面向“十二五”高等院校应用型人才培养规划教材

运筹学

精品课程教学团队 韩润春
孙凤芹 杨景祥◎编著

省级
精品课程
配套教材

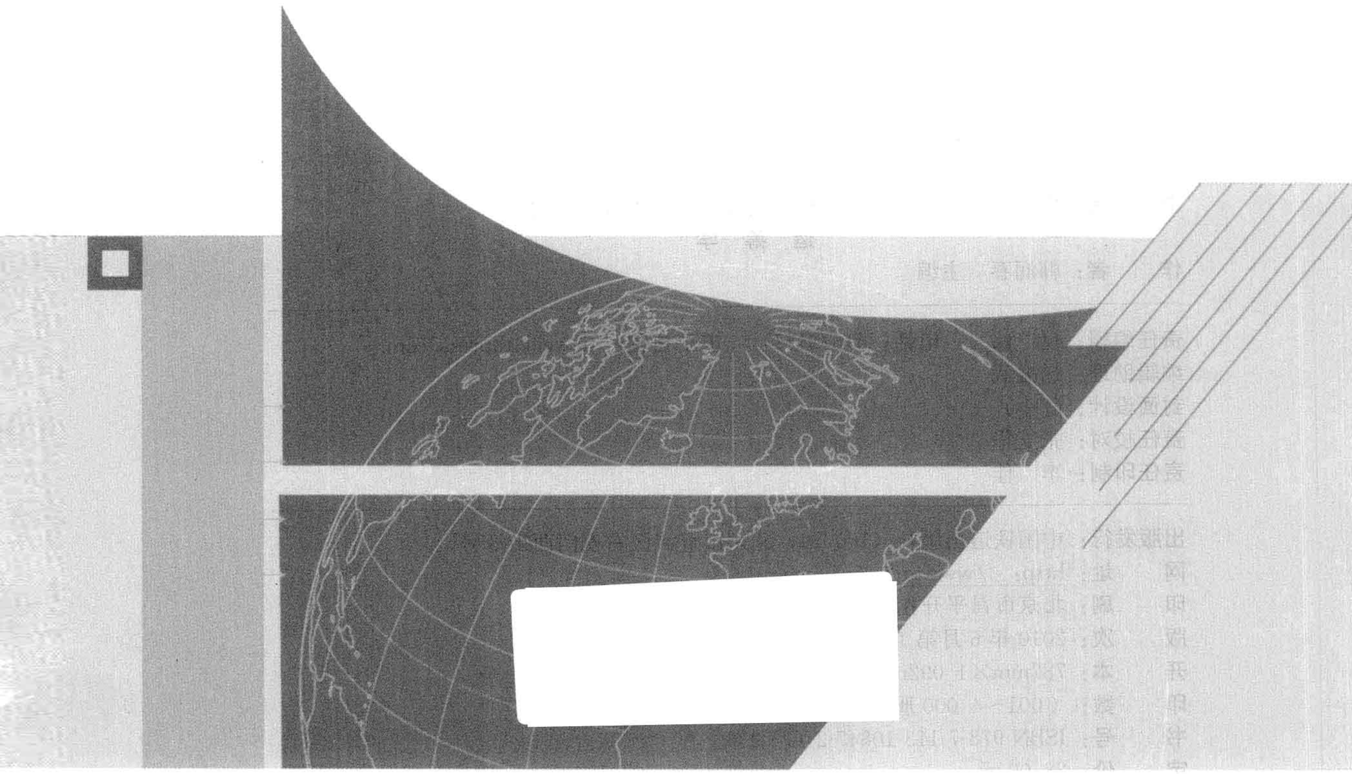
Operations
Research

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

运筹学

Operations Research

韩润春 孙凤芹 杨景祥◎编著



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

图书在版编目（CIP）数据

运筹学/韩润春主编．—北京：中国铁道出版社，2010.4

面向“十二五”高等院校应用型人才培养规划教材

ISBN 978-7-113-10847-2

Ⅰ.①运… Ⅱ.①韩… Ⅲ.①运筹学—高等学校—教材 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 230366 号

书　　名：面向“十二五”高等院校应用型人才培养规划教材
运　筹　学

作　　者：韩润春　主编

责任编辑：夏　伟　　**电话**：51873151　　**电子信箱**：xiawei@tdpress.com

编辑助理：杨振武

封面设计：薛小卉

责任校对：张玉华

责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社（100054，北京市宣武区右安门西街 8 号）

网　　址：http：//www.tdpress.com

印　　刷：北京市昌平开拓印刷厂

版　　次：2010 年 6 月第 1 版　　2010 年 6 月第 1 次印刷

开　　本：787mm×1 092mm　1/16　印张：14.25　字数：348 千

印　　数：0001～4 000 册

书　　号：ISBN 978-7-113-10847-2/G·336

定　　价：28.00 元

面向“十二五”高等院校应用型人才培养规划教材
编审委员会

前言 Preface

运筹学(Operations Research)是研究如何有效地进行组织和管理的一门系统科学,是运用定量分析的方法对经济活动和管理系统中的人、财、物等有限资源进行统筹安排,为决策者选择提供依据,以实现效益最大化。它是现代化管理的有力工具之一,在生产管理、工程技术、军事作战、科学实验、财政经济以及社会科学中都得到了极为广泛的应用。随着市场经济的发展,经济管理专业对本课程知识的需求不断增加,很多院校都加强了这方面的教学和研究工作。目前,运筹学课程已被列为管理类专业的专业基础课程和主干课程。

本书的主要对象是经济管理类专业本专科学生,此外也可以作为相关专业运筹学课程的教材或教学参考书,同时对于从事优化管理的工程科技人员和管理人员,也具有一定的参考价值。

本书的编写参考了国内外大量的有关资料文献,吸取了有关兄弟院校关于运筹教学的宝贵经验。本书力求做到深入浅出、通俗易懂,多数章节都增加了实际应用和案例,注重对学生解决实际问题能力的培养;作为有一定针对性的教材,我们在内容的选择和例题的安排上都注意了专业知识的相关性;应广大师生的要求,特别增加了运筹学计算机软件的介绍,以方便读者学习使用。

全书共分 10 章,内容包括绪论、线性规划及单纯形法、对偶理论与灵敏度分析、运输问题、动态规划、整数规划、对策论、决策论、存贮论以及图与网络分析。本书第 1 章、第 2 章、第 3 章由韩润春编写;第 4 章、第 5 章、第 6 章、第 7 章由孙凤芹编写;第 8 章、第 9 章、第 10 章由杨景祥编写。全书由韩润春统稿并担任主编。

本书的出版得到了中国铁道出版社的大力支持和帮助,并提出了宝贵意见,在此,我们表示最衷心的感谢。同时,也向所有被我们直接或间接引用文献资料的同行学者表示由衷的感谢。

鉴于我们水平有限,书中存在的疏漏和错误在所难免,敬请同行、专家和读者指正与批评。

编　者

教学建议

教学目的

本课程教学的目的在于使学生正确理解运筹学方法论；掌握运筹学整体优化的思想和若干定量分析的优化技术；能够正确应用各类模型分析解决实际工作中的一些常见问题；培养学生的创造性思维能力、分析和解决实际问题的能力、定量计算与上机能力。为学生今后从事相关工作或进行科学研究打下良好的基础。

前期需要掌握的知识

高等数学、线性代数、概率论与数理统计学等课程相关知识。

课时分布建议

教学内容	学习要点	课时安排	
		专科	本科
第 1 章 绪　论	(1)了解运筹学发展简史、内容及特点 (2)运筹学在管理领域的应用	2	2
第 2 章 线性规划及单纯形法	(1)理解线性规划的概念及其建模基本方法 (2)了解两个变量线性规划的图解法 (3)掌握线性规划求解的单纯形法及大 M 法和两阶段法 (4)了解 QSB 软件求解线性规划的方法	10	12
第 3 章 对偶理论与灵敏度分析	(1)理解线性规划的对偶问题及对偶理论 (2)了解影子价格的应用 (3)掌握对偶单纯形法 (4)掌握灵敏度分析的方法	4	6
第 4 章 运输问题	(1)理解运输问题的模型、解的结构与性质 (2)掌握表上作业法求解运输问题的基本方法 (3)掌握产销不平衡的运输问题的处理方法	6	6
第 5 章 整数规划	(1)理解整数规划问题的模型及解的特点 (2)掌握求解 0－1 规划的方法 (3)了解指派问题、求解指派问题 (4)了解 QSB 软件求解整数规划的方法	4	4

续上表

教学内容	学习要点	课时安排	
		专科	本科
第 6 章 动态规划	(1)理解动态规划的基本概念和基本原理 (2)理解动态规划模型的建立过程 (3)了解动态规划的基本解法 (4)会用动态规划的方法解决一些实际问题 (5)了解使用 QSB 软件求解部分动态规划问题的方法	8	10
第 7 章 对 策 论	(1)理解对策论的基本概念 (2)理解矩阵对策的基本理论 (3)掌握矩阵对策的求解方法	—	6
第 8 章 决策分析	(1)理解决策的基本概念 (2)理解决策分析的过程 (3)掌握不确定型决策的基本解法 (4)掌握风险型决策的基本解法 (5)了解效用理论在决策中的应用	4	4
第 9 章 存 贮 论	(1)理解存贮论的基本概念 (2)掌握重复周期存贮模型的求解方法 (3)掌握单周期存贮模型的求解方法	—	4
第 10 章 图与网络分析	(1)理解图的基本概念与基本定理 (2)掌握最小树问题、最短路问题、最大流问题、最小费用最大流问题的求解方法 (3)理解网络计划的基本原理，掌握关键路线的求解方法 (4)了解 QSB 软件求解最小树和最短路等问题的方法	10	10
课时总计		48	64

目录 Contents

运筹学

Operations Research

第1章 绪　论

运筹学的英文通用名称为“Operations Research”简称 OR,按照原意应译为“运作研究”或“作战研究”。中国科学工作者取汉高祖刘邦称赞张良的话“运筹帷幄之中,决胜千里之外”,把它译为“运筹学”。运筹学是用数学方法研究各类系统最优化问题的一门科学。运筹学通过建立系统的数学模型并求解,为决策者制定最优决策提供科学依据。

1.1 运筹学发展简史

运筹学(Operations Research,简称 OR)一词最早出现于 1938 年。当时盟军使用雷达作为防空系统的一部分在军事上对付德国的空袭,从技术上没有问题,但是在实际运用中效果不理想。为此,一些有关领域的科学家把“如何合理运用雷达”作为一类新的问题进行研究。由于它与研究技术问题不同,于是就称作“运作研究”。二战期间,运筹学的研究与应用范围主要是与战争相关的战略、战术方面问题,发挥了显著作用,也推动了运筹学的初步发展。战后,各国的经济建设迅速发展,许多科学家把注意力转移到经济领域,研究如何使有限资源发挥最大经济效益的问题,运筹学的研究发展也向这些方面迅速拓展。

到 20 世纪 50 年代,运筹学的各个主要分支已经形成,逐渐成为西方国家大学中很多专业的必修课程,运筹学书籍和刊物发行量迅速增加。发达国家众多企业在经营管理中应用运筹学知识,获得了显著的效果。随着科学技术的发展,特别是信息社会的到来,运筹学的内涵不断扩大,涉及的数学及其他基础科学的知识越来越多,于是熟练掌握并运用这门科学有效解决实际问题的难度也逐渐加大。在近几十年中,运筹学无论从理论上还是应用上都得到了快速的发展。在理论方面,运筹学发展起来了一些数学分支,如数学规划、应用概率与统计、应用组合数学、对策论、数理经济学、系统科学等等,都得到迅速发展,使得运筹学发展进入一个崭新阶段。在应用方面,运筹学已经涉及服务、管理、规划、决策、组织、生产、建设等诸多方面,甚至可以说,很难找出它涉及不到的领域。

纵观运筹学的发展进程,国外一些有代表性的人物和组织及其主要贡献见表 1.1。

20 世纪 50 年代中期,我国著名的科学家钱学森、许国志等将运筹学从西方引入我国,并

结合我国的特点在国内推广应用。近些年来，运筹学的理论研究和应用都在我国取得了巨大的发展，许多大学的管理学类、经济学类专业把运筹学作为一门主干课程列入教学计划，许多其他专业的某些课程中也包含运筹学的内容。

表 1.1　国外一些有代表性的人物和组织对运筹学的主要贡献

年代	代表人物/组织	主要贡献
1914 年	兰彻斯特(英)(Lanchester)	提出兰彻斯特(Lanchester)方程
1917 年	爱尔朗(丹麦)(Erlang)	研究哥本哈根电话公司的通讯系统时，提出了排队论的一些著名公式
1930 年	威尔逊(美)(Wilson)	存贮论的最优批量公式
20 世纪 30 年代末	英、美的一些研究小组	OPERATIONAL RESEARCH 的提出 二战中，英、美为对付德国的空袭，研究如何合理地运用雷达系统；研究了护航舰队保护商船队的编队问题和当船队遭受德国潜艇攻击时，如何使船队损失最小的问题；研究了反潜深水炸弹的合理爆炸深度问题
二战后	兰德公司(美)(RAND)	英、美军队中相继成立了更为正式的运筹学研究组织，针对未来武器系统的设计及其合理的运用方法等方面进行了研究
1947 年	丹捷格(美) (G. B. Dantzig)	在解决美国空军军事规划问题时，提出了求解线性规划问题的单纯形法
1960 年	康托洛维奇(苏) (L. V. Kantorovich)	《最佳资源利用的经济计算》的出版，并因此获得了诺贝尔奖金。实际上，早在 1939 年，他在解决工业生产组织和计划问题时，已提出了类似线性规划的模型，并给出了“解乘数法”的求解方法，只是当时未被重视
20 世纪 60 年代		运筹学开始在工业、农业、经济和社会等各领域广泛应用，并形成了许多分支

现在运筹学在全球范围内已经得到广泛应用，成为各行各业解决管理决策问题的效能卓著的工具。为了加强运筹学的研究与应用，国内外成立了许多学术性的组织。最早建立运筹学会的国家是英国(1948 年)，接着是美国(1952 年)、法国(1956 年)、日本和印度(1957 年)等，到 1986 年为止，国际上已有 38 个国家和地区建立了运筹学会或类似的组织。我国的运筹学会成立在 1980 年。1959 年由英、美、法三国的运筹学会发起成立了国际运筹学联合会(IFORS)，以后各国的运筹学会纷纷加入，我国于 1982 年加入该会。此外还有一些地区性组织如欧洲运筹学协会(EURO)成立于 1976 年，亚太运筹学协会(APORS)成立于 1985 年等。

1.2　运筹学的内容及特点

运筹学应用广泛，涉及众多学科领域，历经数十年的发展形成了众多分支。通常提到的有

线性规划、非线性规则、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划、模糊规划等，以上人们常常统称之为数学规划。此外还有图论与网络、排队论（随机服务系统理论）、存贮论、对策论、决策论与统筹方法等。

目前，理论比较成熟而且应用广泛的主要有下列分支。

1. 线性规划（Linear Programming）

线性规划是解决资源优化配置问题的有效方法，它把问题归结为在线性约束条件下，决策变量的线性目标函数求极值的数学模型；它的一般解法是单纯形法。

2. 整数规划（Integer Programming）

整数规划是指部分或全体决策变量必须取整数值的线性规划。

3. 目标规划（Goal Programming）

目标规划能够适用于更复杂的实际问题，它对约束条件与目标函数的处理更加灵活而有弹性，可以容纳更为细致深入的限制与要求，是线性规划的推广和发展。

4. 动态规划（Dynamic Programming）

动态规划的研究范围是在多阶段决策问题的各阶段都要做出决策，并要求全过程的综合结果达到最优。

5. 非线性规划（Nonlinear Programming）

非线性规划是用来解决决策问题中约束条件或目标函数包含非线性函数的模型的问题。

6. 图论与网络分析（Graph Theory and Network Analysis）

图可以准确表达许多实际问题，为它们的求解提供简便直观的模型。如工程项目管理中要研究工序的相互关系和合理衔接，各种网络设计中要考虑线路的通过能力等。

7. 排队论（Queuing Theory）

排队论是关于随机服务系统的理论。在各类社会服务系统中由于服务对象的到达状况和服务时间均具有随机性，必须适当确定系统的服务能力等系统运行参数，才能达到良好的经济效益和社会效益。

8. 存贮论（Inventory Theory）

存贮论模型解决的核心问题是为企业制定各类物资的存贮策略（订货数量、订货间隔时间等），以保证生产经营活动的顺利进行，并使得相关费用尽可能低。

9. 对策论（Game Theory）

对策论是解决在多方参与的社会经济活动中，为参与者（称为局中人）在对抗性局势下，理性选择行动策略提供科学理论与方法。

10. 决策论（Decision Theory）

在不同的问题中，决策的环境条件与目标不同，形成不同类型的决策模型。决策论对各类决策问题进行概括和总结，并着重研究应用广泛的风险型决策，讨论降低风险、提高决策科学性的方法。

1.3 运筹学在管理领域的应用

运筹学经过几十年的发展，其应用已经深入到社会、政治、经济、军事、科学、技术等各个领域，发挥了巨大作用。这里选择几个管理方面的应用给予简单介绍。

(1)生产运作。综合生产计划要求从总体上确定生产、存贮和劳动力的配合以适应波动的需求。运筹学的应用主要在生产作业的计划、日程表的编排、合理下料、合理配料、物料管理等方面。

(2)库存管理。多种物资库存的系统组织与安排管理,确定某些设备的能力或容量,如停车场的大小、新增发电设备的容量大小、电子计算机的内存量、合理的水库容量等。将库存理论与计算机信息系统相结合,确定合理的库存方式、计算最佳的库存量等。

(3)物资运输问题。涉及空运、水运、公路运输、铁路运输、管道运输等。通常包括确定最小成本的运输线路、合理物资调拨方案、运输工具的调度等。

(4)组织人事管理。对人员的需求和使用方面的预测,确定人员编制、人员合理分配,建立人才评价体系、人才开发的规划、激励机制的研究等。

(5)市场营销。广告预算、媒介选择、产品定价、新产品的引入和开发、销售计划制定、市场模拟研究等。

(6)财务管理和会计。经济项目的预测、预算、贷款、成本分析、证券管理、现金管理等。常使用的方法有统计分析、数学规划、决策分析、盈亏点分析法、价值分析法等。

(7)计算机应用和信息系统开发。运筹学中的数学规划方法、网络图论、排队论、存储论、模拟与仿真方法等均起到巨大作用。

(8)城市管理。包括城市规划、城市交通系统的规划与管理、城市给排水系统的规划与管理、城市应急系统的设计和运用等。

1.4 运筹学的展望

随着信息时代的到来,运筹学的应用越来越广泛和深入,它融合了系统科学与社会学、经济学、计算机技术以及其他学科的知识,使得运筹学的发展进入了一个崭新的时代。美国前运筹学会主席邦特(S. Bonder)认为,运筹学应在三个领域发展:运筹学应用、运筹科学和运筹数学,并强调在整体协调发展的同时重点发展前两者。在 20 世纪 70 年代末 80 年代初就有不少运筹学家提出:要注意研究大系统,注意运筹学与系统分析相结合。由于面临的问题大多是涉及技术经济、社会、心理等综合因素的研究,在运筹学中除常用的数学方法以外,还必须引入一些非经典数学的方法和理论等。美国运筹学家萨帝(T. L. Saaty)在 20 世纪 70 年代末提出了层次分析法(AHP),并认为过去过分强调细巧的数学模型,可是它很难解决那些非结构性的复杂问题。切克兰特(P. B. Checkland)把传统的运筹学方法称为硬系统思考,它适用于解决那种结构明确的系统以及战术和技术性问题。硬系统思考方法对于结构不明确的,有人参与活动的系统无法很好地处理,这就应采用软系统思考方法。运筹学与经济学、社会学、心理学、系统科学、计算数学的学科相融合而形成软运筹学。软运筹学的发展将在理论和方法上为运筹学创造出一个崭新的世界。

第 2 章　线性规划与单纯形法

教学重点

1. 线性规划有关的基本概念
2. 建立线性规划的数学模型
3. 两个变量线性规划的图解法
4. 求解线性规划的单纯形法
5. 使用 QSB 软件求解线性规划

线性规划(Linear Programming)是运筹学中研究较早、应用广泛、理论体系比较完整的一个重要的分支。早在 1939 年,苏联数学家康托洛维奇在《生产组织与计划的数学方法》一书中首先提出了线性规划问题,1947 年美国人丹捷格给出了求解线性规划问题的方法——单纯形法以后,线性规划从理论上日趋完整和成熟,在应用上也极为广泛。线性规划是用来解决有一组特殊约束条件的最优化问题的方法,它的目标函数是线性的,并有若干个线性约束条件。

通过本章的学习,能够按实际问题的要求建立线性规划模型;通过线性规划的图解法,理解线性规划解的特性;熟练掌握单纯形法的解题思路及其运算步骤,并能在实际问题中加以运用。

2.1　线性规划的概念及其建模

在生产管理和经济活动过程中,经常需要考虑如下两类问题:一类是对现有的人力资源和物力资源,如何合理地使用它们,使得完成的任务最多或获得最多的经济效益;另一类是当一项任务确定之后,如何统筹安排,以便花费尽可能少的人力资源和物力资源完成它,这些问题往往可以归结为线性规划数学模型。下面通过例子阐述线性规划的一些基本概念,并说明如何把实际问题转化成数学问题,即建立线性规划的数学模型。

【例 2.1】 某厂生产 P、Q 两种产品,主要消耗 A、B、C 三种原料,已知生产单位 P 产品消耗 A 原料 1 吨、B 原料 2 吨、C 原料 2 吨,生产单位 Q 产品消耗 A 原料 3 吨、B 原料 1 吨、C 原料 2 吨,而每

生产一吨P产品可获得3万元的收入，生产一吨Q产品可获得5万元的收入，现有A、B、C三种原材料分别为12吨、10吨、12吨，资料见表2.1。

表2.1 原材料消耗

单位消耗 产品 / 原料	P	Q	原料总量（吨）
A	1	3	12
B	2	1	10
C	2	2	12
产品单价（万元/吨）	3	5	

问：怎么安排生产才能使总的销售收入最多？

要解决问题的目的是怎么样安排生产会使销售收入最多。所谓怎样安排生产，在这里就是确定P、Q的产量应该是多少，这是未知的量，也是要进行决策的量。首先假设P、Q的产量分别为x_1，x_2吨。在这样的假设之下，容易确定总收入函数为$z=3x_1+5x_2$，当然我们希望总收入越多越好，也就是其函数值越大越好，我们用$\max\ z=3x_1+5x_2$表示$z=3x_1+5x_2$的最大值，称之为**目标函数**。从目标函数$\max\ z=3x_1+5x_2$来看，当x_1或x_2的取值越大其目标函数值就可以越大，但是实际上是不可能的，决策变量x_1，x_2的取值要受到一定条件的约束，这样的条件称之为**约束条件**，因为按照我们的生产计划x_1，x_2来看，实际消耗的原料A的数量为x_1+3x_2，不能超过目前已有原材料A的总量，故得约束条件：$x_1+3x_2\leqslant 12$。

同样考虑原料B、C的限制，可得约束条件：

$$2x_1+x_2\leqslant 10$$
$$2x_1+2x_2\leqslant 12$$

我们还得考虑x_1，x_2代表的是产品的产量，它的取值应该是非负的。

因此，问题归结为下列模型：

$$\max\ z=3x_1+5x_2$$
$$\begin{cases} x_1+3x_2\leqslant 12 \\ 2x_1+x_2\leqslant 10 \\ 2x_1+2x_2\leqslant 12 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

【例2.2】 某公司打算利用甲、乙、丙三种原料配制一种新型保健饮料，产品质量标准规定每千克新型保健饮料中，保健成分A、B的含量不低于25克与18克。已知每千克甲、乙、丙原料中两种主要保健成分A、B的含量及原料单价见表2.2。

表2.2 原料所含保健成分数据表

含量（克/千克） 原料 / 成分	甲	乙	丙	新产品的保健成分不少于（克）
A	20	40	10	25
B	10	20	20	18
原料单价（元/千克）	2	2	3	

问：如何制定饮料配方，既满足质量标准又使成本最低？

解决问题的目的是如何制定新型饮料的配方使得成本最低，如何制定新型饮料的配方，其含义就是在每千克饮料中原料甲、乙、丙的投入量各是多少？这是我们要进行配置新型饮料的决策变量，不妨假设每千克饮料中原料甲、乙、丙的投入量分别为 x_1, x_2, x_3 千克。在这样的假设之下，每千克饮料成本为 $z=2x_1+2x_2+3x_3$，考虑要解决问题的目的，当然我们希望成本越低越好，即其函数值越小越好，我们用 $\min\ z=2x_1+2x_2+3x_3$ 表示求函数 $z=2x_1+2x_2+3x_3$ 的最小值，也就是目标函数。从目标函数来看，原料甲、乙、丙的用量越少目标函数的函数值就越小，以至于不放原料成本就会是 0，但是这就不是饮料了，至少不是合格的饮料。为了保证生产的是合格的饮料，x_1, x_2, x_3 的取值还要满足一定的约束条件，即每千克饮料中成分 A 的含量为 $20x_1+40x_2+10x_3$，不能低于规定标准，故有：

$$20x_1+40x_2+10x_3 \geqslant 25$$

同样考虑成分 B，可得约束条件：

$$10x_1+20x_2+20x_3 \geqslant 18$$

最后还要考虑该实际问题的决策变量应该是非负的，这样一来，问题归结为下列模型：

$$\min\ z=2x_1+2x_2+3x_2$$

$$\begin{cases} 20x_1+40x_2+10x_3 \geqslant 25 \\ 10x_1+20x_2+20x_3 \geqslant 18 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

上述两个问题的处理方法具有下列共同特点：①描述决策变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$；②给出目标函数，它是变量的线性函数；③确定约束条件，这些约束条件都是线性表达式；④考虑决策变量的取值范围。

我们把目标函数是线性函数、约束条件都是线性表达式的数学模型称为**线性规划**(Linear Programming，简记为 LP)。考虑以上四个方面问题的过程就是建立线性规划模型的过程，这四个问题描述清楚了，就是建立了线性规划模型。

线性规划的一般形式为：

$$\max(\min)\ z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_2 \qquad (2.2) \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \qquad (2.3) \end{cases}$$

采用求和符号 $\sum$，可以简写为：

$$\max(\min)\ z=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (\geqslant, =) b_i & i=1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0 & j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为**决策变量**，目标函数中变量系数 c_j 称为**价值系数**，b_i 称为**右端常数**，式(2.3)称为**非负约束**，式(2.2)称为**技术约束**，系数 a_{ij} 称为**技术系数**。满足全部约束条件的变量值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为**可行解**，可行解的集合称为**可行域**，记为 R；使目标函数取得最大(最小)值的可行解$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为**最优解**，最优解的目标函数值称为**最优值**。

线性规划是多元函数的极值问题；不难看出，当决策变量较多时，微分学中求极值的方法对它是无能为力的，必须探讨新的解法。

2.2 图 解 法

我们先从简单的线性规划入手，简单的线性规划就是变量少的线性规划，一个变量的线性规划最简单，但是它简单得没有讨论的必要了，所以我们先讨论两个变量的线性规划，用以发现线性规划解的一些特性，然后再讨论能不能把这些特性推广到一般的线性规划中去。

当决策变量个数 $n=2$ 时，总可以把这两个变量看作是平面上点的坐标，LP 问题可以利用图形求解，称为图解法。下面通过例题说明它的主要步骤。

【例 2.3】 用图解法求解【例 2.1】的最优解。

$$\max z=3x_1+5x_2$$

$$\begin{cases} x_1+3x_2\leqslant 12\\ 2x_1+x_2\leqslant 10\\ 2x_1+2x_2\leqslant 12\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解：由于 $x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0$，因此只需要在第一象限作图讨论，如图 2.1 所示，解答过程分为三步。

(1)确定问题的可行域 R。

方程 $x_1+3x_2=12$ 表示平面(x_1,x_2)上的一条直线，记为 l_1，满足约束条件 $x_1+3x_2\leqslant 12$ 的点组成 l_1 左下方的半平面。同样地，约束条件 $2x_1+x_2\leqslant 10$ 与 $2x_1+2x_2\leqslant 12$ 分别表示图 2.1 中直线 l_2 左下方的半平面与直线 l_3 左下方的半平面，还有 $x_1\geqslant 0$、$x_2\geqslant 0$。这些半平面的交集是凸多边形 $OQ_1Q_2Q_3Q_4$，它就是可行域 R。

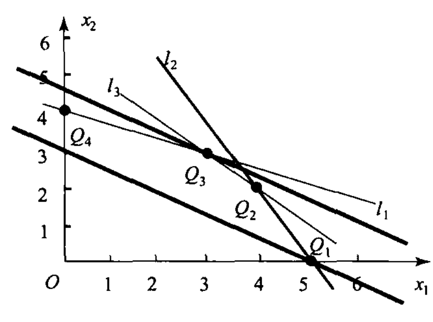


图 2.1 图解法解线性规划

(2)分析目标函数 z 的等值线平行移动与 z 值的关系，确定最优解的位置。

当 z 取定值时，方程 $z=3x_1+5x_2$ 或 $x_2=-3/5x_1+z/5$ 表示一条斜率为 $-3/5$ 的直线 l，称为 z 的等值线，它在 x_2 轴上的截距为 $z/5$。当 l 向右上方平行移动且保持与 R 有共同部分时，z 值不断上升，由于 l 的斜率为 $-3/5$，因此当 l 向右上方平移的过程中，与 R 最后的公共点是 Q_3，z 在 Q_3 达到最大值。

(3)计算最优解。

点 Q_3 是直线 l_1 与 l_3 的交点，它的坐标由方程组