湖北省高中试用课本

数 学

SHUXUE

第 三 册

湖北省高中试用课本
数　　学
第三册
武汉市中小学教材编写组编
湖北省中小学数学教材研究室校订
·
湖北人民出版社出版　湖北省新华书店发
武汉市江汉印刷厂印刷
1978年7月第1版　1978年7月第1次印刷
统一书号：K7106·1392　定价：0.40元

湖北省高中试用课本《数学》第三册

目　　录

第一章　两点间的距离和定比分点

通过直角坐标系的建立，可以把平面内的点和一对有序实数联系起来，这就有可能把平面内关于点的几何问题化成关于这些点的坐标的数的问题来研究，为了以后学习的需要．我们先研究两个有关公式．

一　两点间的距离

设平面内有两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，用 d 表示它们之间的距离，即 $d=|P_1P_2|$(图 1—1)．

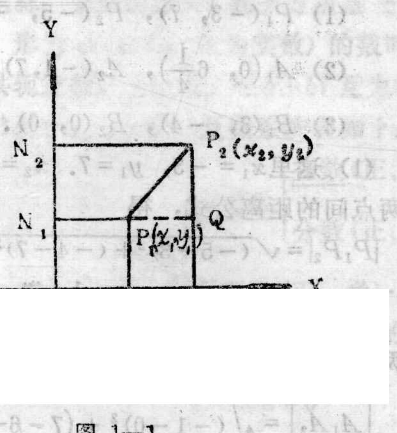


图 1—1

一九七八年八月

从 P_1、P_2 分别作 x 轴和 y 轴的垂线 P_1M_1，P_2M_2，P_1N_1，P_2N_2，直线 P_1N_1 和 P_2M_2 相交于 Q，$\triangle P_1QP_2$ 是直角三角形，由勾股定理得

$$|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|P_2Q|^2. \quad (1)$$

$$\because \quad |P_1Q|=|M_1M_2|=|x_2-x_1|,$$

$$|P_2Q| = |N_1N_2| = |y_2 - y_1|,$$

代入(1)式、并两边开平方，得

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$\therefore \quad \boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \qquad (2)$$

这就是两点间的距离公式.

在根号前面取正号，因为两点间的距离不能为负值.

应当注意，在推导上述公式的时候，我们是假设点 P_1 与点 P_2 在第一象限内，如果 P_1 与 P_2 两点在坐标平面内其他任何位置，用上述推导方法仍可推得公式(2).

例 1 求下列每两点间的距离：

(1) $P_1(-3, 7)$，$P_2(-5, -4)$；

(2) $A_1\left(0, 6\frac{1}{4}\right)$，$A_2(-1, 7)$；

(3) $B_1(3, -4)$，$B_2(0, 0)$.

解 (1) 这里 $x_1 = -3$，$y_1 = 7$. $x_2 = -5$，$y_2 = -4$.

由两点间的距离公式，得

$$|P_1P_2| = \sqrt{(-5+3)^2 + (-4-7)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5};$$

(2) 这里 $x_1 = 0$，$y_1 = 6\frac{1}{4}$；$x_2 = -1$，$y_2 = 7$.

由两点间的距离公式，得

$$|A_1A_2| = \sqrt{(-1-0)^2 + \left(7 - 6\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{5}{4};$$

(3) 这里 $x_1 = 3$，$y_1 = -4$；$x_2 = 0$，$y_2 = 0$.

由两点间的距离公式得

$$|B_1B_2| = \sqrt{(0-3)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

例 2 试证正方形的对角线相等.

证明 如图 1—2 建立直角坐标系，并设正方形的一边长

为 a，那么各顶点的坐标分别为 $A(a, 0)$，$B(a, a)$，$C(0, a)$，$O(0, 0)$．根据距离公式

$$|OB|=\sqrt{(a-0)^2+(a-0)^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}\,a,$$

$$|AC|=\sqrt{(0-a)^2+(a-0)^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}\,a,$$

$$\therefore \quad |OB|=|AC|.$$

即正方形的对角线相等．

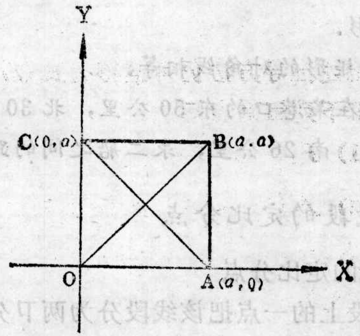


图 1—2

例 3　已知 $A(4, 8)$ 及 AB 的长是 10，且 B 点在横轴上，求 B 点的坐标．

解　设 B 点的坐标是 $(x, 0)$，则有

$$\sqrt{(x-4)^2+(0-8)^2}=10,$$

即

$$\sqrt{x^2-8x+80}=10,$$

$$x^2-8x-20=0.$$

解这个方程，得 $x_1=10$，$x_2=-2$．

就是说，满足题目要求的 B 点有两个，它们的坐标分别是 $B_1(10, 0)$，$B_2(-2, 0)$．

练　习

1．求下列每两点间的距离：

$A_1(2, 1)$ 和 $A_2(5, 1)$；$B_1(6, 0)$ 和 $B_2(0, 5)$；

$C_1(0, 6)$ 和 $C_2(0, -2)$；$D_1(6, -3)$ 和 $D_2(2, 5)$；

$E_1(-\frac{1}{2}, 4)$ 和 $E_2(-1, -1)$；

$F_1(\frac{1}{2}, -1\frac{1}{4})$ 和 $F_2(0.75, 1)$．

2．求证以 $A(9, 5)$，$B(8, 2)$，$C(4, 5)$ 为顶点的三角形是等腰三角形．

3．试证矩形的对角线相等．

4．甲船在某港口的东 50 公里，北 30 公里，乙船在同一港口东 17 公里，南 26 公里，求二船之间的距离．

二　线段的定比分点

1．线段的定比分点

如果线段上的一点把该线段分为两卩分，且使这两卩分的比值等于一已知数，那么这一点叫做该线段的定比分点*．如图1—3 中点 P 分线段 AB 所成的比为 $AP:PB=2:3$，P 就是内分线段 AB 成定比$\frac{2}{3}$的点．

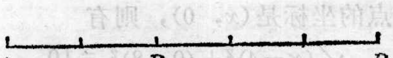


图 1—3

* 定比分点有内分点，外分点两种，如无说明，本章所指的定比分点均为内分点．

2．线段的定比分点的求法

设已知一线段 AB 的两个端点分别为 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$，且已知 AB 内的一点 $P(x, y)$，如图 1—4 将 AB 分为两卩分的比 $\frac{AP}{PB}$ 等于已知数 $\lambda(\lambda \geqslant 0)$，即

$$\lambda = \frac{AP}{PB}.$$

求 P 点的坐标.

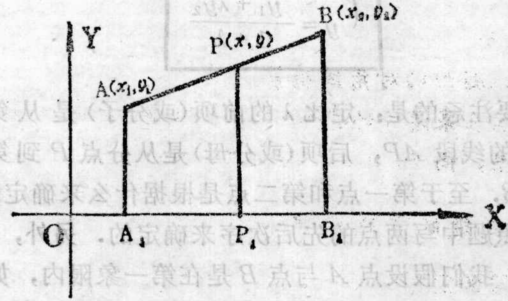


图 1—4

由点 A、P 和 B 各作 x 轴的垂线 AA_1，PP_1 与 BB_1，由平百儿何我们知辺线段 AP、PB、A_1P_1 和 P_1B_1 成比例，即

$$\frac{A_1P_1}{P_1B_1} = \frac{AP}{PB} = \lambda,$$

而 $$A_1P_1 = x - x_1,$$

$$P_1B_1 = x_2 - x,$$

所以，有

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda,$$

$$\therefore \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};$$

再由点 A、P 与 B 各作 y 轴的垂线，同理可得

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

因此，按定比 λ，分割线段 AB（看成由 A 到 B）的点 P (x, y) 的坐标，用下列公式来确定：

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} x&=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y&=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{aligned}\right.} \tag{3}$$

这里要注急的是：定比 λ 的前项（或分子）是从第一点 A 到分点 P 的线段 AP，后项（或分母）是从分点 P 到第二点 B 的线段 PB. 至于第一点和第二点是根据什么来确定的呢？一般说是按照题中写两点的先后次序来确定的. 另外，在推汒公式（3）时，我们假设点 A 与点 B 是在第一象限内，如果点 A 和点 B 在直角坐标平百内其他任何位置，根据上述推汒方法，仍可得到公式（3）.

例 4 点 P 把 $A(2, 3)$ 及 $B(3, -3)$ 两点的连线分为 2:5 的两段，求点 $P(x, y)$ 的坐标.

解 因为 A 点写在 B 点之前，所以我们把 A 点当作第一点，B 点当作第二点，这样，

$$x_1=2,\ y_1=3,\ x_2=3,\ y_2=-3.$$

又 $$\lambda=\frac{AP}{PB}=\frac{2}{5},$$

根据定比分点公式得

$$x=\frac{2+\frac{2}{5}\times 3}{1+\frac{2}{5}}=\frac{16}{7},$$

$$y=\frac{3+\frac{2}{5}\times(-3)}{1+\frac{2}{5}}=\frac{9}{7}.$$

故 P 点的坐标是 $\left(\frac{16}{7},\ \frac{9}{7}\right)$.

3．线段中点的坐标

如果 P 是线段 AB 的中点，那末 $AP=PB$，因此

$$\lambda=\frac{AP}{PB}=1.$$

由定比分点公式便得线段中点的坐标

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} x&=\frac{x_1+x_2}{2}\\ y&=\frac{y_1+y_2}{2}\end{aligned}\right.}$$

这就是线段中点的坐标公式.

例 5 已知线段 M_1M_2 的中点是 $M(-1,2)$，一个端点 M_1 的坐标是(2，5)，求另一个端点 M_2 的坐标.

解 这里 $x_1=2$，$y_1=5$，$x=-1$，$y=2$，设 M_2 点的坐标是 $(x_2,\ y_2)$，根据中点坐标公式，得

$$-1=\frac{2+x_2}{2},\qquad \therefore\quad x_2=-4,$$

$$2=\frac{5+y_2}{2},\qquad \therefore\quad y_2=-1.$$

即所求第二端点的坐标是(－4，－1).

例 6 试证：三角形两边中点的连线平行于第三边且等于它的一半.

说明：用解析法证明这个定理，就得适立坐标系，虽然图形的性质和坐标轴的选择没有关系，但是如果坐标轴选择得适当，解法就会简便. 所以我们这样来选坐标轴，使原点和三角

形的一顶点重合，x 轴与三角形的一条边重合.

证明 迼立如图 1—5 所示的坐标系，三角形的顶点 O 的坐标为$(0, 0)$，设其余二顶点坐标为$A(x_1, 0)$，$B(x_2, y_2)$.

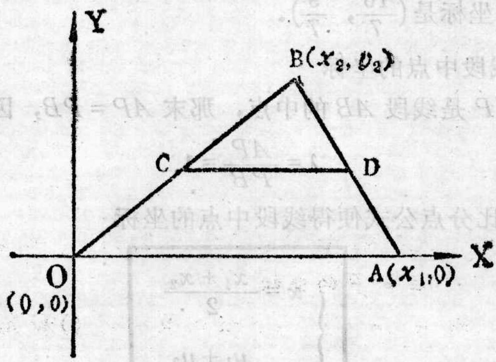


图 1—5

设 CD 是 OB 及 AB 两边中点的连线，点 C 的横坐标为 x_C，纵坐标为 y_C，点 D 的横坐标为 x_D，纵坐标为 y_D，根据线段中点公式，则

$$x_C=\frac{0+x_2}{2}=\frac{x_2}{2}, \qquad y_C=\frac{0+y_2}{2}=\frac{y_2}{2};$$

$$x_D=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y_D=\frac{0+y_2}{2}=\frac{y_2}{2}.$$

因为点 C 与 D 的纵坐标相同，则过点 C 与 D 的直线 CD 与 x 轴平行.

$$\therefore \qquad CD \parallel OA.$$

又根据两点间的距离公式

$$|CD|=\sqrt{\left(\frac{x_2}{2}-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_2}{2}-\frac{y_2}{2}\right)^2}=\frac{x_1}{2}.$$

$$|OA|=x_1,$$

$$\therefore \quad |CD|=\frac{|OA|}{2}.$$

练　习

1. 根据题中所给条件，求分点 P 的坐标：

(1) $P_1(-2,\ 3)$, $P_2(4,\ 6)$, $\lambda=\frac{2}{3}$;

(2) $A_1(0,\ -3)$, $A_2(-1,\ 0)$, $\lambda=\frac{1}{2}$;

(3) $B_1(0,\ 0)$, $B_2\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, $\lambda=\frac{1}{3}$;

(4) $C_1(a+b,\ c+d)$, $C_2(a-b,\ d-c)$, $\lambda=\frac{1}{2}$.

2. 已知一线段 AB 的中点 $P(-1,2)$ 和一个端点 $A(2,5)$，试求它的第二个端点 B 的坐标.

3. 已知点 $M(1,\ 1)$ 平分连结点 $M_1(x,\ 5)$ 和 $M_2(-2,y_2)$ 的线段，求 x_1 和 y_2.

4. 已知 $A(3,\ -2)$，$P(1,\ 2)$，把线段 AP 延长到 B，使 $AP:PB=3:2$，求 B 点的坐标.

5. 已知点 $A(1,\ -1)$ 及 $B(4,\ 5)$，现在把线段 AB 延长到 C，使 $AC=3AB$，求终点 C 的坐标.

(提示：将 B 看成定比分点，$BC=2AB$)

习　题

1. 标出下列各点在坐标平百内的位置.

$A(3,\ 5)$, $B(2,\ -4)$, $C(-3,\ -2)$, $D(-2,\ 0)$, $E(0,\ 3)$, $F\left(-2\frac{2}{3},\ 0.5\right)$, $G(\sqrt{2},\ 1)$, $H\left(1.25,\ \frac{1}{4}\right)$.

2. 已知点 $A(4,\ -3)$，试求 A 点对于(1)横轴，(2)纵轴，(3)原点对称的点的坐标.

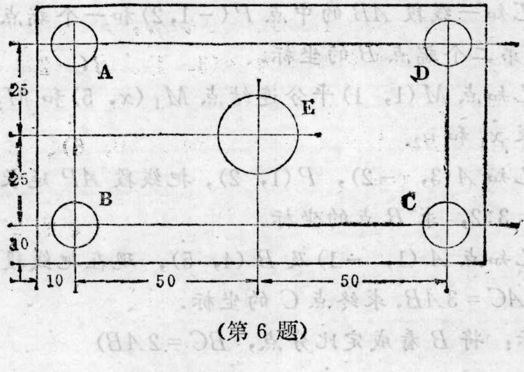
3. 一菱形的边长等于5，它的一条对角线长为6，如果把它的两条对角线当作坐标轴，求它的四个顶点的坐标.

4. 已知一正六边形的边长等于 a，如果原点在它的中心，

而且横轴经过它的两个相对的顶点，试求这个正六边形的顶点的坐标.

5. 一只舰艇从O点向北偏东$60°$航行40浬到达A点，再向北偏东$45°$航行24浬到达B点，求出这时舰艇在起点的东西多少浬，北百多少浬，并画出图来.

6. 要在一块长方形钢板上镗孔，就需要确定各孔心A、B、C、D、E的位置，根据图中尺寸，选择适当的坐标系，求各孔心的坐标.



(第6题)

7. 求下列每两点的距离：

(1) $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$和$\left(-8\frac{1}{2},\ 3\right)$；

(2) $(a+b,\ c+a)$和$(c+a,\ b+c)$；

(3) $\left(3\frac{1}{2},\ -0.75\right)$和$\left(3\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$；

(4) $(-25.85,\ 0.17)$和$\left(-10\frac{1}{2},\ 0.17\right)$.

8. 试在横轴上找一点A，距离$B(4,\ 6)$为10个单位.

9. 在纵轴上找一点P，与点$A(10,\ 8)$和点$B(-6,\ 5)$等距离.

10．证明：以 $A(3,\ 4)$，$B(5,\ -10)$，$C(6,\ -2)$，$D(4,\ 12)$ 为顶点的四边形是平形四边形．

11．以下百每三点为顶点画三角形，并根据它们各边的长判定哪些是等边三角形，哪些是等腰三角形，哪些是直角三角形．

(1) $(-4,\ 3)$、$(2,\ -5)$、$(0,\ 6)$；

(2) $(-6,\ 8)$、$(6,\ -8)$、$(8,\ 6)$；

(3) $(5,\ 1)$、$(2,\ -2)$、$(2.5,\ 0.5)$；

(4) $(2,\ 2)$、$(-2,\ -2)$、$(2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$；

(5) $(-1,\ 1)$、$(1,\ 3)$、$(-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3})$．

12．已知一三角形的顶点为 $A(3,\ 4)$，$B(-2,\ 4)$，$C(2,\ 2)$，求它的周长．

13．已知四边形的顶点为 $(-a,\ 0)$、$(0,\ 6)$、$(a,\ 0)$、$(0,\ -6)$，求它的周长．

14．证明直角三角形斜边的中点到三个顶点的距离都相等．

15．试证 $(8,\ 0)$、$(0,\ -6)$、$(7,\ -7)$、$(1,\ 1)$ 各点都在元心为 $(4,\ -3)$ 的元周上，并求元的半径．

16．过 $A(1,2)$ 点对横轴作垂线，试在这垂线上找一点 M，使它到横轴的距离与到 $A(1,\ 2)$ 点的距离相等．

17．在 x 轴上找一点 P，使它到尻点与点 $(5,\ -3)$ 的距离相等，求 P 点的坐标．

18．已知一点分 $(0,\ 2)$ 和 $(8,\ 0)$ 两点间的线段所成的比，与从尻点到这两点的距离之比相同，试求此点．

19．试将 $(-3,\ 4)$ 与 $(9,\ 12)$ 之间的线段分割成两下分，两下分的比等于这两点至尻点距离之比，求分点的坐标．

20．已知直角三角形 ABC 的一条直角边 AB 平行于 x 轴，A 为 $(-2,\ 3)$，其余二边的中点连线在 x 轴上，且长为

4，求其余二顶点的坐标.

21. 已知三角形的两个顶点 $A(0, 5)$, $B(5, 3)$，和它的三条中线的交点为 $M(1,3)$，试求三角形的第三个顶点 C 的坐标.

22. 试求顶点为 $A(3, 4)$、$B(-1, 1)$、$C(0, -3)$ 的三角形的三条中线的长.

23. 在点 $M_1(-3, -7)$ 和点 $M_4(10, 2)$ 连线之间有两点 M_2、M_3，且 M_2、M_3 把线段 M_1M_4 分成三等份，试求这两点的坐标.

24. 已知三角形的顶点为 $P_1(1, 2)$，$P_2(3, -4)$，$P_3(5, 5)$，试求三条中线的交点.

25. 已知一个三角形的三边中点的坐标 $D(2, 4)$、$E(-3 -1)$、$F(1, 2)$，求三个顶点的坐标.

26. 已知三角形的顶点为 $A(5, 0)$、$B(3, -8)$、$C(1, -4)$，试求把 AB 边上的中线分成三等份的各点.

27. 试证明点 $A(3, 1)$ 与 $B(1, 3)$ 是关于第一象限角的平分线的对称点.（提示：证明 $\triangle AOB$ 是等腰三角形，第一象限角的平分线也是 $\triangle AOB$ 顶角的平分线.）

小　结

本章主要学习两点间的距离公式和线段的定比分点公式.

1. 两点间距离公式和线段的定比分点公式，它们既初步反映了数与形的内在联系，同时也是今后研究数形关系的重要工具.

2. 在用代数方法解决几何问题时，必须注急迠立适当的坐标系，以便简化运訴.

第二章　直线与元的方程

在《函数及其图象》一章中，我们已经初步看到“数”（函数式、方程）与“形”（几何图形）之间的对应关系．在本章中，我们将进一步运用直角坐标系这一工具，来讨论直线与元的有关性质．

第一节　直线的方程

一　直线的倾角和斜率

直线的倾角 α 是指 x 轴的正方向和这直线所成的最小的正角（图 2—1）．当 l 平行于 x 轴时，规定 $\alpha=0$，从而 $0\leqslant\alpha<\pi$.

当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，$k=\operatorname{tg}\alpha$ 叫做这直线的斜率.

根据三角函数的性质不难看出：

当 $\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，$k=\operatorname{tg}\alpha>0$；

当 $\alpha>\frac{\pi}{2}$ 时，$k=\operatorname{tg}\alpha<0$；

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，$k=\operatorname{tg}\alpha$ 不存在.

斜率 k 反映了直线对于 x 轴的倾斜程度，而且由 $k=\operatorname{tg}\alpha$ 可以得到一个确定的 α 值，所以一般用直线的斜率 k 表示直线的方向.

经过 $P(x_1,\ y_1)$、$Q(x_2,\ y_2)$（这里 $x_1\neq x_2$）两点的直线的斜率 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

证明：如图 2—2 过 P、Q 分别作 x 轴的垂线 PP_1、QQ_1，过 Q 作 x 轴的平行线与 PP_1 交于 M，那么 $\angle PQM$ 等于直线

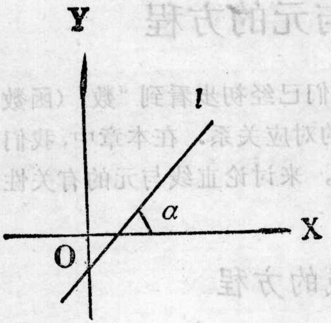


图 2—1

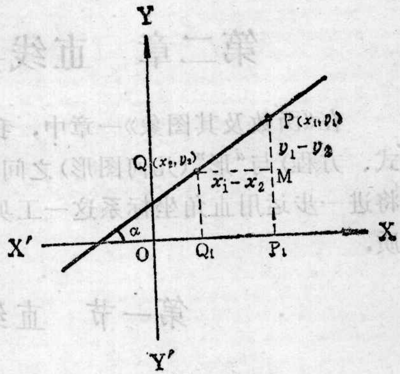


图 2—2

PQ 的倾角 α.

因为 $x_1-x_2\neq 0$. 根据三角函数的忌义. 得

$$\boxed{k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}}$$

这叫做直线的斜率公式.

例 1　根据下列条件，求直线的斜率和倾角：

(1) 直线经过(3, 7), (−7, −3)两点(图 2—3)；

(2) 直线经过(3, 7), (3, −3)两点(图 2—4).

解　(1)　$k=\dfrac{7-(-3)}{3-(-7)}=\dfrac{10}{10}=1,$

就是　$\operatorname{tg}\alpha=1,$

因此　$\alpha=45^\circ.$

∴ 这直线的斜率是 1，倾角是 45°.

(2)　$k=\dfrac{7-(-3)}{3-3}=\dfrac{10}{0}$，不存在.

就是 $\operatorname{tg}\alpha$ 不存在，因此　$\alpha=90^\circ.$