大学数学系列教材

Calculus

微积分（上册）

李霄民　夏　莉　等编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学系列教材

微 积 分

Weijifen

（上册）

李霄民　夏　莉　张义萍　李庆玉　王文惠　编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本教材是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类数学基础课程教学基本要求”和最新的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，结合作者多年的教学经验和科研成果，并吸收国内外同类教材的优点编写而成的。内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分。

本书深入浅出、通俗自然地阐明了微积分的基本概念、基本理论和基本方法；例题和习题的选取兼顾丰富性和层次性；同时适当介绍数学实验等相关知识。书末附有习题答案。本书具有结构严谨、逻辑清楚、循序渐进，结合实际、化繁为简、便于教学等特点。

本书可作为高等学校经济管理类专业的教材或教学参考书，也可供科技工作者或考研学生参考。

图书在版编目(CIP)数据

微积分．上册／李霄民等编著．—北京：高等教育出版社，2010．6

ISBN 978－7－04－029225－1

Ⅰ．①微… Ⅱ．①李… Ⅲ．①微积分－高等学校－教材 Ⅳ．①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 082059 号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 赵 阳 **责任绘图** 黄建英
版式设计 王艳红 **责任校对** 杨雪莲 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400－810－0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印 刷	煤炭工业出版社印刷厂		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	2010 年 6 月第 1 版
印 张	13.25	印 次	2010 年 6 月第 1 次印刷
字 数	220 000	定 价	19.20 元

物料号 29225－00

《微积分（上册）》编委

主　编　李霄民　夏　莉

副主编　张义萍　李庆玉　王文惠

前　言

为适应高等教育迅猛发展、教学改革不断深入的形势，根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类数学基础课程教学基本要求”和《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的内容和要求，结合作者多年积淀的成功教学经验编写了该教材。本教材适合高校经济管理专业微积分基础课教学使用，也可作为理工科等非数学类专业的教材或教学参考书，还可供科技工作者或考研学生参考。

微积分学是微分学和积分学的总称。牛顿和莱布尼茨在总结前人成果的基础上，分别独立地建立了微积分学。可以说它是继欧氏几何后，数学中的一个伟大创造。微积分同时又是一种数学思想，“无限细分”就是微分，“无限求和”就是积分。学习微积分，不仅要学习它的理论和解题技巧，还要学习它处理问题的思想方法。

本教材的主要特点有：

(1) 在教材内容安排上，一方面注意吸收现有教材的优点，另一方面对一些传统内容进行了适当的调整和优化，以更好地体现知识的内在联系和循序渐进性。

(2) 为增强本教材的适用性和可读性，力求用语准确，简洁流畅，通俗易懂，解析详细。概念引入时尽可能从实际问题出发。各章末有小结，以帮助学生巩固本章知识。附录中引入微积分 MATLAB 数学实验，以提高学生的学习兴趣和应用能力。

(3) 结合本课程的基本要求和学生报考研究生的需求，配备了较多且难易度适中的例题和习题。各章的习题分为(A)，(B)两组，(A)组习题是按教学基本要求设置；(B)组习题含有历年主要典型研究生入学试题；(B)组中的客观性题可作本章复习巩固用，计算题可供有兴趣的同学和有志报考研究生的同学选用。

本书由李霄民、夏莉担任主编。具体分工如下：张义萍编写第一章；夏莉编写第二章；王文惠编写第三章；李霄民编写第四章、内容简介、前言及附录中的数学实验；李庆玉编写第五章。全书由李霄民、夏莉统稿，由丁宣浩教授主审，他认真仔细地审阅了全书，提出了重要的修改意见。谨致衷心感谢！

在编写过程中，得到大量国内国外同类教材的启发，受益匪浅，在此向有关

作者表示诚挚谢意！同时衷心感谢对本书编写给予热情关心、支持、指导的各位领导和同仁！

限于编者水平，书中难免存在缺陷和不妥之处，恳请专家、读者指正。

编者

2009年11月

目　录

第一章 函 数

函数是数学中重要的基本概念之一，是实际生活中量与量之间的依存关系在数学中的反映，也是微积分的主要研究对象. 本章将在中学已有的知识基础之上，进一步阐明函数的有关概念和性质，并介绍一些经济数学中的常用函数.

§1.1 预备知识

一、数的发展

随着人类生活的需要，数也就伴随着得到很大的发展.

我们知道，常用的实数是由有理数与无理数两部分组成. 有理数包含零、正负整数与正负分数. 有理数可表示为 $\frac{p}{q}$ 的形式(其中 p,q 为整数，且 $q\neq 0$)，也可表示为整数、有限小数或无限循环小数. 无理数只能表示成无限不循环小数. 用字母 $\mathbf{R}$ 表示实数集.

实数与数轴上的点一一对应. 为简便起见，我们常用同一字母或数字既表示某个实数又表示以实数为坐标的数轴上的对应点. 例如，数 a 与点 a，数 x 与点 x，数 1 与点 1…….

数轴上表示有理数的点称为有理点，表示无理数的点称为无理点. 数轴上任意两个不同的有理点之间一定存在无穷多个有理点，这称之为有理数的稠密性. 同样地，无理数也具有稠密性.

在数的发展过程中，实数集依然不够完善，为了需要，又引入了复数①. 如为了解决代数中负数不能开偶次方根问题，引入了一个新数 i，叫做虚数单位，并规定：(1)它的平方等于 -1，即 $\mathrm{i}^2=-1$；(2)实数可以与它进行四则运算，进行四则运算时，原有的加、乘运算律仍然成立. 在这种规定下，i 可以与实数 b 相乘，再与实数 a 相加，从而就有：$a+b\mathrm{i}\,(a,b\in\mathbf{R})$，称为复数，通常用字母 z 表

① 16 世纪，意大利数学家 G. 卡尔达诺首先用公式表示出了一元三次方程的根，但公式中引用了负数开方的形式，并把 i 当作数，与其他数一起参与运算。由于人们无法理解它的实质，所以在很长时间内不承认负数的平方根也是数，而称之为虚数.

示，即 $z=a+bi\ (a,b\in\mathbf{R})$. 全体复数所形成的集合叫做复数集，一般用字母 $\mathbf{C}$ 表示.

复数一般有四种表示：代数形式、几何形式、三角形式、指数形式.

代数形式　$z=a+bi\ (a,b\in\mathbf{R})$，其中 a 与 b 分别叫做复数 $a+bi$ 的实部与虚部. 当 $b=0$ 时，它是实数 a；当且仅当 $a=b=0$ 时，它是实数 0；当 $b\neq 0$ 时，称为虚数；当 $a=0$ 且 $b\neq 0$ 时，称为纯虚数. 如：$3-2i$，$-1+\sqrt{2}i$，$\frac{1}{4}i$ 都是虚数，其实部分别为 3，-1，0；虚部分别为 -2，$\sqrt{2}$，$\frac{1}{4}$；其中 $\frac{1}{4}i$ 为纯虚数.

复数 $z=a-bi$ 称为复数 $z=a+bi$ 的共轭复数. 在解决一元 n 次方程时，复数根是成对出现的，即复数根与其共轭复数根成对出现.

如：在复数范围内，复数 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 是方程 $x^2-x+1=0$ 的两复数根；复数 $x=-1\pm i$ 是方程 $x^2+2x+2=0$ 的两复数根.

几何形式　复数 $z=a+bi$ 在直角坐标系中与坐标平面内点 $Z(a,b)$ 成一一对应关系.

三角形式　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 r 称为复数 z 的模 $(r=\sqrt{a^2+b^2})$；当 $r\neq 0$ 时，θ 称为复数 z 的辐角（复数 z 在坐标平面内对应点到原点连线与坐标轴 X 正半轴的夹角）（图 1.1）.

指数形式　由欧拉公式[①]可知复数的指数形式为：$z=re^{i\theta}$ $\left(\text{其中 } r=\sqrt{a^2+b^2},\ \theta=\arctan\frac{b}{a}\right)$，复数 $z=re^{i\theta}$ 的乘、除、乘方、开方可以按照幂的运算法则进行.

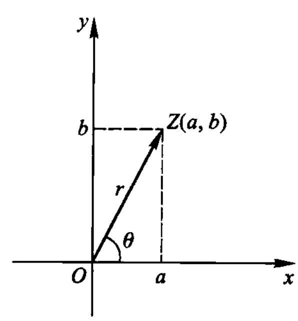

图 1.1

复数集不同于实数集的几个特点是：开方运算永远可行；一元 n 次复系数方程总有 n 个根（重根按重数计，复数根是成对出现）；复数不能建立大小顺序.

由数的发展，可见数有如下组成结构：

$$
\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\begin{cases}\text{有理数（整数、有限小数、无限循环小数）}\\ \text{无理数（无限不循环小数）}\end{cases}\\ \text{虚数}\begin{cases}\text{纯虚数}\\ \text{非纯虚数}\end{cases}\end{cases}
$$

① $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$，$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

二、实数的绝对值

定义 1.1 设 x 为一个实数，定义 x 的绝对值（记为 $|x|$）为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

其几何意义为数轴上点 x 到原点间的距离，因而 $|x-y|$ 表示数轴上两点 x 与 y 间的距离.

绝对值有下列基本性质：

(1) $|x|\geqslant 0$, $\sqrt{x^2}=|x|$; $|-x|=|x|$;

(2) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$;

(3) $|x|\leqslant k(k\geqslant 0)\Leftrightarrow -k\leqslant x\leqslant k$;

(4) $|x|\geqslant k(k\geqslant 0)\Leftrightarrow x\geqslant k$ 或 $x\leqslant -k$;

(5) $|x\pm y|\leqslant |x|+|y|$;

(6) $\big||x|-|y|\big|\leqslant |x-y|$;

(7) $|xy|=|x|\cdot|y|$; $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$, $|y|\neq 0$. 可推广到有限个数的乘积.

性质(1)、(2)由定义 1.1 直接可得；性质(3)、(4)易由性质(2)证明．下面证明性质(5)、(6).

性质(5)证明：由性质(2)可知 $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$，$-|y|\leqslant y\leqslant |y|$，于是有

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|,$$

由性质(3)得

$$|x\pm y|\leqslant |x|+|y|.$$

性质(6)的证明：由性质(5)有

$$|x|=|x-y+y|\leqslant |x-y|+|y|,$$

即有

$$|x|-|y|\leqslant |x-y|.$$

类似地，有 $|y|-|x|\leqslant |x-y|$，于是有 $\big||x|-|y|\big|\leqslant |x-y|$.

性质(7)的证明不难，留给读者去完成.

三、常用的实数集

全体自然数组成的集合记为 **N**. 下面介绍在微积分中常用的表示实数集合的概念：区间与邻域.

设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$，则数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为以 a、b 为端点的开区间，记为 (a,b)，即开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$. 数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为以 a，b 为端点的闭区间，记为 $[a,b]$，即闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$. 此外，还

有以 a,b 为端点的半开半闭区间 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 和 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$.

它们依次可用图 1.2 中(1)、(2)、(3)、(4)表示.

以上均为有限区间，另外还有无限区间. 为方便表示，引进两记号“$+\infty$”(读作“正无穷大”)和“$-\infty$”(读作“负无穷大”).

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\},\qquad [a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}.$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\},\qquad (-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}.$$

它们在数轴上的表示依次为图 1.3 中(1)、(2)、(3)、(4).

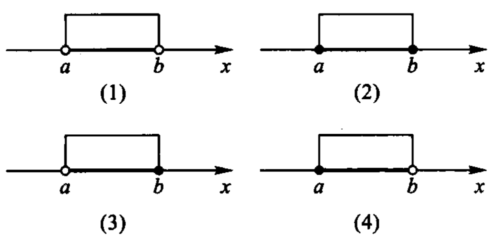

图 1.2

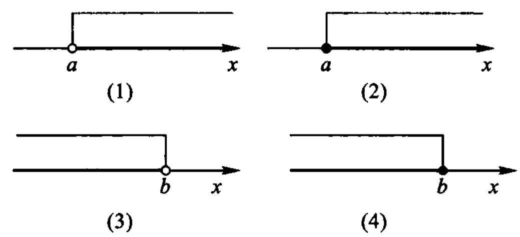

图 1.3

对实数集 $\mathbf{R}$，用 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 表示.

在后面的讨论中，有时需要考虑函数的局部性态，常用到邻域的概念，它是由某点 x_0 附近的所有点所构成的集合.

定义 1.2 设 δ 为某个正数，称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域，简称为点 x_0 的邻域，记为 $U(x_0,\delta)$；称 x_0 为邻域的中心，δ 为邻域的半径.

点 x_0 的 δ 邻域也可用不等式表示为 $|x-x_0|<\delta$（图 1.4(1)）.

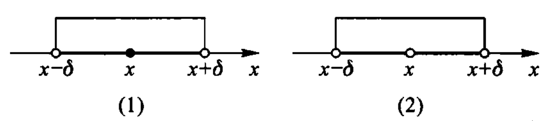

图 1.4

点 x_0 的邻域去掉中心 x_0 后的集合 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的空心邻域或去心邻域，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$；称开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 为点 x_0 的左邻域，$(x_0,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的右邻域.

点 x_0 的空心邻域用不等式表示为 $0<|x-x_0|<\delta$（图 1.4(2)）.

§1.2 函数的概念

一、常量与变量

在日常生活中，人们在观察自然现象或社会现象的过程中，经常会遇到一

些“量”. 其中，一种在观察过程中保持固定数值的量，我们称之为常量，一般用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示；另一种在观察过程中会不断变化的量，称之为变量，一般用小写英文字母 $x,y,z,\cdots$ 表示.

如果将变量看成是在某个非空实数集合内任意取值的量，则常量可看成是在单元素集合内取值的量. 因此，常量可看成变量的特例. 并且常量在数轴上表示为一个定点，变量在数轴上则表示为一个动点.

二、函数的定义

在研究实际问题时，人们经常遇到的变量不止一个，而是多个变量，而且这些变量之间不是孤立地存在而是相互关联的，并且各变量在某一变化过程中存在某种确定的关系. 例如：

例 1.1 某商品价格为 p 元/件，成本价为 5 元/件，如该商品已售出 20 件，问获利多少？

解 由题意知，单位成本和销售量均为常量，而销售价格与利润为变量，很明显，销售价格越高利润越大，销售价格越低利润越小，利润 L 和价格 p 间存在如下关系：

$$L = 20(p-5)(p>0).$$

例 1.2 根据某公司的年报表，每一季度生产情况如下(单位：件)：

季　度	一 季 度	二 季 度	三 季 度	四 季 度
产品 A 产量	8 000	7 500	8 100	8 500
产品 B 产量	12 000	11 500	12 550	13 000

表格中反映了该公司产量和季度之间的关系.

例 1.3 图 1.5 是某日某地区的气温变化曲线，该曲线描述了某地某日一天内气温 T 随时间 t 变化而变化的过程. 由图 1.5 可知，对任何时刻 $t_0 \in [0,24]$，图中曲线上有唯一的点 T_0 与之对应，从而唯一确定 t_0 时的气温为 T_0. 即曲线上的点确定了气温 T 与时间 t 之间的一种对应关系.

上面的三个例子的实际意义虽然不同，但它们都是通过一定的“对应规则”(解析式、表、图)来反映变量之间的相互联系，这就是我们中学数学中学习过的函数关系.

定义 1.3 设 D 为一个非空的实数集，如果存在一个对应规则 f，使得任意 $x \in D$，按照某一对应规则 f，由 f 唯一地确定一个实数 y 与之对应，则称对应规则 f 为定义在实数集合 D 上的一个函数.

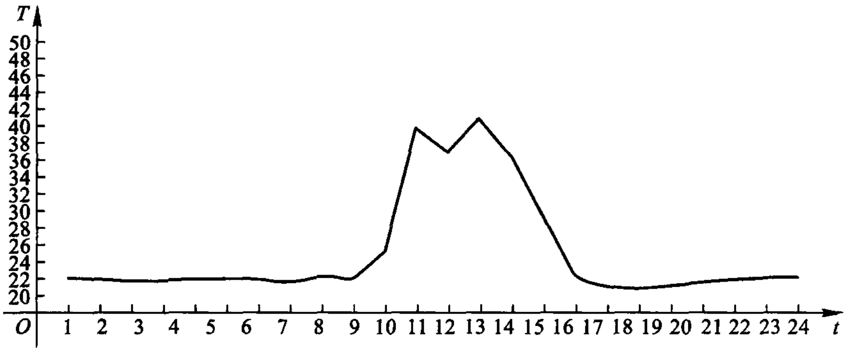

图 1.5

其中称 D 为函数的定义域，通常记为 $D(f)$，x 为自变量，y 为因变量. 如果 $x_0 \in D(f)$，则称函数 f 在点 x_0 有定义；如果 $x_0 \notin D(f)$，则称函数 f 在点 x_0 无定义. 对给定的 $x_0 \in D(f)$，称因变量 y 的对应取值 y_0 为 x_0 所对应的函数值，记为 $y_0 = f(x_0)$. 因此，对于任意 $x \in D(f)$，函数值 y 可记为

$$y = f(x), x \in D(f),$$

习惯上我们称 $f(x)$ 或 f 为函数，称 $f(x_0)$ 为函数值.

我们把全体函数值所构成的集合，称为函数的值域，通常记为 Z、$Z(f)$ 或 $R(f)$，即值域 $Z = Z(f) = \{y \mid y = f(x), x \in D(f)\}$.

如，例 1.1 的定义域 $D(f) = (0, +\infty)$，值域 $Z(f) = (-100, +\infty)$；例 1.2 的定义域为 $D(f) = [0, 24]$，值域 $Z(f) = (0, +\infty)$.

由函数定义可知，确定函数的两要素为：非空集合 D（即定义域 $D(f)$）和对应规则 f，而与变量的符号无关. 即有相同的对应规则和定义域的两个函数相同.

例 1.4 下列函数对是否相同，为什么？

(1) $f(x) = x$ 与 $f(x) = \sqrt{x^2}$；

(2) $f(x) = |x|$ 与 $f(x) = \sqrt{x^2}$；

(3) $f(x) = \sin 2x$ 与 $f(x) = \sin^2 x$；

(4) $f(x) = \lg x^2$ 与 $f(x) = 2\lg x$.

解 (1) 不相同，因为对应规则不同.

(2) 相同，因为定义域和对应规则相同.

(3) 不同，因为虽然定义域相同，但对应规则不同.

(4) 不同，定义域和对应规则不同. 定义域分别为：

$$D(f) = \{x \mid x \neq 0, x \in \mathbf{R}\} \text{ 与 } D(f) = \{x \mid x > 0, x \in \mathbf{R}\}.$$

例 1.5 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$; (2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}+\lg(4-x^2)$;

(3) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$.

解 (1) 要使函数有意义,则应有

$$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)\geqslant 0,$$

所以函数定义域为:$D(f)=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$.

(2) 要使函数有意义,则应有

$$\begin{cases}x+5>0,\\4-x^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-5,\\-2<x<2.\end{cases}$$

所以函数定义域为:$D(f)=(-2,2)$.

(3) 要使函数有意义,则应有

$$\left|\frac{2x-1}{3}\right|\leqslant 1\Rightarrow -3\leqslant 2x-1\leqslant 3,$$

即 $-1\leqslant x\leqslant 2$,所以函数定义域为:$D(f)=[-1,2]$.

注意:实际问题构成的函数其定义域由实际情况而定.如时间只能是非负数等;一般函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.如,偶次方根,要求被开方数非负;分式的分母不能为零;对数要求真数大于零等.如果函数是由有限个函数四则运算而形成的,那么其定义域则是这有限个函数定义域的交集.

三、函数的表示法

由例 1.1—例 1.3 可以看出,常用的函数表示法有三种:公式法(解析法)、图示法与表格法.其中公式法便于分析与运算,直接反映变量之间的关系,是最常用的一种方法;图示法使函数的变化特征直观明了,直接反映变量之间的变化情况;表格法(如经济统计表、各种函数表等)便于直接求函数值,用起来方便.这三种函数表示法各有优缺点,一般在研究实际问题时常将它们联合起来使用.

在实际问题中,用解析法表示函数,不一定总是用一个式子表示,也可以分段用几个式子来表示一个函数.如日常生活中的公交车车费一般与路程长短有关、在购买某些商品时也可能出现分量定价格等情况.

如由函数绝对值定义,

绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\-x, & x<0,\end{cases}$ 它是用两个式子表达一个函数.

又如符号函数 $y = \operatorname{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ 由三个式子表示一个函数.

例 1.6 某地区出租车计费,起步价 5 元(3km 以内),超过 3km 以后,每增加 1km,加收 1.8 元(不足 1km 按 1km 计算),则车费 y(元)与所行里程 x(km)间函数关系:

$$y = \begin{cases} 5, & 0 < x \leqslant 3, \\ 5 + 1.8(x-3), & x > 3. \end{cases}$$

上述三个函数都具有共同特性:由两个或两个以上式子表达一个函数.我们称这类函数为分段函数.

上面三个函数都是分段函数,它们的图形如图 1.6 (1)、(2)、(3)所示.

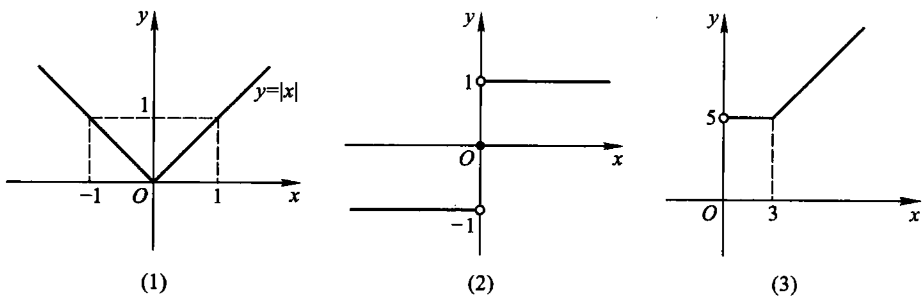

图 1.6

注意:分段函数因为是多个式子表示一个函数,所以其定义域是各分段表达式的定义域的并集;求分段函数值 $f(x_0)$ 时,先分清楚 x_0 属于哪个表达式的定义域,然后按此表达式求值.

上面的绝对值函数和符号函数定义域均为全体实数 $(-\infty,+\infty)$;例 1.6 的定义域为 $(0,+\infty)$.

例 1.7 求分段函数 $f(x) = \begin{cases} 2-x, & 1 < x < 3, \\ x^2, & |x| \leqslant 1 \end{cases}$ 的定义域并作函数图形;计算 $f(0)$、$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$、$f(-1)$ 的值.

解 函数定义域为

$D(f) = (1,3) \cup [-1,1] = [-1,3)$.

函数图形如图 1.7 所示.

$$f(0) = 0, f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$

$$f(-1) = (-1)^2 = 1.$$

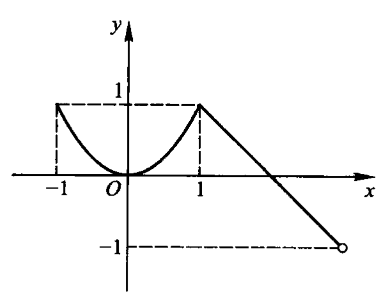

图 1.7

§1.3 函数的基本特性

本节将介绍函数的几个基本性质:单调性、奇偶性、有界性与周期性.

一、单调性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,若对于 (a,b) 内任意 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调递增(或单调递减).函数在此区间称单调递增(减)函数,单调递增函数与单调递减函数统称为单调函数,相应区间称为函数递增(减)区间.显然区间端点的函数值不影响函数的单调性.

例 1.8 试讨论函数 $f(x)=2x^2-1$ 在定义域内的单调性.

解 函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$,对于定义域内任意两点 x_1,x_2,令 $x_1<x_2$,则有

$$f(x_1)-f(x_2)=2(x_1-x_2)(x_1+x_2).$$

当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,有 $x_1+x_2>0$ 且 $x_1-x_2<0$,$f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,则函数在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

$x_1,x_2\in(-\infty,0)$,有 $x_1+x_2<0$ 且 $x_1-x_2<0$,$f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,则函数在 $(-\infty,0)$ 内单调递减.

可见,函数在整个定义域内不具备单调性,如图 1.8 所示.

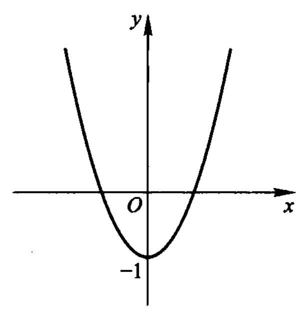

图 1.8

除此以外,由函数单调性的定义,函数单调性也可以从函数图形上来判断:从左至右随着自变量的增加,函数图形上升(下降),则函数在相应区间递增(减).另外,函数单调性由定义或图形来判断还是有一定的局限,后面章节将进一步介绍有关判别方法.

二、奇偶性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$,$x\in D(f)$,对于定义域 D 内任意 x,总有 $-x\in D(f)$.

(1) 若对任意的 $x\in D(f)$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为偶函数;

(2) 若对任意的 $x\in D(f)$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

由定义可知,对于任意的 $x\in D(f)$,必有 $-x\in D(f)$,否则 $f(-x)$ 没有

意义.所以,具有奇偶性的函数其定义域 D 应为关于原点对称的集合.并且偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1.9(1));奇函数的图形关于坐标原点对称(图 1.9(2)).

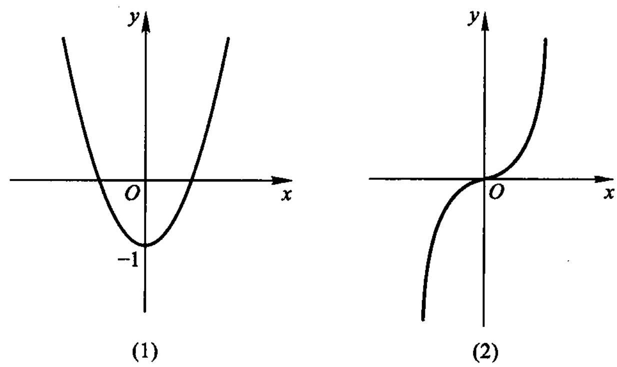

图 1.9

容易证明,具有相同奇偶性的函数,它们的代数和奇偶性不变,它们的乘积为偶函数;奇函数与偶函数的乘积为奇函数.

特殊函数 $y = C\,(C \neq 0)$ 为偶函数,$y = 0$ 既是奇函数又是偶函数.

例 1.9 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x) = x\sin x$; (2) $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$;

(3) $y(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$; (4) $f(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x}, & x \geqslant 0, \\ \mathrm{e}^x - 1, & x \leqslant 0. \end{cases}$

解 (1) 函数定义域为 $\mathbf{R}$,对任意 $x\,(x \in \mathbf{R})$,恒有

$$f(-x) = (-x)\sin(-x) = x\sin x = f(x),$$

则函数 $f(x) = x\sin x$ 是定义域 $\mathbf{R}$ 上的偶函数.

(2) 函数定义域为 $\mathbf{R}$,对任意 $x\,(x \in \mathbf{R})$,恒有

$$f(-x) = \frac{a^{-x} - a^x}{a^{-x} + a^x} = -f(x),$$

则函数 $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ 是定义域 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(3) 函数定义域为 $\mathbf{R}$,对任意 $x\,(x \in \mathbf{R})$,恒有

$$f(-x) + f(x) = \ln(\sqrt{1+(-x)^2} - x) + \ln(\sqrt{1+x^2} + x) = \ln 1 = 0,$$

即 $f(-x) = -f(x)$,因此,函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$ 为定义域 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(4) 函数定义域为 $\mathbf{R}$,对任意 $x\,(x \in \mathbf{R})$,恒有