◆人教版

学法大视野

XUEFA DASHIYE

KAOYIBEN

考一本

课程基础导练

数学

高中选修4-4

海豚出版社
DOLPHIN BOOKS
CIPG
中国国际出版集团

责任编辑：范劲松　潘　丽
责任校对：吴小燕　谭著名
装帧设计：张　维　蒋　慧

拥有《考一本》　圆你一本梦

考一本
KAOYIBEN
课程基础导练

长郡雅礼　联袂打造
一线名师　担纲编写

语文·高中必修 1，2，3，4，5(人教版)
数学·高中必修 1，2，3，4，5(人教版)
英语·高中模块 1，2，3，4，5(译林版)
物理·高中必修 1，2(人教版)
化学·高中必修 1，2(人教版)
历史·高中必修 1，2，3(人教版)
地理·高中必修 1，2，3(湘教版)
生物·高中必修 1，2，3(人教版)
思想政治·高中必修 1，2，3，4(人教版)

语文·高中选修·文章写作与修改(人教版)
语文·高中选修·中国古代诗歌散文欣赏(人教版)
语文·高中选修·新闻阅读与实践(人教版)
语文·高中选修·中国文化经典研读(人教版)
语文·高中选修·外国小说欣赏(人教版)
数学·高中选修 1－1，1－2，2－1，2－2，2－3(人教版)
数学·高中选修 4－1，4－4，4－5，4－7(人教版)
英语·高中模块 6，7，8，9，10，11(译林版)
物理·高中选修 1－1，3－1，3－2，3－4，3－5(人教版)
化学·高中选修 1，4，5(人教版)
生物·高中选修 1，3(人教版)
历史·高中选修 1，3(人教版)
地理·高中选修 3，5(湘教版)

百校联盟
BISCHOOL

本丛书由 www.acpub.com(中国学术出版网)提供数字出版支持
欢迎访问 www.baishibaile.com，查询学科资讯，参与在线互动

ISBN 978-7-5110-0347-8

定价：7.00 元

考一本

KAOYIBEN

课程基础导练

数学

高中选修4-4（人教版）

组编单位：长沙市教育科学研究院

编写指导：王　旭　卢鸿鸣　刘维朝

（按姓氏笔画）陈来满　雷建军　黎　奇

本册主编：陈　峰　杨　科

本册编者：谭泽阳　曾卫国　张志忠　王平波　高　李

华接春　赵攀峰　朱同彪　王小伟　李生根

饶金伟　王　毅　邓奇志　龚德军　刘炳臣

本册审读：戴国良　唐　亮　王志翔

海豚出版社

DOLPHIN BOOKS

CIPG 中国国际出版集团

图书在版编目(CIP)数据

考一本·课程基础导练. 数学. 4-4：选修／陈峰，杨科主编. —北京：海豚出版社，2010.8
ISBN 978-7-5110-0347-8

Ⅰ.①考… Ⅱ.①陈… ②杨… Ⅲ.①数学课—高中—习题 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 153643 号

书　　名：考一本·课程基础导练　数学(选修 4-4)
作　　者：陈　峰　杨　科

责任编辑：范劲松　潘　丽
责任校对：吴小燕　谭著名
装帧设计：张　维　蒋　慧

出　　版：海豚出版社
网　　址：http://www.dolphin-books.com.cn
地　　址：北京市百万庄大街 24 号　　邮　编：100037
客服电话：0731-84322947　84313942　82254875
传　　真：0731-84322947　82322805
印　　刷：湖南版艺印刷有限公司
开　　本：16 开(880 毫米×1230 毫米)
印　　张：3.5
字　　数：90 千字
版　　次：2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
标准书号：ISBN 978-7-5110-0347-8
定　　价：7.00 元

PREFACE

编者寄语

积经年之底蕴，凝教学之精华。全新呈现在您面前的《考一本·课程基础导练》是由湖南省四大名校之长郡中学、雅礼中学联手倾力打造，经校内众多长年奋战在教学一线上的特、高级教师潜心编写而成的。长郡、雅礼两校此番在教辅用书上的联袂合作，尚属首次，而由各学科带头人牵头的作者队伍，也都是教育界的精兵强将。作为编者，我们有足够的理由相信，《考一本·课程基础导练》这套新型教辅用书必将给广大师生带来福音。

本套丛书立足于学业水平考试，跟踪服务新高考，以最新教材为依托，彰显教育教学新理念，整体来说，具有权威、同步、联动、实用等几大特色。

权威 本套丛书的编写团队，不仅具有扎实的教学功底，丰富的教学经验，而且深谙高中教育教学的规律和特点，由学科带头人领队的编写更是有力地保证了该套丛书的权威性。

同步 教与学一体，知识与能力同步，将"怎么学"与"怎么教"放在一起同步设计，以方法为主线实施教学，使学生不仅能轻松地掌握基础知识，而且能尽快地提高综合应用能力。本套丛书以全新的视角向广大师生介绍这种符合教学规律的立体化学习方案。

联动 教与学联动，相互促进，涵盖全部知识点的教法学法设计，抓住重难点的讲练结合编排，使这个主体充满鲜活而翔实的内容。

实用 本套丛书注重基础，突出实用、好用，并充分照顾到不同层次、不同阶段的学生学习时的实际需要，在知识和能力的安排上循序渐进，难易有度。书中例题和习题的选取充分考虑最新命题趋势，既博采众长，又自成系统。各分册体例相对统一，但又根据模块特点和各年级教学实际有所不同，各具特色。

踏破铁鞋无觅处。但愿《考一本·课程基础导练》正是您苦苦寻觅中的教辅用书，并祈求它的上乘品质能带给您成功的好运。

本套丛书的编辑与出版，得益于教育界、出版界众多知名人士的热情帮助和大力支持，他们提出了诸多很好的建议，在此谨表衷心感谢。恳切希望广大师生和教育专家在这套丛书问世后，多提宝贵意见，以便我们进一步修订完善。

编　者

2010 年 7 月

目录
CONTENTS

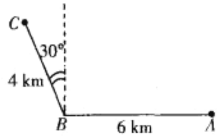
第一讲 坐标系

第1课时 平面直角坐标系

发现问题

情景导思

如图,A,B,C是三个观察哨,A在B的正东方向,两地相距6 km,C在B的北偏西$30°$方向,两地相距4 km,在某一时刻,A观察哨发现某种信号,并知道该信号的传播速度为1 km/s,4 s后B,C两个观察哨同时发现这种信号,在以过A,B两点的直线为x轴,以AB的垂直平分线为y轴建立的平面直角坐标系中,如何表示发出这种信号的P的坐标?



互动课堂

知识清单

1. 平面直角坐标系的概念

在平面上取两条互相垂直并选定了方向的直线,一条称为x轴,一条称为y轴,交点O称为原点,取定长度单位,就构成了平面直角坐标系.

2. 平面直角坐标系中的重要公式

(1)两点间的距离公式

已知点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

(2)过两点的直线的斜率公式

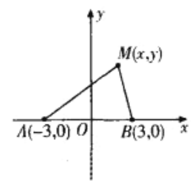
已知点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则$k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x_1\neq x_2)$.

学法指导

1. 用坐标法求动点的轨迹方程

【例1】 两个定点的距离为6,点M到这两个定点的距离的平方和为26,求点M的轨迹方程.

【解析】 设两个定点分别为A,B,以A,B所在的直线为x轴,线段AB的中垂线为y轴,建立直角坐标系如图,



由$|AB|=6$得$A(-3,0)$,$B(3,0)$,再设$M(x,y)$,

由已知有$|MA|^2+|MB|^2=26$,

即$(x+3)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=26$,

化简得$x^2+y^2=4$,

故点M的轨迹方程为$x^2+y^2=4$.

【点评】 求轨迹方程的一般步骤:建系、设点、列式、化简、检验.

变式训练: 曲线C位于x轴上方,且其上任意一点M到点$F(0,1)$的距离比它到x轴的距离大1,求曲线C的方程.

2. 用坐标法解决代数问题

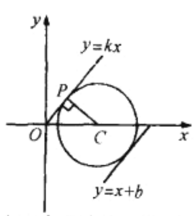
【例2】 如果实数 x,y 满足 $x^2+y^2-4x+1=0$，求：

(1) $\frac{y}{x}$ 的最大值；

(2) $y-x$ 的最小值.

【解析】 $x^2+y^2-4x+1=0$ 表示以 $(2,0)$ 为圆心，半径为 $\sqrt{3}$ 的圆，$\frac{y}{x}$ 为点 $P(x,y)$ 与原点连线的斜率，设 $y-x=b$，则 $y=x+b$，可知 b 是斜率为 1 的直线在 y 轴上的截距. 于是，问题(1)实质上是求圆上的点与原点的连线的斜率的最大值，问题(2)实质上是求斜率为 1 的直线与已知圆有公共点时直线的纵截距的最小值.

(1)设 $\frac{y}{x}=k$，得 $y=kx$，所以 k 为过原点的直线的斜率. 又 $x^2+y^2-4x+1=0$ 表示以 $(2,0)$ 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆，如下图所示.



当直线 $y=kx$ 与已知圆相切且切点在第一象限时，k 最大，此时，$|CP|=\sqrt{3}$，$|OC|=2$.

所以 $\mathrm{Rt}\triangle POC$ 中，$\angle POC=60°$，$k=\tan 60°=\sqrt{3}$.

所以 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

(2)设 $y-x=b$，即为直线 $y=x+b$，b 为直线在 y 轴上的截距. 如上图所示.

当直线 $y=x+b$ 与圆有公共点时，当且仅当直线与圆相切，且切点在第四象限时 b 最小.

此时，圆心 $(2,0)$ 到直线的距离为 $\sqrt{3}$，即 $\frac{|2+b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{3}$.

解得 $b=-\sqrt{6}-2$ 或 $b=\sqrt{6}-2$(舍).

所以 $y-x$ 的最小值为 $-\sqrt{6}-2$.

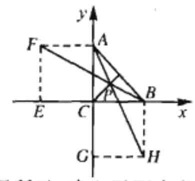
【点评】 选择合理的平面直角坐标系，分析出所求量的几何意义，把代数问题转化为平面几何问题，再用坐标法加以解决.

变式训练： 实数 x,y 满足 $(x-2)^2+y^2=3$，则 x^2+y^2 的取值范围是__________.

3. 用坐标法处理几何问题

【例3】 如下图所示，以 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 BC，AC 为边作两个正方形 $BCGH$ 和 $AFEC$，AH，BF 交于点 P.

求证：$CP\perp AB$.



【解析】 如上图所示，建立平面直角坐标系，设 $B(a,0)$，$A(0,b)$，则 $H(a,-a)$，$F(-b,b)$.

由两点式得 AH 所在直线方程为 $(a+b)x+ay-ab=0$.

BF 所在直线方程为 $bx+(a+b)y-ab=0$.

联立求得点 P 的坐标为

$\left(\frac{ab^2}{a^2+ab+b^2},\frac{a^2b}{a^2+ab+b^2}\right)$，

$\therefore k_{CP}=\frac{a}{b}$，

$\therefore k_{CP}\cdot k_{AB}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b-0}{0-a}=-1$.

$\therefore CP\perp AB$.

【点评】 本题是用坐标法证明平面几何问题. 建立恰当的平面直角坐标系是解题的一个关键点. 一般地，要尽量利用图形中已有的互相垂直的线段所在的直线作为平面直角坐标系的坐标轴，这样设立点的坐标往往较为简单. 本例在证明过程中，还用到了过两条直线的交点的直线系方程，再用两条直线的斜率之积为 -1，解决了两条直线的垂直问题.

变式训练： 证明：三角形的高线相交于一点.

自主成长

夯实基础

1. 若$\triangle ABC$的三个顶点分别是$A(1,2)$，$B(2,3)$，$C(2,1)$，则$\triangle ABC$为（　　）

A. 等腰三角形　　B. 正三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

2. 已知平面内三点$A(2,2)$，$B(1,3)$，$C(7,x)$，满足$\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{AC}$，则$x$的值为（　　）

A. 3　　B. 6

C. 7　　D. 9

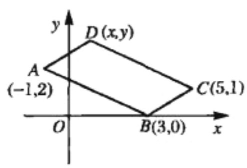
3. 有相距1 400 m的A，B两个观察站，在A站听到爆炸声的时间比在B站听到的时间早4 s. 已知当时声音速度为340 m/s，则爆炸点所在的曲线为（　　）

A. 双曲线的一支　　B. 直线

C. 椭圆　　D. 抛物线

4. 在$\triangle ABC$中，若BC的长度为4，中线AD的长为3，则以BC所在直线为x轴，BC的中点D为原点的直角坐标系中，A点的轨迹方程是________.

5. 如下图所示，▱$ABCD$中三个顶点A，B，C的坐标分别是$(-1,2)$，$(3,0)$，$(5,1)$，则点D的坐标是________.



6*. 函数$y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4x+8}$的最小值为________.

能力提升

7. 已知四点$A(-1,3)$，$B(1,1)$，$C(4,4)$，$D(3,5)$，求证：四边形$ABCD$是直角梯形.

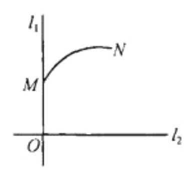
8. 已知正三角形ABC的边长为a，在平面上求一点P，使$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2$最小，并求出最小值.

挑战自我

9*. 如图，l_1，l_2是通过某城市开发区中心O的两条南北和东西走向的街道，连接M，N两地之间的铁路线是圆心在直线l_2上的一段圆弧，若点M在点O正北方向，且$|MO|=3$ km，点N到l_1，l_2的距离分别为4 km和5 km.

(1)建立适当坐标系，求铁路线所在圆弧的方程；

(2)若该城市的某中学拟在点O正东方向选址建分校，考虑环境问题，要求校址到点O的距离大于4 km，并且铁路线上任意一点到校址的距离不能少于$\sqrt{26}$ km，求该校址距点O的最近距离(注：视校址为一个点).



注释：书中带“*”的题为选做题

第2课时 平面直角坐标系中的伸缩变换

发现问题

情景导思

将圆C：$x^2+y^2=4$上的动点M的横坐标不变，纵坐标变为原来的$\frac{1}{2}$，得到的曲线C'是怎样的曲线？

互动课堂

知识清单

伸缩变换

设点$P(x,y)$是平面直角坐标系中的任意一点，在变换φ：$\begin{cases}x'=\lambda\cdot x,(\lambda>0),\\y'=\mu\cdot y,(\mu>0)\end{cases}$的作用下，点$P(x,y)$对应到点$P'(x',y')$，称$\varphi$为平面直角坐标系中的坐标伸缩变换，简称伸缩变换.

学法指导

1. 求伸缩变换下的曲线的方程

【例1】设平面上伸缩变换的坐标表达式为$\begin{cases}x'=3x,\\y'=2y.\end{cases}$求圆$x^2+y^2=4$在此伸缩变换下的方程.

【解析】由$\begin{cases}x'=3x,\\y'=2y,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=\frac{x'}{3},\\y=\frac{y'}{2}.\end{cases}$

代入$x^2+y^2=4$，得$\frac{x'^2}{36}+\frac{y'^2}{16}=1$.

【点评】根据伸缩变换的规律，直接代换即得伸缩变换后曲线的方程了.

变式训练：椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$经过变换$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=\frac{\sqrt{3}}{3}y\end{cases}$后得到的曲线方程是什么？

2. 逆求伸缩变换前原来曲线的方程

【例2】设平面上伸缩变换的表达式为$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=3y.\end{cases}$某曲线在这个伸缩变换后曲线的方程为$y'=3\sin 2x'$，求原来曲线的方程.

【解析】因为$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=3y.\end{cases}$

直接代入$y'=3\sin 2x'$，得$3y=3\sin x$，即$y=\sin x$.

故伸缩变换前的曲线方程为$y=\sin x$.

【点评】伸缩变换公式$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=3y\end{cases}$中的$x'=\frac{1}{2}x$，即将$y=\sin x$的周期由原来的$2\pi$压缩为$\pi$，$y'=3y$即将$y=\sin x$的振幅由原来的1伸长到3.

变式训练：曲线C_1在变换ρ：$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=4y\end{cases}$的作用下得到曲线$C_2$：$y'^2=2x'$，则$C_1$的方程为________.

3. 求伸缩变换公式

【例3】在同一平面直角坐标系中，将直线$x-2y=2$变成直线$2x'-y'=4$，求满足图象变换的伸缩变换.

【解析】设变换为$\begin{cases}x'=\lambda\cdot x,(\lambda>0),\\y'=\mu\cdot y,(\mu>0),\end{cases}$

将其代入$2x'-y'=4$，得$2\lambda x-\mu y=4$.

又由$x-2y=2$，得$2x-4y=4$，

比较系数得$\lambda=1$，$\mu=4$.

故所求的伸缩变换为$\begin{cases}x'=x,\\y'=4y.\end{cases}$

变式训练：曲线C_1：$\frac{x^2}{4}-y^2=1$经过伸缩变换ρ得到曲线C_2：$x'^2-\frac{y'^2}{16}=1$，则该变换是________.

自主成长

夯实基础

1. 已知 $f_1(x)=\cos x$，$f_2(x)=\cos\omega x\ (\omega>0)$，$f_2(x)$的图象可以看作是把 $f_1(x)$的图象在其所在的坐标系中的横坐标压缩到原来的$\frac{1}{3}$倍(纵坐标不变)而得到的，则 ω 为 ( )

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2

C. 3　　D. $\frac{1}{3}$

2. 将曲线 C 按伸缩变换公式$\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y\end{cases}$变换得曲线方程为 $x'^2+y'^2=1$，则曲线 C 的方程为 ( )

A. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$　　B. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

C. $\frac{x^2}{\frac{1}{9}}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$　　D. $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$

3. 函数 $y=f(x+1)$的图象 C_1 与函数 $y=2f\left(\frac{x}{2}\right)$的图象 C_2 之间的关系为 ( )

A. 将 C_1 向左平移 1 个单位后，再将其横、纵坐标缩短为原来的一半即得到 C_2

B. 将 C_1 向右平移 1 个单位后，再将其横、纵坐标缩短为原来的一半即得到 C_2

C. 将 C_1 向左平移 1 个单位后，再将其横、纵坐标伸长到原来的两倍即得到 C_2

D. 将 C_1 向右平移 1 个单位后，再将其横、纵坐标伸长到原来的两倍即得到 C_2

4. 把曲线 $y=3\sin 2x$ 经过伸缩变换$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=4y\end{cases}$得到的曲线为____________.

5. 把圆 $x^2+y^2=16$ 沿 x 轴方向均匀压缩为椭圆 $x'^2+\frac{y'^2}{16}=1$，则变换公式为____________.

6. 将一个圆作伸缩变换后所得到的图形可能是__________(填上所有正确的序号).

①椭圆；②比原来大的圆；③比原来小的圆；④双曲线.

能力提升

7. (1)在同一坐标系下经过伸缩变换$\begin{cases}x'=3x,\\y'=2y\end{cases}$后，圆的方程 $x^2+y^2=1$ 变成了什么曲线?

(2)经过一个伸缩变换后，圆 $x^2+y^2=4$ 变为椭圆 $x'^2+\frac{y'^2}{4}=1$，求这个伸缩变换.

8. 已知函数 $y=\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+1, x\in\mathbf{R}$.

(1)当函数 y 取得最大值时，求自变量 x 的集合；

(2)该函数的图象可由 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到？

挑战自我

9. 将圆 $C: x^2+y^2=a^2$ 通过伸缩变换 $\begin{cases} x'=x, \\ y'=\frac{b}{a}y \end{cases}$ 进行“压缩”(其中 $a>b>0$).

(1)分析圆 C 的两条互相垂直的直径经过压缩后的位置关系；

(2)过圆 C 上的点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程是 $x_0x+y_0y=a^2$，经过压缩后的切线与压缩后的曲线有何关系？

第3课时 极坐标系

发现问题

情景导思

在航海中,经常以“方位角和距离”确定位置,这种刻画位置的方法,就是本节开始学习的极坐标的思想.

互动课堂

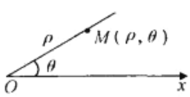
知识清单

1. 极坐标系的有关概念

(1)极坐标系:在平面内取一个定点 O,叫做极点;自极点 O 引一条射线 Ox,叫做极轴;再选定一个长度单位、一个角度单位(通常取弧度)及其正方向(通常取逆时针方向),这样就建立了一个极坐标系.

(2)点的极坐标:如图,设 M 是平面内一点,极点 O 与点 M 的距离 $|OM|$ 叫做点 M 的极径,记作 ρ;以极轴 Ox 为始边,射线 OM 为终边的角 xOM 叫做点 M 的极角,记为 θ. 有序数对 (ρ,θ) 叫做点 M 的极坐标,记作 $M(\rho,\theta)$.

一般地,不作特殊说明时,我们认为 $\rho\geqslant0$,θ 可取任意实数.



2. 极坐标和直角坐标的互化公式

设 M 是平面内任意一点,它的直角坐标是 (x,y),极坐标是 (ρ,θ),它们之间的关系为:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta;\end{cases}\ ① \qquad \begin{cases}\rho^2=x^2+y^2,\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq0).\end{cases}\ ②$$

其中公式①的作用为极坐标化为直角坐标,公式②的作用为直角坐标化为极坐标.

学法指导

1. 认识同一个点的极坐标的多种表示形式

【例1】 已知点 A 的极坐标是 $\left(5,\frac{\pi}{3}\right)$,写出符合 $\rho>0$ 且 $-2\pi<\theta<0$ 的点 A 的极坐标.

【解析】 当 $\rho>0$ 时,点 $\left(5,\frac{\pi}{3}\right)$ 的极坐标的一般形式为 $\left(5,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$.

由 $-2\pi<\theta<0$,得 $-2\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi<0$,

解得 $k=-1$,$\theta=\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{5\pi}{3}$.

所以,满足条件的 A 点的极坐标是 $\left(5,-\frac{5\pi}{3}\right)$.

【点评】 一个极坐标对应着平面上唯一的一个点,但反之,平面上同一个点的极坐标有多种表示方式.

变式训练: 下列各点中与 $\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$ 不表示极坐标系中同一个点的是 ( )

A. $\left(2,\frac{13\pi}{6}\right)$ B $\left(2,-\frac{11\pi}{6}\right)$

C. $\left(2,\frac{11\pi}{6}\right)$ D. $\left(2,-\frac{23\pi}{6}\right)$

2. 点的极坐标与直角坐标的互化

【例2】 (1)将点 M 的极坐标 $\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$ 化为直角坐标形式;

(2)将点 M 的直角坐标 $(1,-1)$ 化为极坐标形式(限定 $\rho\geqslant0$,$-\pi<\theta\leqslant\pi$).

【解析】 (1)由坐标变换公式,得 $\begin{cases}x=2\cos\frac{2\pi}{3}=-1,\\y=2\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}.\end{cases}$

所以,点 M 的直角坐标为 $(-1,\sqrt{3})$.

(2)由坐标变换公式,得 $\rho=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$,

$\tan\theta=\frac{-1}{1}=-1$,$\theta=-\frac{\pi}{4}$,

故点 M 的极坐标为 $\left(\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right)$.

【点评】 利用极坐标与直角坐标的互化公式(也可称之为坐标变换公式)直接计算求解. 但在直角坐标化极坐标时,要注意点位于哪个象限,如(2)中点 $M(1,-1)$ 位于第四象限,故取 $\theta=-\frac{\pi}{4}$.

变式训练: (1)点 M 的直角坐标 $(1,1)$ 化为极坐标可以是________;

(2)点 M 的极坐标 $(1,1)$ 化为直角坐标是________.

3. 极坐标方程与直角坐标方程的互化

【例3】(1)化直角坐标方程 $x^2+y^2-2ax=0$ 为极坐标方程；

(2)化极坐标方程 $\rho^2=a^2\sin 2\theta$ 为直角坐标方程；

(3)试求曲线 $\rho\cos\theta=-2$ 与曲线 $\rho+\frac{6\cos\theta}{\sin^2\theta}=0$ 的交点.

【解析】(1)$\rho^2-2a\rho\cos\theta=0$，

所以 $\rho(\rho-2a\cos\theta)=0$，解得 $\rho=0$ 或 $\rho=2a\cos\theta$，

因为 $\rho=0$ 包含在 $\rho=2a\cos\theta$ 之中，

所以，原式的极坐标方程是 $\rho=2a\cos\theta$.

(2)$\rho^2=a^2\sin 2\theta$，两边同乘以 ρ^2，得 $\rho^4=a^2\cdot 2\rho\sin\theta\cdot\rho\cos\theta$(注意，这样做，方程增加了一个二重解 $\rho=0$，但它也适合(2)，所以仍为同解变形)，所以 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$.

(3)$\rho\cos\theta=-2$，所以 $x=-2$， ①

因为 $\rho+\frac{6\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=0$，

所以 $\rho\sin^2\theta+6\cos\theta=0$，

所以 $\rho^2\sin^2\theta+6\rho\cos\theta=0$，所以 $y^2=-6x$， ②

联立①②解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=\pm 2\sqrt{3}.\end{cases}$

故所求交点的直角坐标是 $(-2,2\sqrt{3})$ 和 $(-2,-2\sqrt{3})$，极点坐标是 $\left(4,\frac{2\pi}{3}\right)$ 和 $\left(4,\frac{4\pi}{3}\right)$.

【点评】由本题(1)(2)可概括出极坐标方程与直角坐标方程互化的方法是

$$\varphi(\rho,\theta)=0\underset{\text{用公式 }x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta}{\overset{\text{凑出 }\rho\cos\theta,\rho\sin\theta}{\rightleftharpoons}}f(x,y)=0.$$

本题(3)告诉我们，由极坐标方程给出的问题，若不好处理就直角坐标化；由直角坐标方程给出的问题，若用极坐标方法处理较为简便，就极坐标化. 一句话，互化为的是寻找最简方法.

变式训练：曲线 $C:\rho=4\cos\theta$ 表示什么曲线？

自主成长

夯实基础

1. 在极坐标系中，与点 $P\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ 不可能重合的点是 ( )

A. $P'\left(2,\frac{7\pi}{3}\right)$　　B. $P'\left(2,-\frac{5\pi}{3}\right)$

C. $P'\left(2,\frac{4\pi}{3}\right)$　　D. $P'\left(2,-\frac{11\pi}{3}\right)$

2. 在满足直角坐标与极坐标互化的条件下，点 P 的极坐标为 $\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$，化为直角坐标是 ( )

A. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. 直角坐标为 $(-3,3)$ 的点的极坐标可能是 ( )

A. $\left(3\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $\left(3\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$

C. $\left(3\sqrt{2},\frac{11\pi}{4}\right)$　　D. $\left(-3\sqrt{2},-\frac{5\pi}{4}\right)$

4. 在极坐标系中，两点 $\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$ 与 $\left(4,\frac{5\pi}{6}\right)$ 之间的距离为________.

5. 已知点 $A(\rho_1,\theta_1)$，$B(\rho_2,\theta_2)$ 的极坐标满足条件 $\rho_1+\rho_2=0$ 且 $\theta_1+\theta_2=\pi$，则 A,B 的位置关系是____________.

6. 若线段 AB 端点的极坐标为 $\left(8,-\frac{2\pi}{3}\right)$ 和 $\left(6,\frac{\pi}{3}\right)$，则线段 AB 的中点的极坐标为________________.

能力提升

7. 在满足直角坐标与极坐标互化的条件下，当 $\rho>0$，$\theta\in\mathbf{R}$ 时，求点 $P(\sqrt{3},1)$ 的极坐标.

8. 已知 A,B 两点的极坐标分别为 $\left(-3,\frac{4\pi}{3}\right)$，$\left(5,-\frac{5\pi}{6}\right)$，求 $|AB|$ 和 $\triangle AOB$ 的面积，其中 O 为极点.

挑战自我

9. 已知 P,Q 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(0<a<b)$ 上的两点，若 $OP\perp OQ$，求证：$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}$ 为定值.

第4课时 圆的极坐标方程

发现问题

情景导思

圆 $C_1:x^2+y^2=r^2$，圆 $C_2:(x-a)^2+y^2=a^2$，圆 $C_3:x^2+(y-a)^2=a^2$ 的极坐标方程分别是什么？

互动课堂

知识清单

1. 常用的圆的极坐标方程

(1)圆心在极点，半径为 r 的圆的极坐标方程为 $\rho=r$；

(2)圆心为 $C(a,0)(a>0)$，半径为 a 的圆的极坐标方程为 $\rho=2a\cos\theta$；

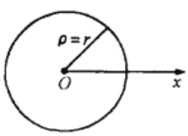
(3)圆心为 $C\left(a,\frac{\pi}{2}\right)(a>0)$，半径为 a 的圆的极坐标方程为 $\rho=2a\sin\theta$；

(4)圆心为 $C(a,\pi)(a>0)$，半径为 a 的圆的极坐标方程为 $\rho=-2a\cos\theta$；

(5)圆心为 $C\left(a,\frac{3\pi}{2}\right)(a>0)$，半径为 a 的圆的极坐标方程为 $\rho=-2a\sin\theta$.

2. 几种常见的圆的极坐标方程

(1)圆心在极点的圆：$\rho=r(\rho\in\mathbf{R})$，如右图.



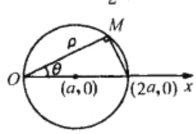
(2)经过极点的圆：

①圆心为 $(a,0)(a>0)$，如图①；

②圆心为 $\left(a,\frac{\pi}{2}\right)(a>0)$，如图②；

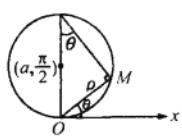
③圆心为 $(a,\pi)(a>0)$，如图③；

④圆心为 $\left(a,\frac{3\pi}{2}\right)(a>0)$，如图④.



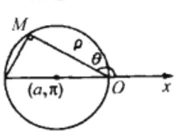
$\rho=2a\cos\theta$

图①



$\rho=2a\sin\theta$

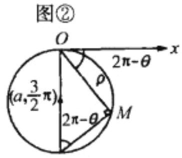
图②



$\rho=2a\cos(\pi-\theta)$

即 $\rho=-2a\cos\theta$

图③



$\rho=2a\sin(2\pi-\theta)$

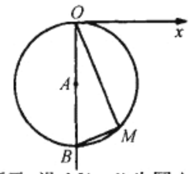
即 $\rho=-2a\sin\theta$

图④

学法指导

1. 利用直角三角形求圆的极坐标方程

【例1】 求圆心在 $A\left(2,\frac{3\pi}{2}\right)$ 处并且过极点的圆的极坐标方程，并把它化为直角坐标方程.



【解析】 如图所示，设 $M(\rho,\theta)$ 为圆上除 O,B 外的任意一点，连接 OM,MB，则有 $OB=4,OM=\rho,\angle MOB=\theta-\frac{3\pi}{2}$，$\angle BMO=90^\circ$，从而△$BOM$ 为直角三角形，所以有

$|OM|=|OB|\cos\angle MOB$.

即 $\rho=4\cos\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)=-4\sin\theta$.

将 $\rho=-4\sin\theta$ 两边同乘以 ρ，得 $\rho^2=-4\rho\sin\theta$，

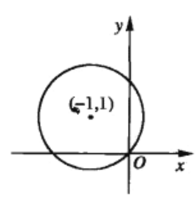
化为直角坐标方程为 $x^2+y^2=-4y$，

即 $x^2+(y+2)^2=4$.

变式训练：圆心在 $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$，半径为2的圆的极坐标方程为________.

2. 利用坐标变换求极坐标方程

【例2】 写出圆心在 $(-1,1)$，且过原点的圆的直角坐标方程，并将它化为极坐标方程.



【解析】 如图，由圆心 $(-1,1)$ 可得圆的半径 $R=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，

圆的方程为 $(x+1)^2+(y-1)^2=2$，

即 $x^2+y^2=-2(x-y)$.

由坐标变换公式

$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，

得 $\rho^2=-2(\rho\cos\theta-\rho\sin\theta)$，

即 $\rho=2(\sin\theta-\cos\theta)$.

圆心坐标 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 满足以上方程.

这就是要求的圆的极坐标方程.

【点评】 先利用直角坐标系求得圆的方程，再利用直角坐标和极坐标的互化公式化为极坐标方程.

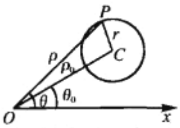
变式训练：圆 $\rho=10\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ 的圆心的极坐标是 ( )

A. $(5,0)$ B. $\left(5,-\frac{\pi}{3}\right)$

C. $\left(5,\frac{\pi}{3}\right)$ D. $\left(5,\frac{2\pi}{3}\right)$

3. 利用余弦定理求极坐标方程

【例 3】求圆心在 $C(\rho_0,\theta_0)$，半径为 r 的圆的方程.



【解析】如图，在圆周上任取一点 P，设其极坐标为 (ρ,θ)，由余弦定理，知

$CP^2=OP^2+OC^2-2OP\cdot OC\cdot\cos\angle COP$.

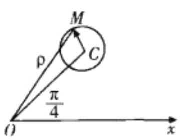
故 $r^2=\rho_0^2+\rho^2-2\rho\rho_0\cos(\theta-\theta_0)$.

可以验证，OC 与圆的交点 (ρ_0-r,θ_0) 满足以上方程.

这就是要求的圆的极坐标方程.

【点评】*构造三角形，利用余弦定理建立极坐标方程.*

变式训练：如图，在极坐标系中，O 为极点. 圆 C 的圆心为 $(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$，半径为 $\frac{1}{2}$，求圆 C 的极坐标方程.



自主成长

夯实基础

1. 极坐标方程 $\rho=1$ 表示 ( )

A. 直线 B. 射线 C. 圆 D. 椭圆

2. 方程 $\rho=6\sin\theta$ 表示 ( )

A. 以 $\left(6,\frac{\pi}{2}\right)$ 为圆心，3 为半径的圆

B. 以 $(3,0)$ 为圆心，3 为半径的圆

C. 以 $(6,0)$ 为圆心，3 为半径的圆

D. 以 $\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$ 为圆心，3 为半径的圆

3. 以 $(2,0)$ 为圆心，2 为半径的圆的极坐标方程为 ( )

A. $\rho=4\cos\theta$ B. $\rho=4\sin\theta$

C. $\rho=-4\cos\theta$ D. $\rho=-4\sin\theta$

4. 曲线的极坐标方程 $\rho=4\sin\theta$ 化成直角坐标方程为______.

5. 圆 $\rho=6\cos\theta$ 上的点到直线 $y=x+3$ 的最小距离为______.

6. 圆 $\rho=10\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ 的圆心的极坐标为______.

能力提升

7. 极坐标方程 $\rho^2-(1+\cos\theta)\rho+\cos\theta=0(\rho\geqslant0)$ 表示什么曲线？试说明你的判断.