洋”任 π 游 …… 198
第 9 章　增智能健身心——π 的奇趣 …… 200
9.1　杀人魔逢 π 栽跟斗 …… 200
9.2　π 中素数有几何 …… 201
9.3　π 与素数的奇妙巧合 …… 202
9.4　π 与根式这样“多角恋” …… 204
9.5　西文字母里藏迹隐踪 …… 205
9.6　纵横图中的秘密 …… 206
9.7　“π 痴”们如何编“π 诗” …… 207
9.8　“老外”赋“π 诗”万紫千红 …… 212

9.9　愚蠢的巴霍姆和精明的狄多女王 …… 214
9.10　游览巴黎不妨光顾"π宫" …… 216
9.11　谜语、游戏和π …… 218
9.12　π与50，144，360的"天作地合" …… 221
9.13　π的"对称"这般神奇 …… 222
9.14　π也是"天地英雄" …… 223
9.15　π、"白色情人"和爱公同庆 …… 226
9.16　π英雄击败"魔鬼机器" …… 229
9.17　$e^{\pi\sqrt{163}}=262\ 537\ 412\ 640\ 768\ 744$吗 …… 230
9.18　圆和球，两张天下最美的脸 …… 231
9.18.1　杨振宁和"金童玉女" …… 231
9.18.2　最完美的圆和球 …… 234
9.19　随车移动的π …… 236
9.20　假鼻子有了"兄弟版" …… 238
第10章　难理解却易明白——研究π的价值何在 …… 239
10.1　对数系理论作贡献 …… 240
10.2　其他数学成就应运而生 …… 240
10.3　计算机进展的指标和实用前的特殊试验手段 …… 242
10.4　认识"计算机影响数学"更加深刻 …… 245
10.5　培养记忆力的一种良方 …… 246
10.5.1　π迷们的背π之路 …… 246
10.5.2　质疑声之后的质疑 …… 248
10.6　检验公式优劣的特殊手段 …… 251
10.7　数学需要时刻严密吗 …… 252
10.8　衡量一个国家的数学水平 …… 254
10.9　感悟"认识自然不会穷尽" …… 254
10.10　基础科研对急功近利说"不" …… 256

第 11 章　反伪打假无尽期——谈圆算 π 也要讲科学 …………………… 259
11.1　π 是有理数吗——伯熙瓦自摆“乌龙” ………………………… 259
11.2　只有前 6 位相同——一个西部农民能完成“革命”吗 …… 260
11.3　法律决定 π 值——不该发生的“笑话” ………………………… 262
11.4　“π 跟石头一起走，说好不回头”——金字塔的神话 …… 264
11.5　美缘为何“终虚话”——倒霉的不仅是“白马王子” … 268
参考文献 ………………………………………………………………… 271
后记 …………………………………………………………………… 277

第 1 章　圆周率的定义
——多角度给 π“拍照”

数学，作为人类思维的表达形式，反映了人们积极进取的意志，缜密周详的推理以及对完美境界的追求。

——美籍德国数学家理查德·柯朗

各家的圆周率：数学家说是圆周长和直径的比；工程师说约 3.14；物理学家说是3.141 6，误差小于0.000 3%；天文学家说是3.141 592 65，误差约 1.146×10^{-9}。

1.1　没褪色的“黑白照”
——从圆周长和直径定义开始

小学数学书上说，圆周率 π 是（欧几里得）平面上圆周长和直径的比（值）。这种 π 的定义，是一张传统的“黑白照片”，但还没“褪色”——直到今天还在用。

当然，这张“黑白照片”还可以换个角度——从求圆面积和半径的比来定义。

任取半径是 R 的圆，画它的内接正 n 边形，并把多边形的面积记作 S_n。显然，当 n 无限增加时，内接正 n 边形接近于圆，p_n 接近于圆周长 C；同时，S_n 也就接近一个确定值，这个值叫圆的面积 A。也就是说，当 n 无限增加时，内接正多边形面积组成的无穷数列 S_3，S_4，S_5，S_6，$\cdots$，S_n，$\cdots$的极限是 A。

现在证明：圆周率 π 又是 A 和 R 的平方的比，即（1）$A=\pi R^2$ 成立。事实上，这时 $D=2R$，而 n，a_n 和圆内接正 $2n$ 边形的面积 S_{2n} 之间，有（2）$S_{2n}=nRa_n/2$ 和（3）$p_n=na_n$ 的关系。其中（3）成立是显然的，下面我们来证明（2）也成立。

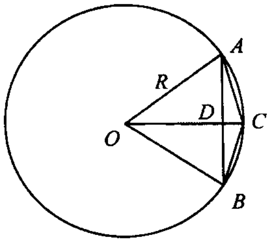


图 1-1

如图 1-1 画⊙O 的内接正 $2n$ 边形并连接它的中心和顶点，这 $2n$ 条连线就把它分成 $2n$ 个三角形。把其中相邻的两个三角形记作 $\triangle OAC$，$\triangle OCB$，这时，AB 与 OC 垂直相交于 D，于是有（4）$\triangle AOB$ 的面积 $=OD\times AB/2$ 和（5）$\triangle ACB$ 的面积 $=CD\times AB/2$。而 $AB=a_n$ 是圆内接正 n 边形的一边，又 $OD+CD=OC=R$。因此，从（4）和（5）就可以得到（6）$\triangle OAC$ 的面积 $+\triangle OCB$ 的面积 $=\triangle AOB$ 的面积 $+\triangle ACB$ 的面积 $=(OD+CD)\times AB/2=Ra_n/2$。

而圆内接正 $2n$ 边形是由 n 个这样的相邻三角形组 $\triangle OAC$，$\triangle OCB$ 拼成的，因此由（6）就得到（2）。

从（2）和（3）就可得到（7）$S_{2n}=p_nR/2$。

当 n 无限增加时，S_{2n} 趋向于 A，p_n 趋向于 C，所以（7）的两边就分别趋向于 A 和 $CR/2$，而 $CR/2=\pi DR/2=\pi R^2$，这就得到（1）。

于是，我们就换了一个角度——用圆面积来定义了 π。

1.2 还是“彩照”吸引眼球 ——各家定义“八仙过海”

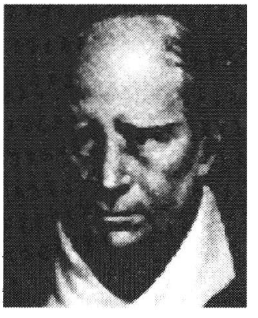
显然，原则上任何含 π 的公式都可用来定义 π。例如，由球体积公式 $V=4\pi R^3/3$ 就可以得到 $\pi=4R^3/(3V)$。于是可以说：圆周率 π 是球半径 3 次方的 4 倍和球体积 3 倍的比，等等。不过，很显然，这类定义不如 1.1 节的方法（用周长或面积来定义）方便，所以我们打算不继续这样给

它“拍照”。

我们要说的是另一类定义——给它拍几张打破“传统”的“彩照”。

数学家们都说 $\pi=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$，它的源头是英国数学家、密码专家沃利斯对单位圆面积的研究。稍懂微积分的人都知道，这个式子表示的是一个单位圆——半径为 1 的圆的面积。此外，还可以证明 $\pi=2\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$。

在 1719 年，一位最先使用虚数的意大利业余数学家——法格纳诺的定义是：$\pi=4\ln\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{\frac{\mathrm{i}}{2}}$（即 $\pi=2\mathrm{i}\ln\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$）。这个式子巧妙地把数学中最重要的 1，i，π，e 联系在一起了。



朗斯基

另一位波兰数学家朗斯基则别出心裁，说“数 π 的绝对意义是 $\frac{400}{\mathrm{i}}\left[(1+\mathrm{i})^{\frac{1}{\infty}}-(1-\mathrm{i})^{\frac{1}{\infty}}\right]$”。

此外，如果某个数在 0 和 2 之间，而且它的余弦值为 0，那这个数的两倍就是 π。而我们知道，$\pi=2\arcsin(1)=\arccos(-1)$。当然，在分析学中，π 也可以严格地定义为满足 $\sin(x)=0$ 的最小正实数 x。

由上可见，不但从几何的角度可以给 π“拍照”，而且从代数、数学分析、解析几何、三角等多个角度都可以给 π“拍照”，从而得到一张张“回头率”高的“彩照”。其实，这正体现了“数学在它自身的发展中是自由的……数学的本质在于它的自由”。德国数学家乔治·康托尔这样说——这句话，也用德语镌刻在他的纪念碑上。

1.3　爱因斯坦能帮忙吗——盼着你的“三月小船”

乘着三月黑色的小船/爱因斯坦/……/从复杂的数学中崛起/矗立在

威廉姆斯

水仙花丛中/春风吹拂/从四个方向，有冷有热/摇曳着那些花朵。这是长诗《水仙花的圣·弗朗西斯·爱因斯坦》中的一小段，由美国著名诗人威廉姆·卡罗斯·威廉姆斯在 1921 年发表。

英文 Narcissus（水仙花），原指希腊神话中有绝世之美的那喀索斯——一个因自恋而临泉自照，然后死去的美男子。在他的尸体停处，突然长出一株黄白相间的花，就是人们所说的那喀索斯花即纯美的水仙花。威廉姆斯诗中“水仙花”，指思想自由纯美的爱因斯坦和他那革命性的广义相对论。诗的标题中的“圣·弗朗西斯”是法语人名，含“自由”之意，不但指思想自由的爱因斯坦，也隐喻爱因斯坦给美国人带来了关于自由的新观念。

对于圆周率的定义——不，不仅仅对“定义”，而是对整个圆周率的研究，作者盼望着读者您，也当一回“爱因斯坦”，驾驶“三月黑色的小船”，给我们“带来关于自由的新观念”，矗立在“凌波仙子”丛中吧！

第 2 章　圆周率的名称
——世人给 π 改“绰号”

除了变，一切都不能长久。

——英国诗人雪莱

2.1　古率（周三径一之率、径一周三之率）

人类最早使用的粗糙圆周率是 3，这个值被后人称为“古率”。这“3”最早起于何时，已“穷远不可追问”。但在中国，木工师傅有句从古流传下来的口诀可以作证：“周三径一，方五斜七”。这个口诀的意思是，直径为 1 的圆，周长大约是 3；边长为 5 的正方形，对角线之长大约是 7。

成书不晚于公元前 1 世纪的中国古书《周髀算经》的“卷上”，记述了约公元前 1100 年周公与商高的问答。其中有“商高曰‘数之法出于圆方’”，下面有三国时代吴国的数学家赵爽大约在 222 年的注“圆径一而周三”的记载。此外，其他中国古代文献如《周礼考工记》中也有相同的记载。

刘徽

“中国的牛顿”——魏晋时期的数学家刘徽在 263 年注《九章算术》，把圆周率称为“周三径一之率”，这是古率的又一个名称，它在一些文献中被叫做“径一周三之率”。由此可见，古率 3 在中国古代刘徽之前已广为流传。

2.2 阿基米德数（阿氏率、亚氏率、弱率）、托勒密之值

古希腊数学家、物理学家阿基米德率先将π值算到两位小数3.14。为了纪念他的这一伟大贡献，后人将3.14叫做“阿基米德数”或“阿氏率”。中国翻译家郑太朴翻译、商务印书馆于1930年出版的美国数学史家达维德·尤金·史密斯等写的《数论尺规作图及周率》一书，将阿基米德译为“亚几默德”，并把22/7称为“亚氏率”。

一些人称3.14或157／50为“弱率”。

希腊天文学家、地理学家、数学家托勒密在制作弦表时，得到的π值为$3.141\dot{6}$。中国桥梁学家茅以升在《中国圆周率略史》一文中，将它称为“托勒密之值”——原文为“Ptolemy（即中国盛称多禄某）之值”。不过，茅以升却说托勒密算得的π值是3.141 552。

2.3 歆　　率

公元9年孟夏，中国汉代数学家刘歆，制造了“律嘉量”（即“嘉量斛”或“律嘉量斛”）——“龠、合、升、斗、斛五量备于一器”的铜质圆柱形标准容器。由此，他得到圆周率近似值为3.154 7或3.179 024 7，这两个值都叫“歆率”（或“刘歆率”）。下面分别说明来源。

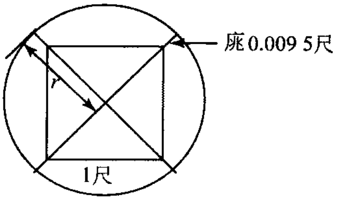


图2-1

3.154 7是根据刻在嘉量斛上的铭文推算出来的。这段铭文是：“方尺而圆其外，庣旁九厘五毫，幂百六十二寸，深尺，积千六百二十寸，容十斗”（1斗=10立方分米）。这是说这个容器的几何尺寸，而它的平面图形如图2-1所示。