

有 限 元 素 法

—基本技巧和算法—

董 平 J.N.瑞賽托斯 著

熊昌炳 等譯校

北京航空學院四〇五教研室

一九七九年八月

有 限 元 素 法

—基本技巧和算法—

董 平 J.N.瑞赛托斯 著

熊昌炳 等译校

北京航空学院四〇五教研室

一九七九年八月

译者序言

本书由美国麻省理工学院宇航系付教授董平先生和东北大学教授 J. N. 瑞赛托斯合著，是为该校研究生和高年级大学生提供的一本好的教科书。它的特点是以变分原理为基础，详尽而有系统的对有限元素法作了透彻的分析，不仅对位移模型阐述清楚，而且对杂交模型的特性作了严谨的推导和说明；同时，本书还以相当的篇幅，把高速计算机的求解运算方法做了介绍，俾使有限元素法的理论与实际运用紧密结合。因此它是一本内容丰富，重点突出的书籍。

我们在未编出合适的教材之前，选用本书作为涡轮喷气发动机结构强度专业学生的主要参考书和研究生的教材。因急于应用，出版匆忙，参加翻译与校对的人员较多，因此本书的文采和语气，前后不尽相同，甚至有些词汇和表达方式也不统一，这是我们工作中的粗糙不当之处；加之水平有限，经验不足，诚恳欢迎读者批评指正。

本书各章由聶景旭，谢竹虚，刘方杰，宋兆泓，郑光华，陈光，张锦，熊昌炳，李纪安，郭学廉，马枚等同志分别翻译，还请兄弟单位的一些专家进行过审阅，最后由熊昌炳对全书作统一审校。

本书可供有关工程技术人员、科学工作者及高等院校师生参考。

原书内容简介

当今，有限元素法可以称之为是复杂结构分析或者多自由度系统分析的“最佳技术”(Technique of Choice)。然而这种方法第一次应用到工程问题上仅仅是在1950年中期，甚至直到1960年还没有为其命名。有限元素法的第一次应用是对飞机结构进行分析：把飞机构架细分为三角元素或矩形元素，并由每一种元素确定一个矩阵位移函数。这样，就可以很方便地由计算机处理整个结构的近似特性解。

在这些年中，这种方法的适用能力和范围已有了巨大的发展。有限元素法除在结构力学中得到了广泛的应用以外，它也被用来研究连续介质力学中的问题，诸如：断裂力学；传热学和流体流动。同时，首先进行这种研究的部分航空工程师、既与许多机械、原子核、土木和船舶等方面的工程师相结合，也与材料科学理论家和应用数学家进行了合作。

由于有限元素法的极端重要性，最近已经出版了一些有关这个问题的书籍。然而在董平和瑞赛托斯的这本书中具有许多突出的特点。总括这些特点使本书具有异常的吸引力：

——以通俗易懂的方式，首先介绍并严格推导了方法的数学基础，这样就便于学生了解方法的广泛适用性的基本原理。

——本书从始至终都强调了变分法的使用（为了方便起见，就像关于矩阵代数一样，也提供了一份关于变分学的附录）。

——借助于有限元素法，详细地算出了包括泊松方程(Poisson's Equation)和 Sturm-Liouville 问题的实例。

——虽然本书完整地阐明了位移模型，同时对适用性更广的杂交模型(Hybrid Model)也作了很详尽的讨论。董平博士是这种杂交模型的创始者之一。

——详细地讨论了获得计算机求解的技术，这样，读者就能够更好地编制一个与自己专门研究或设计兴趣相适应的新程序。

董平(Pin Tong)以前是麻省理工学院航空和宇航系的付教授。现在，他是美国运输部运输系统中心应用力学的主要科学工作者。瑞赛托斯(Rossettos)教授是东北大学机械工程系力学组主任。

著者序言

虽然有限元素法起初的发展是用来求解结构力学和弹性力学中特定范围内的问题，但是方法的数学基础在整个应用数学中、连续介质力学中、工程学和物理学中都能找到可以应用的问题。这种方法特别适用于在现代计算机上求数值解。本教材就是为清楚地阐明有限元素法宽广的适应能力以及计算的实际问题。它在有限元素法的严密的数学基础与实际应用之间架设了桥梁。

本书是为大学生、工程师和科学工作者准备的。它是这样写成的：使得在应用数学系和工程系中的学生能应用它。本书提供了有限元素法课程的基础内容，它可以用于低年级的研究生和某些高年级的大学生。所举的例子和作业是这样安排的：使得本书便于自学。典型的大学生的工程教育，包括一般的矩阵代数，方程组、数值方法以及常微分偏微分方程组的基本原理，应作为先修课程。（在本书附录中给出了矩阵代数和符号）。虽然在本书中处理物理课题的方式是为了使他们能理解其数学内容，但是他们的固体力学、流体力学和传热学等方面的工程基础知识对理解是有帮助的。因此数学系用本教材在分析和数值近似技术等专门课程中是有益的。

本书最初的原稿是作者中的年长者在麻省理工学院为研究生的第一年课程编写的。在这次经验的基础上，我们决定发展成一门教程、它既侧重于有限元技术的一般方法，也侧重于它在高速计算机上的应用。这是由于处理现代工程和科学产生的复杂问题的需要所推动的。因为数值方法往往是求解复杂问题的最后手段，所以对于应用数学家、工程师和科学家，重要的不仅仅是准备这种方法的基本原理知识，而且要能以最大可能的程度——即是说、以最高的效率——利用计算机。

因此，在本书中，我们力图在它的数学基础上对方法提供一合理的引伸，把这种技术展开到一种清晰容易理解的地步。了解了每一步的本质之后，读者可把这种方法应用到他（她）原来的应用数学、工程和科学的问题中去。为了有助于这种应用，我们从开头就引用了边值问题的变分方法，有限元素法就是从这种方法发展起来的。在附录中提供了所需用的变分法。在好几章中都叙述了在计算机上应用这种方法的细节，包括怎样解大型代数方程组；怎样安排数值计算次序以节省机器时间；怎样贮存和取出信息以减少对机器内存的需要。

第一章是导论，包括方法的历史和它的物理和数学的基础。一种基本思想的总概述对方法提供了重要的轮廓。先讨论了位移模型、插值函数概念和收敛性，然后给出了一些说明性的例子，这些例子应用有限元素法求解关于Sturm—Liouville问题的常微分方程，这个问题经常出现在弹性力学、流体力学和传热学中。在第二章中，介绍了涉及偏微分方程问题的解，对Poisson方程给出了完全的有限元分析。特别是解释了采用三角形和矩形元素的元素矩阵的估算。指出了把元素矩阵组集为一个总矩阵的基本方法，并附有一个简单而完整的采用三角形元素的例子、用实际的编号来说明各种步骤。组集总矩阵的一步一步的方法——是一种特别适合于大型方程组，对在计算机上实行起来很理想的方法——在第三章中作了详细解释，也用例子作了说明。对于总矩阵的边界或约束条件的应用也作了说明；对一个说明

性的例子得出了最后解，并与精确结果作了比较。在第四章中以在计算机中运算最为有效和最精确的观点，描述了大型方程组求解的各种数值技术；从采用有限元素法而得到的稀疏矩阵具有很大的好处。在第四章中我们也讨论了可减少所需内存的贮存信息的技术和尽量减少计算机运算次数的计算次序。

在第五章和第七章中，给出了在弹性力学以及梁和板的弯曲问题中的应用，在前几章已讨论过的一些思想在这里被进一步展开，也给出了弯曲问题所固有的某些新的特征。第六章致力于一般的插值函数，对于有限元应用有典型意义的数值积分方法，以及高阶元素。第八章包含应用杂交有限元模型于二阶和四阶偏微分方程问题。在第九章中，从弹性振动、传热学和流体流动问题的领域中选择了几个课题。对有限元技术的最新发展也作了描述，例如应用超元 (*Superelements*) 包含奇异点的问题和应用无限域描述的问题。在本书的各章中，关键矩阵的某些运算的某些重复和全部写出的目的在于使各章的系统有合理的完整性。这种详细的解释将加强本书可供自学的特点。

本书的重点是放在位移模型上，但杂交模型概念也被引入了，而且表明它是从这种方法的数学基础上自然发展起来的。本教材是包含了杂交有限元模型及其应用的完整的一章的唯一的一本书。

著者们要对他们的许多老师们、同事们、朋友们和学生们表示感谢。我们特别感激 *Y.C. Fung* 教授和 *T.H.H. Pian* 教授。他们对于工程问题多方面的深入的洞察力，他们在力学和应用数学方面广阔的知识以及他们对于这些领域的持久的贡献，在完成这本书时始终指引着我们。对于著者们的夫人要给予特别的感谢。她们一直是鼓舞和鼓励的源泉，她们一直愿意做出牺牲，才使得这本书能够完成。 *Jean Tong* 带着四个孩子操持家务常常为本书抄写许多繁杂的式子而热心地工作到深夜； *Joy Rossettos* 坚定地、有耐性地用打字机打完了全书。深深的感谢还要给予著者们年轻的孩子们，他（她）们不得不为他（她）们的父亲们而牺牲了宝贵的玩耍时间。麻省理工学院出版社也给了很好的合作。

董 平 (*Pin Tong*)

瑞赛托斯 (*John N. Rossettos*)

《有限元素法》中文译本的前言

“有限元素法”这本书，它的名字标明了它的性质：这是一种解决力学和数学的概略的“方法”，它在有限单元内使用直接和简单的局部性近似函数求取复杂问题的答案。任何方法都是为了实际应用，我在这方面的工作，迄今十多年，都是着眼于要使它成为一件方便应用的工具，一个利于解决实际工程问题的方法，廿年来这种方法的发展也证明，它的生命力完全在于它的实践性；科学的理论，科学的方法，如果不能在实践中得到经验，不能在实际问题中发挥作用，那么，它也就没有存在的理由；从这样的看法出发，我在已往的工作中总是力求使它成为一种解决现代工程技术的复杂问题的最简单，最直接的方法。我还认为，如果为了追求数学上的纯粹抽象境界，而把它推上走向越来越抽象，越来越玄虚的道路，以致于使得一般工程技术人员无法了解和使用，从而徒生可望而不可及之叹，那就不免有使之步上斜路之虞了。

一九七七年暮春，我在相隔近三十年之后，首次返国探亲，过上海、北京时曾蒙国内学者多人，盛情接待座谈，受益匪浅。今年初夏再度归省，有机会在上海和北京二地向众多的同行介绍自己的一得愚见，游子归来，受此厚遇，私心深感荣幸。如今祖国已经进入实现现代化的新时期，九亿神州，前程似锦，如果我的工作对父母之邦的现代化大业能有些微助益，我将引以为我的莫大幸福。

北京航空学院是近年集全国航空精华组成的新的研究学府，是为人们景仰的崇高知识殿堂，现在我的这本作品被北京航空学院熊昌炳等先生翻译出来，付梓刊行，这对我是一个不敢奢望的荣誉，同时我也希望国内的学术前辈和读者不吝指正，多多赐教，借此机会，我谨向北航的领导和以上诸位先生表示最诚挚的感谢。

董 平

一九七九年七月于北京

目 录

译者序言

原书内容简介

著者序言

中文译本的前言

第一章 有限元素法	1
第二章 泊松方程的有限元素法	27
第三章 大型方程组的组集与求解	50
第四章 在高速计算机上对大型方程组的组集和求解法	76
第五章 在固体力学方面的应用	92
第六章 插值函数, 数值积分及高阶元素	119
第七章 梁和板的弯曲	156
第八章 杂交法	170
第九章 几个选题和最新进展	136
附录 A 矩阵代数和符号	210
附录 B 矩形元素	215
附录 C 直边三角形元素	221
附录 D 变分法	225
参考文献	235

第一章 有限元素法

1.1 引言·本方法的历史

有限元素法作为处固体力学问题的方法,是在廿世纪50年代第一次出现的,它是由矩阵结构分析法派生出来的(Argyris 1955, 1958; Livesley 1964)。换言之,由于要对由大量组件构成的复杂结构找出系统的分析方法,在1945—1955的十年间,矩阵法有了很大发展。

矩阵结构分析法的基本过程,是把构件的每个节点上的位移和内力之间的关系表达出来,以节点位移、节点内力之一或者二者为未知数,来形成代数方程组。根据未知数的选取不同,将其称为位移法、力法、或者混合法。方程组用矩阵符号书写最为方便,并可由高速电子数字计算机来求解。

“有限元素法”名称是由Clough在1960年第一次提出的。1956年由Turner、Clough、Martin、Topp等人在飞机结构分析中,将位移法应用于平面应力问题,把结构分割成三角形或矩形“元素”。由元素的刚度矩阵把元素的节点力与其节点位移联系起来,以此来描述元素的状态,并将其公式化。对比起来,常规的矩阵分析法是将每个构件的力与位移关系严格推导出来的,而结构分割为元素的解法,则只是利用了每个元素中的近似位移函数。1955年,Argyris对平面应力条件的矩形板元素的刚度矩阵分析中,将能量原理和矩阵方法综合详细地论述过。在这之前,Courant(1943)已应用“元素”的原理,在构件的三角形元素中假设翘曲函数为线性分布,获得St-Venant扭转问题的近似解。这些早期的有限元计算是以虚功原理和最小位能原理为基础的;它们也可视为是Rayleigh—Ritz法的延伸,即将其分段线性函数假设是连续的以求得近似解。但是,有限元素法比通常的Rayleigh—Ritz法却具有更大的通用性。

在1960—1970的十年间,根据不同类型的变分原理,对有限元素法作了系统的阐述,这是由Besseling(1963)、Melosh(1963)、Jones(1964)、Gallagher(1964)、Pian(1964a)、Fraeijs de Veubeke(1964)、Herrman(1965)、Prager(1967、1968)、Tong和Pian(1969)、Tong(1970)等人发展起来的。实际上,由于假设域中变量函数仅为分段连续,则必须发展新的和修正的变分原理——即允许域中变量在内部元素边界为不连续的变分原理。

然而,有限元素法也不一定需要以变分法为基础来说明。Oden(1969)写出的热弹性问题的有限元分析方程,就是从所谓的能量平衡法着手的。Szabo和Lee(1969)利用Galerkin法得到平面弹性问题的有限元解。对某些边界值的问题,包括适合用规则元素排列而成的规则多边形,其方程组与以前的常规差分法的结果相同(Pian 1971b)。然而,有限元素法通常更便于应用在不规则的区域和不同的介质中。

自从“有限元”在结构力学中出名以来的近十五年间,在该领域的研究和发展是非常迅速的。有限元素法已应用于连续体力学的这样一些问题中,如棱形杆的扭转、稳态热传导、理想流体中的潜流等。它的使用者,由开始少数的航空结构分析家,发展到大量的土木工程、机

械、造船、以及原子能工程的工程师。

1.2 物理概念

有限元素法首先是用一有限的但是大量的座标数或自由度数来近似而又系统地描述一连续体。其概念来源于结构原理。一个实际结构，通常是建立在许多结构元件上的，当然，这些元件是在有限数的点上彼此相连。根据每个元件的结构特性，在节点以及在某些元件内的特殊点上，按自由度数来确定力与位移的唯一关系。可用各种熟悉的方法，来描述组合结构的状况。例如在图 1.1 中，为由两个元件铰接而成的构架，设每个元件只承受其轴向力。并

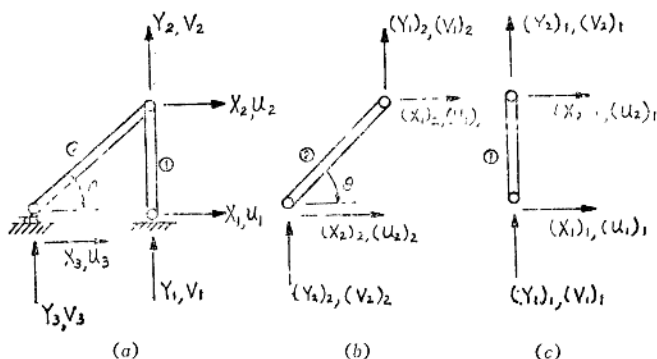


图 1.1 铰接构架：(a) 组合的；(b, c) 构架元件。

设这些元件有相同的横截面积 A 和弹性模数 E ，其长度分别为 L_1 及 L_2 （即图 1.1 中的 l_1 和 l_2 ）。对元件 1 的力与位移关系，用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = -\frac{AE}{L_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}, \quad (1.1)$$

对元件 2 为

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = -\frac{AE}{L_2} \begin{bmatrix} c & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}. \quad (1.2)$$

为了阐明这些关系的物理意义，例中元件 2 在节点 1 的水平分力设为 $(X_1)_2$ ，如 (1.2) 式中所示。根据 Hook 定律，该分力等于

$$(X_1)_2 = F_a \cos \theta = \frac{AE}{L_2} \delta_a \cos \theta,$$

其中 F_a 是元件 2 的轴向力, δ_a 是元件 2 的轴向伸长:

$$\delta_a = (u_1)_2 \cos \theta + (v_1)_2 \sin \theta - (u_2)_2 \cos \theta - (v_2)_2 \sin \theta,$$

由这些关系得出

$$(X_1)_2 = \frac{AE}{L_2} \{ [(u_1)_2 - (u_2)_2] \cos^2 \theta + [(v_1)_2 - (v_2)_2] \cos \theta \sin \theta \},$$

这就是 (1.2) 式中的方阵第一行与位移分量列向量相乘的结果。在 (1.1) 和 (1.2) 中其余各力的分量, 均可由同样方法获得。

这两个元件可以用下面方法组合起来。我们首先引用图 1.1 中的整体位移分量 u_1 、 v_1 、 u_2 、 v_2 、 u_3 、 v_3 与每个元件局部位移分量间的关系, 局部位移分量为 $(u_1)_i$ 、 $(v_1)_i$ 、 $(u_2)_i$ 、 $(v_2)_i$, 其中 $i=1, 2$, 为元件号。于是

$$u_1 = (u_1)_1, \quad v_1 = (v_1)_1,$$

$$u_2 = (u_2)_1 = (u_1)_2, \quad v_2 = (v_2)_1 = (v_1)_2$$

$$u_3 = (u_2)_2, \quad v_3 = (v_2)_2.$$

根据节点平衡条件, 要求作用的外载荷分力等于各元件作用于该节点上的分力总和。将整体与局部位移分量间的关系, 以及 (1.1) 和 (1.2) 方程组都考虑进来后, 由平衡条件得

$$X_1 = (X_1)_1 = 0,$$

$$Y_1 = (Y_1)_1 = \frac{AE}{L_1} v_1 - \frac{AE}{L_1} v_2,$$

$$X_2 = (X_2)_1 + (X_1)_2 = (X_1)_2 = -\frac{AE}{L_2} [c^2 u_2 + cs v_2 - c^2 u_3 - cs v_3],$$

$$Y_2 = (Y_2)_1 + (Y_1)_2 = \frac{AE}{L_1} (v_2 - v_1) + \frac{AE}{L_2} [cs u_2 + s^2 v_2 - cs u_3 - s^2 v_3],$$

$$X_3 = (X_2)_2 = \frac{AE}{L_2} [-c^2 u_2 - cs v_2 + c^2 u_3 + cs v_3],$$

$$Y_3 = (Y_2)_2 = \frac{AE}{L_2} [-cs u_2 - s^2 v_2 + cs u_3 + s^2 v_3].$$

这些方程式可以写成矩阵形式, 便得出组合结构的力与位移的矩阵关系:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = AE \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c^2}{L_2} & \frac{-cs}{L_2} & \frac{-c^2}{L_2} & \frac{-cs}{L_2} \\ 0 & \frac{-1}{L_1} & \frac{cs}{L_2} & \frac{1}{L_1} + \frac{s^2}{L_2} & \frac{-cs}{L_2} & \frac{-s^2}{L_2} \\ 0 & 0 & \frac{-c^2}{L_2} & \frac{-cs}{L_2} & \frac{c^2}{L_2} & \frac{cs}{L_2} \\ 0 & 0 & \frac{-cs}{L_2} & \frac{-s^2}{L_2} & \frac{cs}{L_2} & \frac{s^2}{L_2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

对连续体的一般方法，是将其划分成有限数目互不重叠的称为元素的小区域（图1.2）。元素间的共同边界称为内边界。我们可以想象，元素之间仅在共同边界上的有限数目的离散点上相连接。给这些特定的点编上号，并称为节点。对应于各个节点的有限自由度数，以及由这些自由度数来表征的元素特性，就是力学的广义坐标。它们通常代表了某些物理量，例如节点上的位移、应力等。平面弹性力学的典型三角形元素，取其顶点为节点，如图1.3所示。

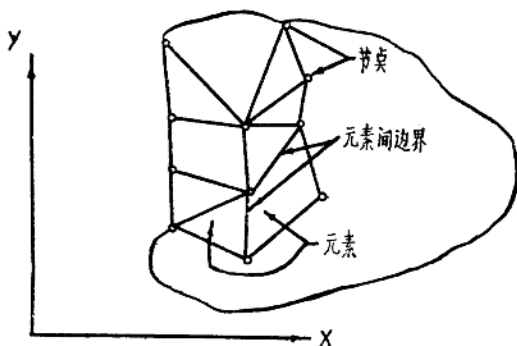


图1.2 连续体中元素

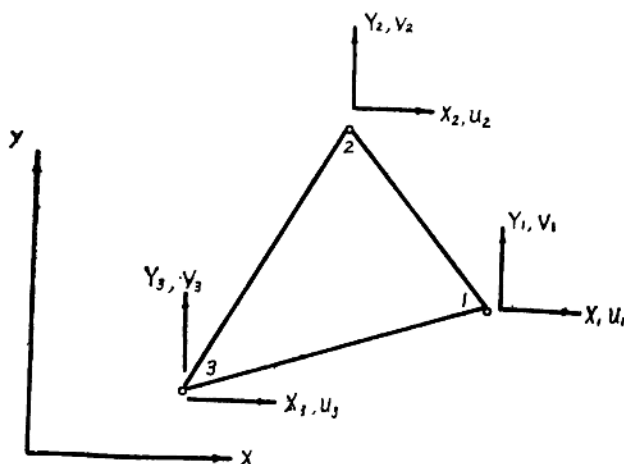


图1.3 三角形元素

三角形域 1 2 3 的平面应力变形状态的特征，用其顶点上的位移(u, v)与广义力 (X, Y) 之间的关系来表示，即为

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & & & & & \\ k_{21} & k_{22} & & & & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & & & \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & & \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

对称

求定 k_{ij} 是有限元素法的基本任务之一。在正常情况下，不同的元素在其公共节点上有相同的广义坐标值，近似由元素组合成的连续体，其特性是按广义坐标的整个数组来研究的。

应该强调，由 (1.1) 或 (1.2) 所表示的构架元件特性的力与位移关系是精确的。然而，用 (1.4) 表示平面弹性体的三角形域的特性，则是近似的。

1.3 数 学 概 念

在经典的连续体力学中，场的问题常用满足边界条件的一组微分方程式来描述，或者用变分原理的极值(在很多情况为极大或极小)，或者用某些变分形式(不完全的变分原理)来阐述。例如，细绳在拉力 N 作用下的挠度 u 可用二阶微分方程来描述

$$N \frac{d^2 u}{dx^2} = P(x),$$

边界条件

$$u=0, \text{ 当 } x=0, L;$$

或者按照泛函的极小公式来阐述

$$\Pi = \int_0^L \left[\frac{1}{2} N \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + P(x)u \right] dx, \quad (1.5)$$

其中 u 为连续的, 并在 $x=0, L$ 处 $u=0$ 。另一例子是一维热传导问题, 温度分布 T 由微分方程描述

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

其中 a 是物质的热传导系数, 边界条件是

$$T(0, t > 0) = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = 0,$$

初始条件是

$$T(x, 0) = 0;$$

或者用变分法公式来阐述

$$\delta \Pi = \int_0^L \left[\frac{\partial T}{\partial t} \delta T + a \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \delta T}{\partial x} \right] dx = 0, \quad (1.6)$$

或者用

$$\delta \Pi = \int_0^L \left[\frac{\partial T}{\partial t} \delta T + \frac{a}{2} \delta \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0, \quad (1.7)$$

这里对于 $t > 0$ 在 $x=0$ 处 $\delta T=0$, $T(x, 0)=0$, 及 $T(0, t > 0)=1$ 。在一定条件下, 这两种方法在数学上是等价的。

求解具有高阶可微的连续体力学问题, 需要到处满足微分方程及满足所有边界条件。在古典的近似理论中(Rayleigh-Ritz法或Galerkin法), 仅考虑非常光滑的函数。而有限元法的情况则不同, 它的解只用有限的自由度数来确定, 并且是分段光滑的函数。这些函数的可微性通常比在场中微分方程的最高阶次要低些。

例如, 前面提到的两个问题是二阶微分方程式, 有限元的解通常是连续的, 第一阶偏导数是分段连续, 而第二阶偏导数在许多点上数学上是沒有定义的。图1.4表示的典型一维细绳问题的有限元解, 是一个简单的分段线性函数。在任意两点 $x=x_i$ 及 x_{i+1} 之间的 u 值近似为

$$u = u_i \left[1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right] + u_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (1.8)$$

u 的一阶导数在 $x=x_i$ 处不连续。 $[u_i]$ 为 $x=x_i$ 处的 u 值, u_i 是该问题中的广义坐标, 它们由(1.5)的极小化来确定。]

对于四阶微分方程的情况(例如梁或平板的弯曲, 或双调和函数), 有限元解法仅对一阶偏导数是连续的。这些情况将在第7节详述。

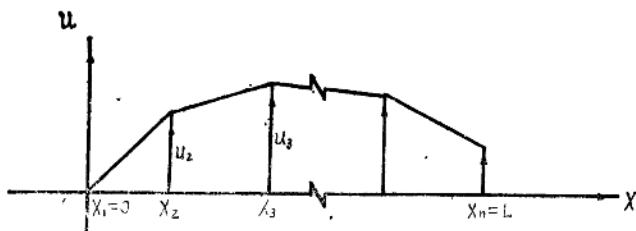


图1.4 对二阶微分方程的一维有限元解

一个连续体可由许多元素组合而成(图1.2为二维问题,图1.4为一维问题)。每个元素本身是连续的。当满足规定的边界条件时,单个元素的解是唯一的。例如细绳问题,由点 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 将 $0 \leq x \leq L$ 区域划分成许多段(图1.4)。当在 x_i 及 x_{i+1} 点上规定了挠度,则在 $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ 整段的挠度就是唯一的。现在,如果对元素规定的挠度碰巧与原来连续体的解相同,则在元素内的解当然与原来连续体的一样。因此,为了求得连续体的解,应按照元素的适当边界条件,首先找出单个元素的解。为了得到元素内的解,可以将元素水平线的边界值当作虚构的边界条件(依此观点,这样的值依赖于整个区域的解)。以后将见到,这些元素内变量的值,是由元素边界节点的值用插值法确定的。

为了求解细绳问题而虚构的边界条件,可以选取节点上挠度为 u_i 。于是可以由两节点的挠度 u_i 及 u_{i+1} 来建立元素在 $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ 内的解。最后,所有节点的挠度由在 $x=x_1=0$ 及 $x=x_n=L$ 处的挠度为零的条件,和每个元素与其相连的元素相平衡的条件来决定。

如另一例,在弹性力学问题中,其虚构边界条件可以选取域中每个元素的边界位移值与其相邻元素在其共同边界上位移值相同。对虚构的任一组边界位移,在元素内就会产生与其相适应的位移、应力等。将所有元素的这些解汇集起来,就清楚地说明了整个域连续位移场,因为每个元素的位移解,在元素内是连续函数,对于构件,相邻元素的所有共同边上的解也将协调起来。虽然,有限元解中的应力(或应变)场(与位移的一阶偏导数成正比),在内部元素边界上一般是不连续的。因此,元素边界位移的值,必须要求与其所有相邻元素的值相平衡(即在边界上的一阶偏导数相协调)。当某元素的部份边界与原来连续体边界重合时,则这部份的边界值必须与连续体所规定的条件相同。例如,这部份边界原来规定的是位移条件,则解出的边界位移应与原规定的相同。如果原规定的为边界力,则解出的元素边界力应与原规定值相同。

又另一例,假设我们希望解决势流问题,它是由Laplace方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ 来表示的。任一 ϕ 在整个元素边界上是连续的,我们就能在元素内找出 ϕ 的相应的解。正确的边界值,应由相邻两元素的共同边界上的函数法向梯度相同,以及满足原连续体边界条件的解来决定。为确定每个元素的解,可采用给定的一组虚构边界条件,或满足规定的虚构边界条件值的法则,我们可以试图,或者直接满足微分方程式,或者找出相当泛函的极值。

在结构上的有限元解遵循类似过程。元素的虚构边界条件值,按照有限的未知参数来近似表达,其未知数通常与在元素边界上的节点广义坐标相对应。不同元素的公共节点,其广义坐标一般是相同的。我们也试图使相邻元素在其共同边界上的边界值相等(这样的解对所

有元素才算相容)。对每个元素的解(称其为局部解)进行分析,或者是精确的或者是近似的。换句话说,元素的特征是用有限个未知广义坐标来表示,其未知数值是我们必须确定的。实际上,最通常使用的方法是变分原理。在元素内的近似解,是用节点的广义坐标对某一泛函取极值求出的。这些未知数是由整个域的另一泛函的极值来决定(或者由一不完整泛函的一次变分为零来决定)。整个域的泛函通常建立在使泛函的极值条件等价于为确虚构造边界条件值所需之条件。由泛函的极值条件求未知的广义坐标值,相当于要近似满足原来连续体问题中的那些规则。很清楚,近似解在内部元素边界上的连续阶次通常是很低的,即在这的高阶导数没有定义。

例如在细绳问题中,在 $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ 间元素的近似解,第一次可以按其节点挠度,用下面的内插形式来构造

$$u = u_i \left(1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) + u_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} + \alpha \frac{(x_{i+1} - x)(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2}, \quad (1.9)$$

其中 u_i 及 u_{i+1} 为在 x_i 及 x_{i+1} 处的节点挠度。未知数 α , 可以由 u_i 及 u_{i+1} 并使泛函

$$\Pi_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{1}{2} N \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + P(x)u \right] dx$$

对 α 取最小值来第一次确定。(对第一阶近似,可以取 α 为零)于是(1.5)式的泛函 Π 可写成

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n-1} \Pi_i, \quad (1.10)$$

而 Π_i 用节点挠度值 u_i 及 u_{i+1} 来表示。最后,所有节点的未知数 u_i , 在 $u_1 = u_n = 0$ 的条件下,由 Π 对 u_i 取最小值来决定。

在弹性力学的例子中,我们是用节点广义坐标来插入边界位移的。例如,在图 1.3 中,沿着三角形边缘的边界位移是由其节点位移插入的。对 1 和 2 节点间的边缘,其位移 u 及 v 可表示为

$$\begin{aligned} u &= u_1 \left(1 - \frac{s}{L_{12}} \right) + u_2 \frac{s}{L_{12}}, \\ v &= v_1 \left(1 - \frac{s}{L_{12}} \right) + v_2 \frac{s}{L_{12}}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

其中 s 是从节点 1 标起的边长, L_{12} 是两节点间的距离。(在有限元素法中,通常用这种方法插入每个元素的边界位移,其值与相邻元素的是完全一致的。)现在可以得到元素中的近似解,是对某泛函取极值来确定节点未知数的,该泛函可能是元素的位能或余能。允许每个单独元素的近似位能用其节点未知数来表示。最后,找出整个域的位能——所有元素位能的总和(1.10)——对于所有这些节点未知数取极小值,就能确定其数值。在这个过程中,近似的满足了平衡方程及原来规定的边界条件。不同元素沿其边界法向的位移一阶偏导数,在元素间的边界上一般是不连续的。

1.4 基本原理

在用未知数虚构的一些边界条件下，第一次构造的每个独立元素的解，对连续体求解来说，首先不能表现得很复杂，然后按严格的特定要求来确定虚构边界条件的值。然而，有限元素法的基本前提是每个元素都很小，所以在它的整个边界上的边界值的变化是很小的。因此边界条件可以由一组在边界节点上的广义坐标值和沿着边界的节点间的光滑函数插值来近似。对任意这样一组边界值，在元素中的简单近似解也是易于建立的。在其近似解中的误差，取决于元素的尺寸和自由度数。对十分小的元素其误差是很小的。由一组代数方程表示仍为未知数的广义坐标间的关系，而对连续体问题的求解则化为代数过程。提高近似解的办法或者是将区域划分为更小的元素，或者每个元素用更多的自由度数，或者二者均采用。

因此，有限元素法是利用局部区域的近似解，对整个区域求解的方法。在局部区域最重要的一点是：近似的函数可以用来建立完整的函数描述。例如，在一小区域内，在一点或几点的数值、斜率等可以用任一光滑函数来描述。在有限元素法中，我们主要注重单个元素。在局部区域，元素近似解的公式化，是用有限的广义坐标数和载荷大小等来构成；在整个区域的所有元素，均采用这个解法。甚至对相似类型的不同问题（例如不同载荷、几何形状、或者边界条件的弹性力学问题），也能够用相同或相似的元素。在构成局部区域的近似解中，在小区域中的所有光滑函数看起来像多项式。因此我们能经常用带有未知系数的多项式来表示元素边界条件，或者等价于具有多项式的节点广义坐标如插值函数，例如 (1.10) 沿着三角形元素的一条边 (图1.3) 那样。任一外载荷可以用带有未知系数的多项式来表示。在元素中的解也可以用多项式来近似，或者简单地用多项式将边值条件插入元素内部，例如 (1.8) 为一维问题，其中 u_i 及 u_{i+1} 是元素的边界值。

现在的问题是如何使其近似程度更好，我们可使多项式的函数在整个元素上都能近似。当然，这要依赖于原始函数的光滑性如何，元素的大小如何，以及所使用的多项式的完整程度如何（最后一个条件通常由元素的自由度数所支配）。以多项式来近似，相当于用截取的泰勒级数展开式来代表整个元素的函数。因此，对一个区域，当其函数非常光滑，或者它的泰勒级数展开式收敛很快，并有大的收敛半径，我们就能用大元素和（或者）自由度较少的元素（这相当于截取低阶的泰勒级数），仍然有较好地近似性。另一方面，当整个区域的函数变化迅速，或者它的泰勒级数的收敛半径小，我们就必须用小元素和（或者）较多自由度的元素。实际上，我们不可能事先准确地知道其解的实际情况，然而，网格的排列（元素的划分）是可以估计的，并且应大致画出轮廓图，以便获得既好又经济的近似解。

1.5 一些综合性研究

实际上构造出一个有限元素的解，有许多方法指定边界值（虚构的边界条件）和在元素内的近似解（插值函数）。例如，在弹性力学问题中，我们可以用位移场、边界力、或者综合二者来表示元素的边界条件；在元素内的近似解可以由位移、应力、或者综合二者来构造出来。选择不同的方法则有不同有限元素模型。（Pian and Tong 1969, 1972）。

如以上所表明的，我们有相当的自由来选择元素的形状、节点、类型以及自由度数。对